UNIVERSIDAD DE MANAGUA

Al más alto nivel

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Encuentro #8

TEMA: CADENAS DE MARKOV

Prof.: **MSc. Julio Rito Vargas Avilés** **IC-2018**

Agenda:

- Proceso estocástico
- Concepto de Cadena de Markov
- Clasificación de estados de una CM y ejemplos
- Distribución estacionaria
- Ejemplos de aplicación.

- **Def.: Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo.**
- **Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias definida sobre un espacio de probabilidad. Es decir:**

$$\{X_t : \Omega \to \Re, \quad t \in T\}$$

Necesitamos una herramienta que modele procesos aleatorios en el tiempo, y para ello usaremos los *procesos estocásticos.*

$$\omega \to X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

- **Tendremos que *X* es una función de dos argumentos. Fijado $\omega = \omega_0$, obtenemos una función determinista (no aleatoria):**

$$X(\cdot, \omega_0) : T \to \Re$$

$$t \to X(t, \omega_0)$$

- **Asimismo, fijado $t=t_0$, obtenemos una de las variables aleatorias de la familia:**

$$X(t_0, \cdot) : \Omega \to \Re$$

$$\omega \to X(t_0, \omega)$$

- **El espacio de estados S de un proceso estocástico es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar dicho proceso:**

$$S = \{X_t(\omega) \mid t \in T \wedge \omega \in \Omega\}$$

Ejemplo de proceso estocástico discreto:

- Lanzamos una moneda al aire 6 veces. El jugador gana \$1 cada vez que sale cara (C), y pierde \$1 cada vez que sale cruz (F).
- X_i = estado de cuentas del jugador después de la *i*- ésima jugada
- La familia de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ constituye un proceso estocástico

Solución:

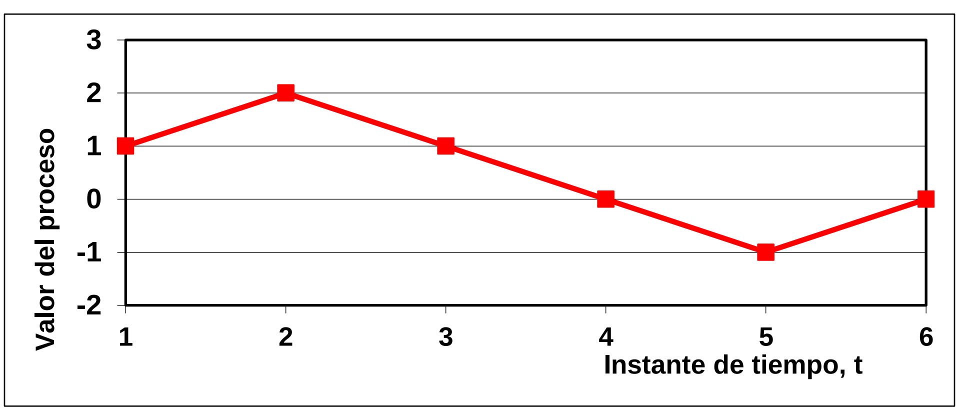
- Ω={CCCCCC,CCCCCF,…,FFFFFF} conjunto de sucesos posibles
- cardinal(Ω) = 2^6 = 64 Total de sucesos
- ω suceso del conjunto Ω
- $P(\omega)=1/64 \quad \forall\ \omega\in\Omega$ La probabilidad de que ocurra cada suceso
- T={1, 2, 3, 4, 5, 6} Conjuntos de Tiempos t
- S={–6, –5, …, –1, 0, 1, 2, …, 5, 6} Espacio de probabilidad
- $X_1(\Omega)=\{-1, 1\}$ Valores posible de la Variable Aleatoria X_1
- $X_2(\Omega)=\{-2, 0, 2\}$ Valores posible de la Variable Aleatoria X_2
- $X_3(\Omega)=\{-3,-1, 1,3\}$ Valores posible de la Variable Aleatoria X_3
- $X_4(\Omega)=\{-4,-2, 0,2,4\}$ Valores posible de la Variable Aleatoria X_4
- $X_5(\Omega)=\{-5,-3-1, 1,3,5\}$ Valores posible de la Variable Aleatoria X_5
- $X_6(\Omega)=\{-6,-4,-2,0, 2,4,6\}$ Valores posible de la Variable Aleatoria X_6

Si fijo ω, por ejemplo ω_0=CCFFFC (un suceso particular), obtengo una secuencia de valores completamente determinista:

$X_1(\omega_0)=1$ $X_2(\omega_0)=2$ $X_3(\omega_0)=1$

$X_4(\omega_0)=0$ $X_5(\omega_0)= -1$ $X_6(\omega_0)= 0$

- Puedo dibujar con estos valores la *trayectoria del proceso*:



Si fijo t, por ejemplo t_0=3, obtengo una de las variables aleatorias del proceso:

$$X_3 : \Omega \to \Re \qquad\qquad \omega \to X_3(\omega)$$

Los posibles valores que puede tomar el proceso en t_0=3 son: $X_3(\Omega)=\{-3, -1, 1, 3\}$

Podemos hallar la probabilidad de que el proceso tome uno de estos valores:

$$\mathrm{P}[\mathrm{X}_3(\omega)=1]=\mathrm{P}[\mathrm{CFC}]+\mathrm{P}[\mathrm{CCF}]+\mathrm{P}[\mathrm{FCC}]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X}_3(\omega)=3]=\mathrm{P}[\mathrm{CCC}]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X}_3(\omega)=-1]=\mathrm{P}[\mathrm{FCF}]+\mathrm{P}[\mathrm{FFC}]+\mathrm{P}[\mathrm{CFF}]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{X}_3(\omega)=-3]=\mathrm{P}[\mathrm{FFF}]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Def.: Cadena de Markov

Las cadenas de Markov a tiempo discreto son modelos probabilísticos (estocásticos) que se usan para predecir la evolución y el comportamiento a corto y a largo plazo de determinados sistemas.

Ejemplos: reparto del mercado entre marcas; dinámica de las averías de máquinas para decidir política de mantenimiento; evolución de una enfermedad,…

- Una Cadena de Markov (CM) es:
    - Un proceso estocástico
    - Con un número finito de estados (M)
    - Con probabilidades de transición estacionarias
    - Que tiene la propiedad Markoviana

  Propiedad Markoviano:

- Conocido el estado del proceso en un momento dado, su comportamiento futuro no depende del pasado. Dicho de otro modo, “dado el presente, el futuro es independiente del pasado”

- Sólo estudiaremos las cadenas de Markov, con lo cual tendremos espacios de estados S discretos y conjuntos de instantes de tiempo T también discretos, $T=\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$

- Las CM están completamente caracterizadas por las probabilidades de transición en una etapa.

$$P\left[X_{t+1}=j \middle/ X_t=i\right], \quad i, j \in S, t \in T$$

- Sólo trabajaremos con CM homogéneas en el tiempo, que son aquellas en las que

$$\forall i, j \in S \ \forall\, t \in T,\ P\left[X_{t+1}=j \middle/ X_t=i\right]=q_{ij}$$

  donde q_{ij} se llama probabilidad de transición en una etapa desde el estado i hasta el estado j

Matriz de transición: Los q_{ij} se agrupan en la denominada matriz de transición de la CM:

$$Q=\begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}=\left(q_{ij}\right)_{i,j\in S}$$

Propiedades de la matriz de transición:

1. Por ser los q_{ij} probabilidades

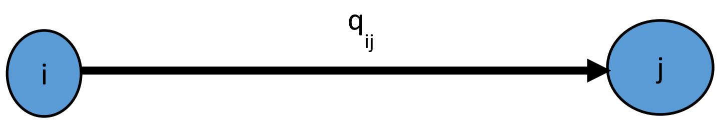
$$\forall i, j \in S, \quad q_{ij} \in [0,1]$$

$$\forall i \in S, \quad \sum_{j\in S} q_{ij}=1$$

2. Por ser 1 la probabilidad del suceso seguro, cada fila ha de sumar 1, es decir,
3. Una matriz que cumpla estas dos propiedades se llama matriz estocástica

Diagrama de transición de estados (DTE)

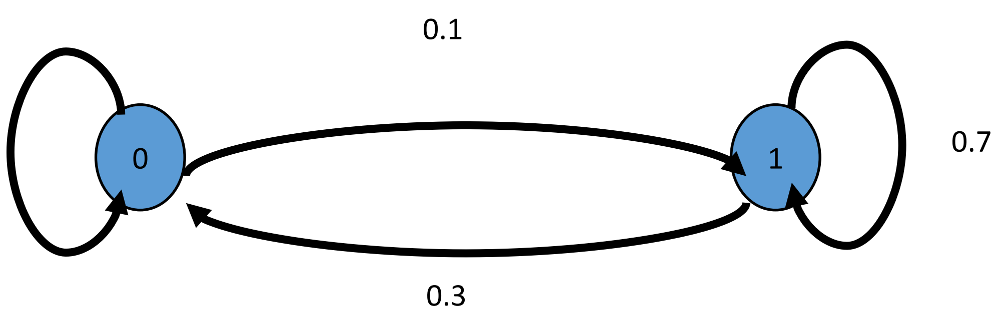
El diagrama de transición de estados (DTE) de una CM es un grafo dirigido cuyos nodos son los estados de la CM y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es nula, no se pone arco.



Ejemplo: línea telefónica:

Sea una línea telefónica de estados ocupado=1 y desocupado=0. Si en el instante t+1 está ocupada, en el instante t+1 estará ocupada con probabilidad 0.7 y desocupada con probabilidad 0.3. Si en el instante t está desocupada con probabilidad 0.9, en el t+1 estará ocupada con probabilidad 0.1.

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

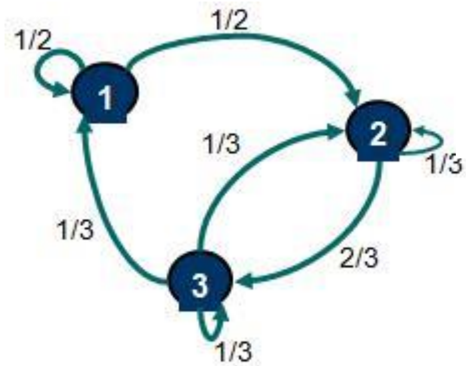


Tipos de estados y Cadenas de Markov

Podemos considerar $f_{ij}^{(n)}$ para (n=1,2,..) como la función de probabilidad de la variable aleatoria tiempo de primera pasada

Para la clasificación de estados de una Cadena de Markov en tiempo discreto utilizaremos 2 ejemplos:

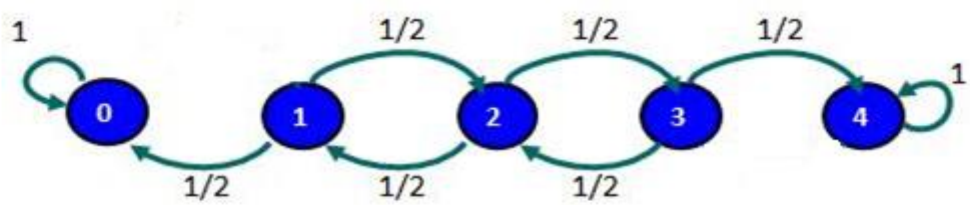
Ejemplo 1:



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	0	0	0	0
1	1/2	0	1/2	0	0
2	0	1/2	0	1/2	0
3	0	0	1/2	0	1/2
4	0	0	0	0	1

Ejemplo 2:



Si existe una probabilidad no nula que comenzando en un estado i se pueda llegar a un estado j al cabo de un cierto número de etapas (digamos n) se afirma que el estado j es **accesible** desde el estado i. Si consideramos el ejemplo 1 podemos afirmar que el estado 3 es accesible desde el estado 1. Aun cuando en una etapa no podemos llegar desde el estado 1 al estado 3, si podemos hacerlo al cabo de 2, 3, ..., n etapas. Cabe destacar en este punto que es relevante que exista una probabilidad no nula que comenzando en 1 se pueda llegar a 3 al cabo de un cierto número de etapas, no importando el valor exacto de esta probabilidad para un n cualquiera. En cuanto al ejemplo 2, se puede verificar que el estado 2 es accesible desde el estado 3, sin embargo, el estado 2 no es accesible desde el estado 4 (esto porque una vez que se llega al estado 4 no se sale de ese estado). Finalmente, **dos estados que son accesibles y viceversa se dice que se comunican y que pertenecen a una misma clase de estados**.

Una Cadena de Markov donde todos sus estados son accesibles entre sí y por tanto se comunican se dice que es **irreducible**, es decir, que existe una **única clase de estados**. Este es el caso del ejemplo 1.

En cambio sí al menos existen 2 clases de estados la cadena ya no es irreducible. Si tenemos **2 estados que no se comunican** (esto porque no son accesibles y viceversa) estos estados **pertenecerán a distintas clases de estados**. En el ejemplo 2 existen dos clases de estados {1,2,3}, {0, 4} (en consecuencia no es una cadena irreducible). En cuanto al estado 1,2 y 3 son **transitorios** y en el caso de los estados 0 y 4, son **absorbentes** debido a que una vez que se accede a él la probabilidad de seguir en ese estado es de un 100%. Un estado absorbente define una clase de estados por sí mismo.

Una definición adicional es la periodicidad de un estado. Un estado se dice que tiene periodo d, para el mayor valor entero de d que cumpla:

$$p_{ii}^{(n)} = \mathrm{IP}(X_n = i / X_0 = i) > 0$$

Sólo para valores de n pertenecientes al conjunto {d, 2d, 3d, ...}. Si d=1 decimos que el estado es **aperiódico**. En otras palabras, un estado es **periódico** si, partiendo de ese estado, sólo es posible volver a él en un número de etapas que sea múltiplo de un cierto número entero mayor que uno

En el ejemplo 1 todos los estados son aperiódicos. En el ejemplo 2 los estados 1, 2 y 3 son periódicos con periodo d=2, es decir, que comenzando, por ejemplo, en el estado 1, la probabilidad de volver al mismo estado es sólo no nula para una cierta cantidad de pasos o etapas múltiplo de 2.

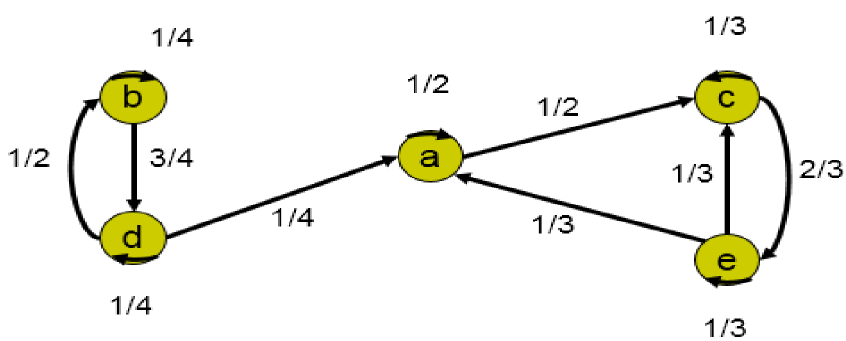
Un estado es **recurrente** en la medida que comenzando en él se tenga la certeza de volver en algún momento del tiempo (una determinada cantidad de etapas) sobre sí mismo. Alternativamente, un estado es **transitorio** si no se tiene la certeza de volver sobre sí mismo. En el ejemplo 1 todos los estados son recurrentes. En el ejemplo 2 los estados 0,1, 2 y 3 son transitorios debido a que si se comienza en cualquiera de ellos no se puede asegurar con certeza que se volverá al mismo estado en algún momento (esto debido a que existe una probabilidad no nula de acceder a un estado absorbente: 4. Los estados absorbentes por definición son estados recurrentes.

Si tenemos una Cadena de Markov que tiene una cantidad finita de estados e identificamos un estado recurrente, este será **recurrente positivo**. Si la cantidad de estados es infinito entonces un estado recurrente será **recurrente nulo**.

- Sea *X* una CM finita. Diremos que *X* es Ergódica si es irreducible, recurrente y aperiódica.
- **Ejemplo:** Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e}:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- 1º Dibujar el DTE:

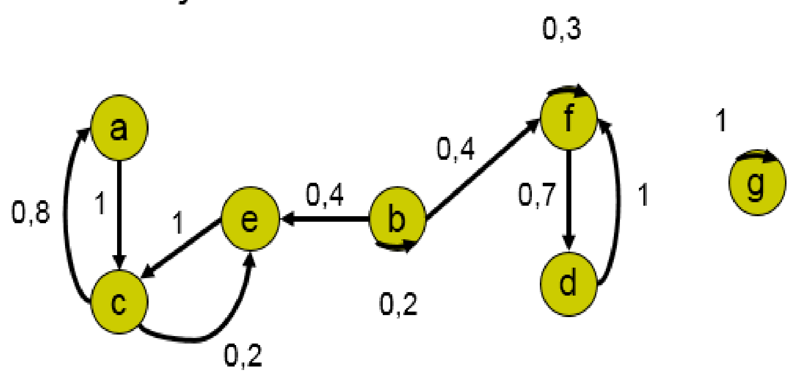


- 2º Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, e
  - Transitorios: b, d
  - Periódicos: ninguno
  - Absorbentes: ninguno

Ejemplo: Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e, f, g}:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1º Dibujar el DTE:



Recurrentes: **a, c, e , d, f**

Transitorios: b

Absorbente: g

Ejemplo

La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 0 y 4 son absorbentes, y por lo tanto son recurrentes. Veamos que los otros estados, 1, 2 y 3, son transitorios.

Si estamos en 1 y la cadena pasa a 0, nunca regresará a 1, de modo que la probabilidad de nunca regresar a 1 es

---

Ejemplo

Determine cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios para la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

La siguiente gráfica presenta las transiciones posibles (en un paso) entre estados diferentes para esta cadena

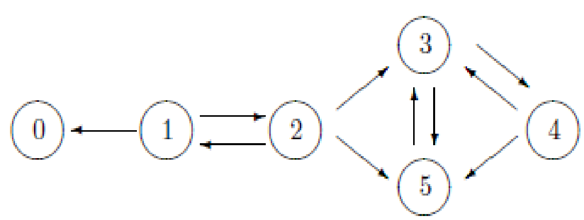


Figura 2.2

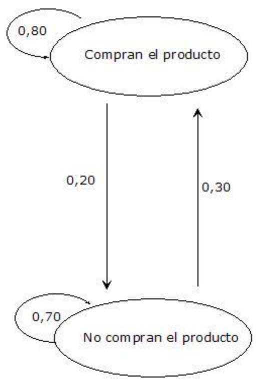
Vemos que hay tres clases de equivalencia $\{0\}$; $\{1,2\}$ y $\{3,4,5\}$. La primera clase es recurrente porque 0 es un estado absorbente. La clase $\{1,2\}$ es transitoria porque es posible salir de ella y no regresar nunca, por ejemplo, pasando de 1 a 0. Finalmente, la tercera clase es recurrente. ▲

I. El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?

Solución:

Para resolver este tipo de problemas, lo primero es hacer un esquema.

A la vista del esquema podemos pasar a construir la matriz de probabilidades de transición:



Del 100% de clientes que compra en un mes un producto el 20% no compra el mes siguiente, o sea el 80% lo sigue comprando el siguiente mes.

Del 100% de clientes que quienes no lo compran en un mes, solo el 30% lo adquieren el mes siguiente. O sea el 70% no lo compran el siguiente mes.

Cálculo: con esa información construimos la matriz 2x2. $P^{(0)}$ representa la situación

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

inicial.

$$(C,\ \mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 100 & 900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (350{,}650)$$

El primer mes comprarán C=350 y no comprarán N=650

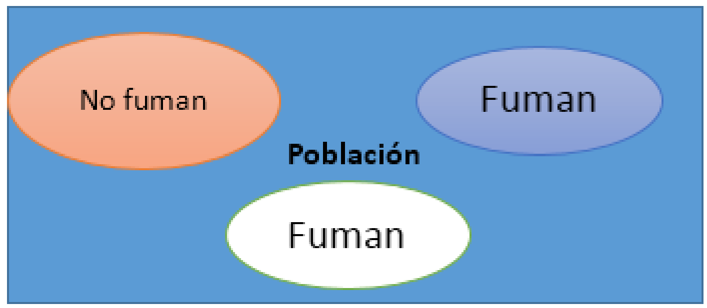
$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$$

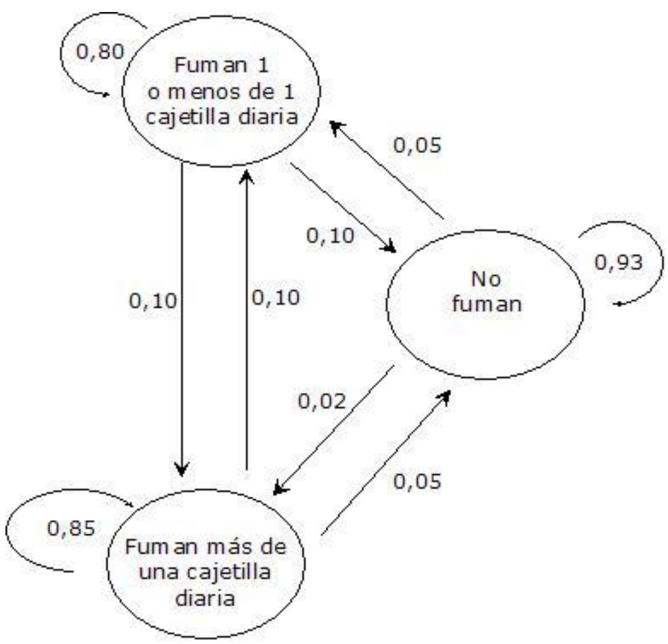
$$(C,\ \mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 100 & 900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} = (475{,}525)$$

El segundo mes comprarán C=475 y no comprarán N= 525

II. En una población de 10,000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5% de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario, o menos, y un 2% de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete, o menos, hay un 10% de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10% de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5% de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10% de que pasen a fumar un paquete, o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?

Solución:





$P^{(1)} =$

	0	**1**	**2**
0	0.93	0.05	0.02
1	0.10	0.80	0.10
2	0.05	0.10	0.85

NF= No fuman
FC= fuman uno o menos de un paquete diarios
FCC= fuman más de un paquete diario.

$$(NF, FC, \text{FCC}) = \begin{pmatrix}5000 & 2500 & 2500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.93 & 0.05 & 0.02\\ 0.10 & 0.80 & 0.10\\ 0.05 & 0.10 & 0.80\end{pmatrix} = (5025, 2500, 2475)$$

Después de un mes habrán NF=5025, FC=2500, FCC=2475

III. Una urna contiene dos bolas sin pintar. Se selecciona una bola al azar y se lanza una moneda. Si la bola elegida no está pintada y la moneda produce cara, pintamos la bola de rojo; si la moneda produce cruz, la pintamos de negro. Si la bola ya está pintada, entonces cambiamos el color de la bola de rojo a negro o de negro a rojo, independientemente de si la moneda produce cara o cruz.

a) Modele el problema como una cadena de Markov y encuentre la matriz de probabilidades de transición.

Solución:

a) Identificando estados:

Vamos a utilizar vectores con el siguiente formato: [S R N] donde S es el número de bolas sin pintar, R el número de bolas rojas y N el número de bolas negras que hay en la urna.

E0: [0 1 1] Una bola roja y una negra.
E1: [0 2 0] Dos bolas rojas.
E2: [0 0 2] Dos bolas negras.
E3: [2 0 0] Inicialmente, cuando las dos bolas están sin pintar.
E4: [1 1 0] Una bola pintada de rojo.
E5: [1 0 1] Una bola pintada de negro.

Probabilidades de transición:

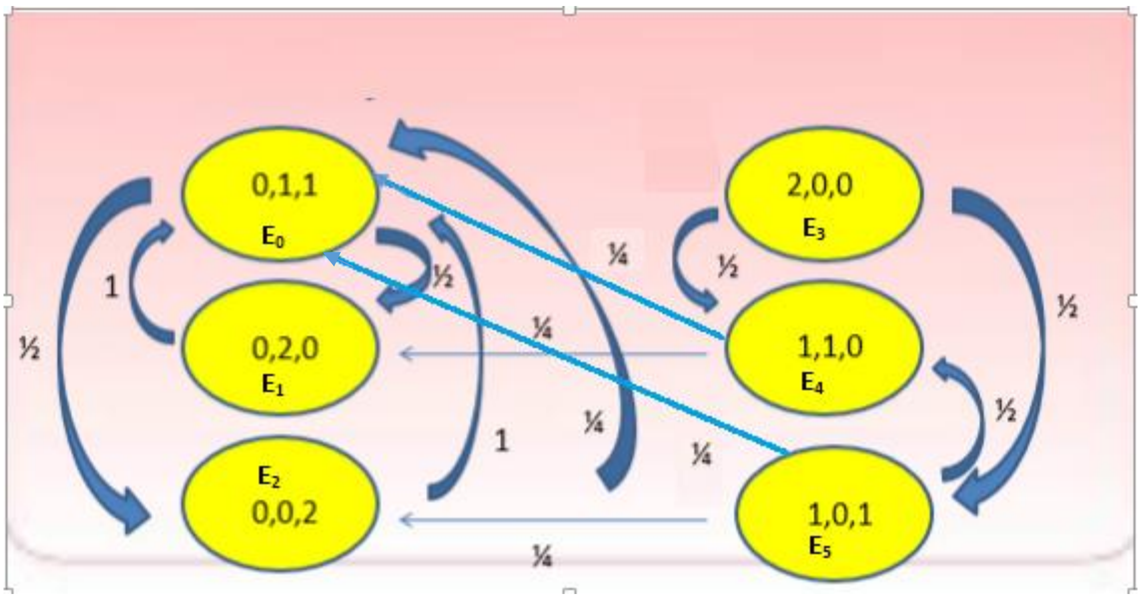
Como el estado de la urna después del siguiente lanzamiento de la moneda depende solo del pasado del proceso hasta el estado de la urna después del lanzamiento actual, se trata de una cadena de Markov. Como las reglas no varían a través del tiempo, tenemos una cadena estacionaria de Markov. La matriz de transición es la siguiente:

Cálculos de las probabilidades de transición si el estado actual es (1 1 0):

EVENTO	PROBABILIDAD	ESTADO NUEVO
Sacar cara en el lanzamiento y escoger una bola sin pintar	¼	(0 2 0)
Escoger bola roja	½	(1 0 1)
Sacar cruz en el lanzamiento y escoger una bola sin pintar	¼	(0 1 1)

Para ver cómo se forma la matriz de transición, determinamos la fila (1 1 0)

Si el estado actual (1 1 0), entonces debe suceder uno de los eventos que aparecen en la tabla anterior. Así, el siguiente estado será (1 0 1) con la probabilidad ½; (0 2 0) con probabilidad ¼ y (0 1 1) con probabilidad ¼. En la siguiente imagen se da la representación



gráfica de esta matriz de transición.

$$E_0 \quad E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5$$

$$
= \begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0
\end{bmatrix}
$$

IV. En un pueblo, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen días nublados. Con esta información modelar el clima del pueblo como una cadena de Markov.

SOLUCIÓN:

Se trata de una cadena de Markov con dos estados {Soleado, Nublado} que para abreviar representaremos por {S, N}, siendo la matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

V. El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena
b) Dibujar el gráfico asociado.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos.

SOLUCIÓN:

a) Los estados de la cadena los denotaremos por {0, 1, 2} haciendo corresponder el 0 al bajo y 1 y 2 al primer y segundo piso respectivamente. Las probabilidades de transición son:

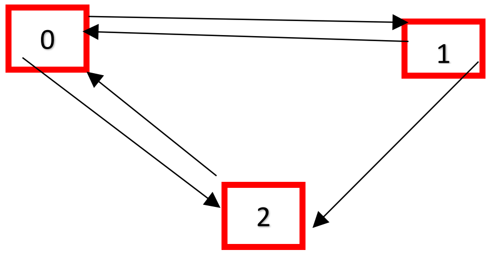
P_{00}= $P(R_n=0/R_{n-1}=0)$, esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta baja si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es 0, porque se supone que de etapa a etapa el ascensor se mueve.

P_{01}= $P(R_n=1/R_{n-1}=0)$, esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta primera si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es ½. Basta leer el enunciado .Y así sucesivamente vamos obteniendo las distintas probabilidades de

$$P = \begin{pmatrix} p00 & p01 & p02 \\ p10 & p11 & p12 \\ p20 & p21 & p22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

transición cuya matriz es:

b)



b) $\overrightarrow{q} \cdot P = \overrightarrow{q}$ siendo q = (x,y,z) los valores de las probabilidades pedidas, añadiendo la ecuación x+ y+ z = 1

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$$, añadiendo x + y + z = 1. Produce el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 4z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son x=8/17 ; y=4/17; z=5/17

VI. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.

a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

SOLUCIÓN:

a) La matriz de transición P es la siguiente para el orden A, B, C.

$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$ El inciso a) consiste en averiguar el término P^4_{33}, es decir el

término que ocupa la tercera fila y la tercer columna de la matriz P^4, lo cual se obtiene con la fila 3 y columna 3 de P^2, cuyos valores son.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{100} & \frac{33}{100} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{17}{50} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & \frac{13}{25} \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^2 * P^2 = \begin{bmatrix} \frac{19}{100} & \frac{33}{100} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{17}{50} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & \frac{13}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{19}{100} & \frac{33}{100} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{17}{50} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & \frac{13}{25} \end{bmatrix}$$

P^4= 9/50 * 12/25 + 3/10*12/25 + 13/25*13/25 =0.0864+0.1440+0.2704=**0.5008**

b) Nos piden las probabilidades estacionarias. Para ello hay que resolver el Siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.20 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}; \; x + y + z = 1$$

Desarrollando resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -9x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 8y + 4z = 0 \\ 6x + 6y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Elimino *y* en las dos primeras: -33x+12z = 0, y elimino y

en las dos últimas: 12z=6 ; de ambas se deduce que: **x** =2/11=0.1818; **y** = 7/22 =0.3181; **z** = 0.5. En porcentajes serían el 18.18% para la ciudad A, el 31.81 para B y el 50% para la ciudad C.

VII. Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90% de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80% de que repita la vez siguiente. Se pide:

a) Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy?
b) Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?
c) Supongamos que el 60% de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40% Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?.

SOLUCIÓN:

La situación se puede modelar como una cadena de Markov con dos estados {Coca-Cola, Pepsi-Cola}= {C, P}. La matriz de transición para el orden C,P, es:

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a) Se pide la probabilidad de transición en dos pasos, es decir que se pide el valor en fila 2, columna 1 para la matriz P^2, obteniéndose que este es : 0.2.0.9 + 0.8.0.2 =**0.34**

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

b) Al igual que en el apartado anterior se pide el valor de probabilidad de transición en fila 1 y columna 1 para la matriz P^3. La matriz es:

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix}0.9 & 0.1\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.83 & 0.17\\ 0.34 & 0.66\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.781 & 0.219\\ 0.438 & 0.562\end{pmatrix}$$

La solución **0.781** de que una persona que consume Coca cola pasada tres compra consuma Coca cola.

c) El vector de probabilidad inicial es (0.6, 0.4), por tanto la probabilidad de consumir ambos estados a partir de tres etapas es:

$$\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\end{pmatrix}P^{(3)}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.781 & 0.219\\ 0.438 & 0.562\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6438 & 0.3562\end{pmatrix}$$

esto es que al cabo de tres compras el 64.38% comprará Coca Cola y el 35.62% comprará Pepsi Cola.

d) El estado estable se determina resolviendo el sistema de ecuaciones:

$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.9 & 0.1\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ Añadiendo la ecuación x + y =1 siendo x la probabilidad de que una persona compre Coca Cola a largo plazo y lo mismo de que compre Pepsi Cola.

$\begin{cases}-x+2y=0\\ x-2y=0\\ x+y=1\end{cases}$ Observe que las dos primeras ecuaciones son iguales, por lo que trabaremos con las dos últimas, resultando x=2/3; y= 1/3

VIII. La cervecería más importante del mundo (Guiness) ha contratado a un analista de investigación de operaciones para analizar su posición en el mercado. Están preocupados en especial por su mayor competidor (Heineken). El analista piensa que el cambio de marca se puede modelar como una cadena de Markov incluyendo tres estados, los estados G y H representan a los clientes que beben cerveza producida por las mencionadas cervecerías y el estado I representa todas las demás marcas. Los datos se toman cada mes y el analista ha construido la siguiente matriz de transición de los datos históricos.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{G} & \text{H} & \text{I}\end{array}\\ \begin{array}{c}G\\ H\\ I\end{array} & \begin{pmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.75 & 0.05\\ 0.1 & 0.1 & 0.8\end{pmatrix}\end{array}$$

¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos cervecerías grandes?

SOLUCIÓN:

Tres estados {G, H, I}. El problema consiste en resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$(x, y, z).P = (x, y, z)$; $x + y + z = 1$, siendo x la probabilidad de que el consumidor compre G, y de que el consumidor compre H y z la del que consumidor compre I.

De ambas expresiones se obtiene el siguiente sistema:

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.75 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} = (x \;\; y \;\; z) \text{ ; x + y + z =1}$$

Resolviendo la matriz resulta:

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ 20x - 25y + 10z = 0 \\ 10x + 5y - 20z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Cuya solución es: x=9/16; y=10/26; z=7/26

IX. En una comunidad hay 3 supermercados (S1, S2, S3) existe la movilidad de un cliente de uno a otro. El 1 de septiembre, ¼ de los clientes va al S1, 1/3 al S2 y 5/12 al S3 de un total de 10.000 personas. Cada mes el S1 retiene el 90% de sus clientes y pierde el 10% que se va al S2. Se averiguó que el S2 solo retiene el 5% y pierde el 85% que va a S1 y el resto se va a S3, el S3 retiene solo el 40%, pierde el 50% que va al S1 y el 10% va al S2.

a. Establecer la matriz de transición
b. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?
c. Hallar el vector de probabilidad estable.

Solución:

a) La matriz de transición para el orden S1, S2, S3 es:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

b) Para el mes de noviembre (han transcurrido 2 meses desde 1 de septiembre), la proporción de clientes es

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.010 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.010 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{pmatrix} = (0.816 \quad 0.096 \quad 0.088)$$

La proporción es del 81.6% para S1, 9.6% para S2 y 8.8% para S3

c) El vector de probabilidad estable se obtiene resolviendo:

$(x, y, z).P = (x, y, z)$; $x + y + z = 1$

El sistema resultante es:

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$$

$$\begin{cases} -10x + 85y + 50z = 0 \\ 10x - 95y + 10z = 0 \\ y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

de donde y = 2/31, z =1/93; x = 86/93

X. Consumidores de café en el área de Pontevedra usan tres marcas A, B, C. En marzo de 1995 se hizo una encuesta en la que se entrevistó a las 8450 personas que compran café y los resultados fueron:

Compra en el siguiente mes

Compra actual	Marca A	Marca B	Marca C	TOTALES
Marca A = 1690	507	845	338	1690
Marca B = 3380	676	2028	676	3380
Marca C = 3380	845	845	1690	3380
TOTALES	2028	3718	2704	**8450**

a) Si las compras se hacen mensualmente, ¿cuál será la distribución del mercado de café en Pontevedra en el mes de junio?
b) A la larga, ¿cómo se distribuirán los clientes de café?
c) En junio, cual es la proporción de clientes leales a sus marcas de café?

SOLUCIÓN:

a) Con las frecuencias anteriores calculamos las probabilidades de transición, conservando el mismo orden que la tabla (A,B,C) es:

$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$ De marzo a junio hay 4 meses, por lo que debemos obtener la matriz de transición P^4.

$$P^2=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24 & 0.5 & 0.26 \\ 0.23 & 0.51 & 0.27 \\ 0.25 & 0.40 & 0.35 \end{pmatrix}$$

$$P^4=\begin{pmatrix} 0.24 & 0.5 & 0.26 \\ 0.23 & 0.51 & 0.27 \\ 0.25 & 0.40 & 0.35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.24 & 0.5 & 0.26 \\ 0.23 & 0.51 & 0.27 \\ 0.25 & 0.40 & 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2376 & 0.4790 & 0.2834 \\ 0.2375 & 0.4791 & 0.2834 \\ 0.2395 & 0.469 & 0.2915 \end{pmatrix} \leftarrow \textbf{Junio}$$

b) A la larga se trata de la situación estable:

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z);\ x + y + z = 1$$

$$\begin{cases} -7x + 2y + 2.5z = 0 \\ 5x - 4y + 2.5z = 0 \\ 2x + 2y - 5z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene x = 5/21,

y=10/21, z =6/21.

c) En Marzo la proporción de clientes de A es: 2028/8450 = 0.24; para B es 3718/8450 = 0.44 y para C es 2704/8450 = 0.32. En el mes de junio la proporción es:

$$(0.34 \quad 0.44 \quad 0.32)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.24 \quad 0.464 \quad 0.296)$$

Es decir 24% para A,   46.4% para B y 29.6% para C.