



# UNIVERSIDAD DE MANAGUA

*Al más alto nivel*

## Investigación de Operaciones

### Encuentro #3

## Tema: Optimización de Redes: El problema del árbol de expansión mínima y el problema de costo mínimo



Prof.: MSc. Julio Rito Vargas A.

Grupos: Ingeniería /IC-2018

### Objetivos:

- Reafirmar conocimientos del problema del flujo máximo entre un nodo fuente y un nodo destino, los que están enlazados a través de una red, con arcos con capacidad finita.
- Reconocer las propiedades del problema de flujo de costo mínimo.
- Aplicar el algoritmo de **KRUSKAL** para unir todos los nodos de una red, tal que minimice la suma de las longitudes de los ramales escogidos. Sin incluir ciclos en la solución del problema.

### EL PROBLEMA DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MINIMA: ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA

Este problema surge cuando todos los nodos de una red deben conectarse entre ellos.

El árbol de expansión mínima es apropiado para problemas en los cuales la redundancia es expansiva, el flujo a lo largo de los arcos se considera instantáneo. Este problema se refiere a utilizar las ramas o arcos de la red para llegar a todos los nodos de la red, de manera tal que se minimiza la longitud total.

La aplicación de estos problemas de optimización se ubica en las redes de comunicación eléctrica, telefónica, carretera, distribución de bienes, ferroviaria, aérea, marítima, etc.; donde los nodos representan puntos de consumo eléctrico, teléfonos, aeropuertos, computadoras.

Si  $n$  = número de nodos, entonces la solución óptima debe incluir  $n-1$  arco

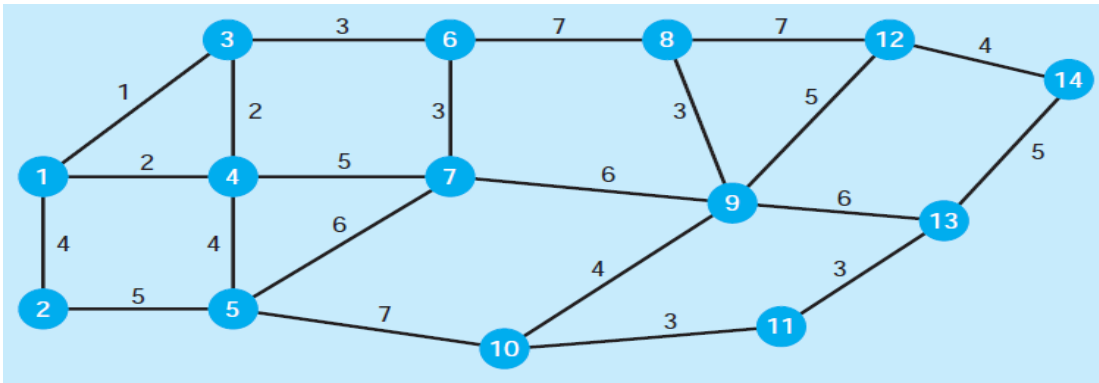
### ALGORITMO DE KRUSKAL

1. Comenzar en forma arbitraria en cualquier nodo y conectarlo con el más próximo (menor distancia o menor costo).
2. Identificar el nodo no conectado que está más cerca o el menos costoso de algunos de los nodos conectados. Deshacer los empates de forma arbitraria. Agregar éste nodo al conjunto de nodos conectados.

3. Repetir esto hasta que hayan conectados todos los nodos.

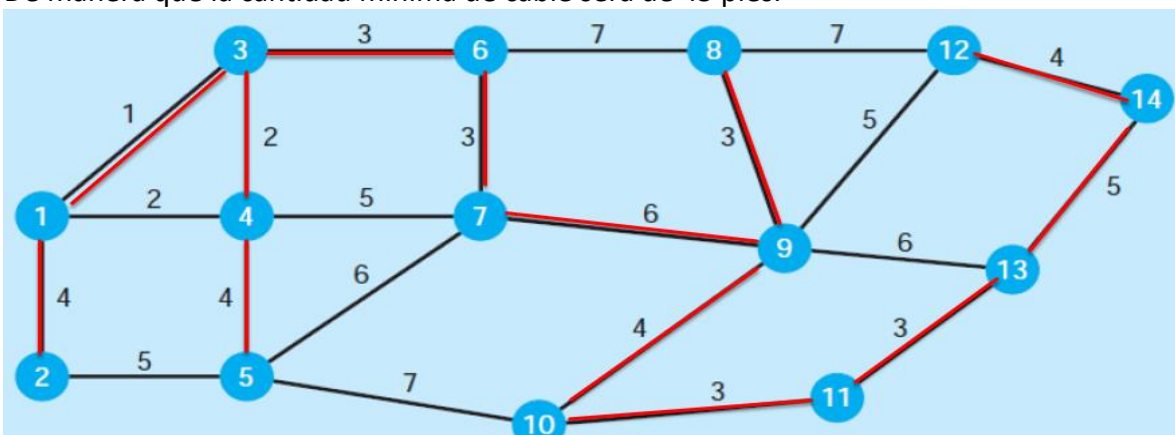
Ejemplo 1:

La urbanizadora SOVIPE está en proceso de instalar líneas de energía eléctrica en un desarrollo habitacional grande. El gerente quiere minimizar la longitud total de cable, lo cual minimizará sus costos. El desarrollo habitacional se muestra en la red que se muestra. Cada casa se numeró y las distancias entre ellas se dan en cientos de pies. ¿Qué le recomienda?



De acuerdo al algoritmo de Kruskal, conectamos las dos casas más cercanas de la urbanización siendo estas la 1 y la 3 que están a 100 pies, a partir de las dos casas conectadas observamos cuales están más cercanas de ellas y observamos que la casa 4 está a 200 pies de la casa 1 y de la casa 3 por lo que se puede conectar por cualquiera de ellas y lo hacemos con la casa 3. Ahora ya tenemos tres casas conectadas y la más cercana a ellas es la casa 6 que está a 300 pies de la casa 3 y la conectamos, de la misma manera procedemos con las casas resaltante hasta conectarlas todas, tomando en cuenta que no se nos forme bucle o loop.

De manera que la cantidad mínima de cable será de 45 pies.



### ACTIVIDAD EN CLASE:

Un banco ha decidido conectar terminales de computadora de cada sucursal a la computadora central de su oficina matriz mediante líneas telefónicas especiales con dispositivos de telecomunicaciones. No es necesario que la línea telefónica de una sucursal esté conectada directamente con la oficina matriz. La conexión puede ser indirecta a través de otra sucursal que esté conectada (directa o indirectamente) a la matriz. El único requisito es que exista alguna ruta que conecte a todas las sucursales con la oficina matriz. El cargo por las líneas telefónicas especiales es directamente proporcional a la distancia cableada, donde la distancia (en millas) entre cada par de oficinas es:

	Distancia entre pares de oficinas					
	Principal	S.1	S.2	S.3	S.4	S.5
Oficina principal	—	190	70	115	270	160
Sucursal 1	190	—	100	110	215	50
Sucursal 2	70	100	—	140	120	220
Sucursal 3	115	110	140	—	175	80
Sucursal 4	270	215	120	175	—	310
Sucursal 5	160	50	220	80	310	—

La administración desea determinar qué pares de sucursales conectar directamente con las líneas telefónicas especiales para que todas queden conectadas (de modo directo o indirecto) a la oficina matriz con un costo total mínimo.

Explique cómo se ajusta este problema a la descripción del problema del árbol de expansión mínima y resuélvalo.

### EL PROBLEMA DEL FLUJO DEL COSTO MÍNIMO

El objetivo del problema del costo mínimo es minimizar el costo total de enviar el suministro disponible a través de la red para satisfacer la demanda dada.

A continuación se describe las características del problema de del flujo de costo mínimo.

- ▶ La red es red dirigida y conexa
- ▶ Al menos uno de los nodos es un nodo fuente
- ▶ Al menos uno de los nodos es un nodo demanda.
- ▶ El resto de los nodos son nodos transbordo.
- ▶ Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección indicada por la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la capacidad del arco.(si el flujo puede ocurrir en ambas direcciones, debe representarse por un par de arcos con direcciones opuestas.

## Formulación del modelo matemático del problema del flujo de costo mínimo

$x_{ij}$  = número de unidades de flujo en el arco (i, j)

$c_{ij}$  = costo unitario de transportación en el arco (i, j)

$b_i$  = flujo neto en el nodo i (entrada - salida)

$L_{ij}$  = cota inferior de capacidad en el arco (i, j)

$U_{ij}$  = cota superior de capacidad en el arco (i, j)

$$\min \sum_{\text{todos los arcos}} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a \quad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i \quad \text{para cada nodo}$$

$$L_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij} \quad \text{para cada arco}$$

$b_i > 0$  si es un nodo origen

$b_i < 0$  si es un nodo destino

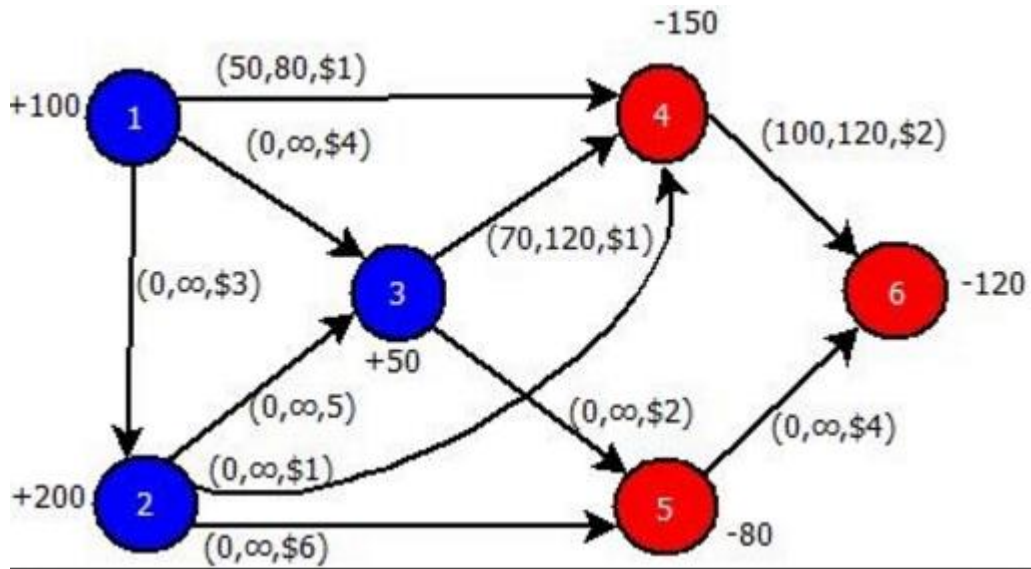
$b_i = 0$  si es un nodo de transbordo

Una condición necesaria para que el modelo tenga solución factible es que

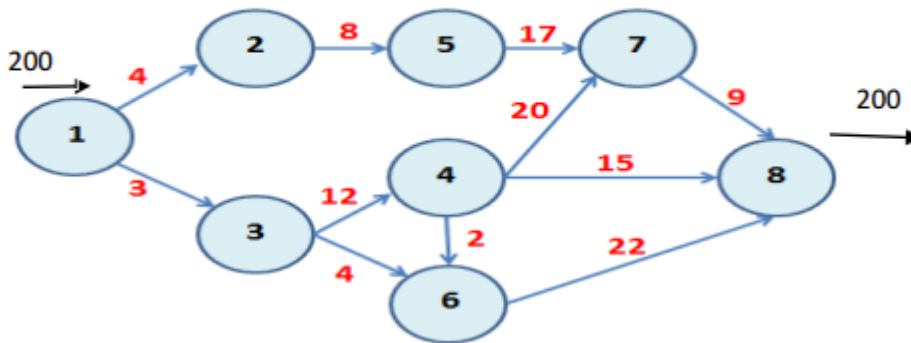
Tipo de aplicación	Nodos fuentes	Nodos de transbordo	Nodos demanda
Operación de una red de distribución	Fuentes de bienes	Almacenes intermedios	clientes
Administración de desechos sólidos	Fuentes de desechos sólidos	Instalaciones de procesamiento	Rellenos
Operación de una red de suministros	Agentes de ventas	Almacenes intermedios	Instalaciones de procesamiento
Coordinación de mezclas de productos en plantas	Plantas	Productos de un artículo específico	Mercado del producto específico

$\sum b_i = 0$ , es decir, que el flujo total generado en los nodos origen sea igual al flujo total absorbido por los nodos destino.

Ejemplo 1: Encuentre el flujo de costo mínimo en la red mostrada.



Ejemplo 2: En la siguiente red encuentra el costo del flujo de costo mínimo del nodo 1 al nodo 8, con apoyo de software. Los valores sobre los arcos son los costos, los arcos tienen capacidad ilimitada.



Resuelva los siguientes ejercicios en casa:

- Una empresa tiene dos fábricas (F1 y F2) y diariamente producen: 80 y 70 unidades respectivamente. Las que deben ser enviados a dos almacenes (A1 y A2) las que requieren 60 y 90 unidades respectivamente. Los envíos pueden hacerse directo de las fábricas a los almacenes o a través de un centro de distribución. Tal como se muestra en la tabla donde se detallan los costos por cada trayecto. El objetivo es minimizar los costos de envíos.

	Centro de distribución	Almacén 1	Almacén 2	Producción
Fábrica 1	\$300	\$700	-	80 unidades
Fábrica 2	\$400	-	\$900	70 unidades
Centro de distribución	-	\$200	\$400	-
Asignación	-	60 unidades	90 unidades	

### Red de distribución

Considerando que:

F1 = Fábrica 1; F2 = Fábrica 2; CD = Centro de distribución;

A1 = Almacén 1; A2 = Almacén 2

2. Una compañía integral que produce bienes y los vende en sus propias tiendas. Después de producidos los bienes se colocan en dos almacenes hasta que las tiendas los necesitan. Se usan camiones para transportar los bienes a los almacenes y luego a las tres tiendas. Utilice una carga completa de camión como unidad; la siguiente tabla muestra la producción mensual de cada planta, su costo de transporte por carga enviada a cada almacén y la cantidad máxima que se puede enviar al mes a cada uno.

A De	Costo unitario de envío		Capacidad de envío		Producción
	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 1	Almacén 2	
Planta 1	\$1 175	\$1 580	375	450	600
Planta 2	\$1 430	\$1 700	525	600	900

La siguiente tabla contiene la demanda mensual de cada tienda ( $T_i$ ), el costo de transporte por camión desde cada almacén y la cantidad máxima que se puede enviar al mes desde cada uno.

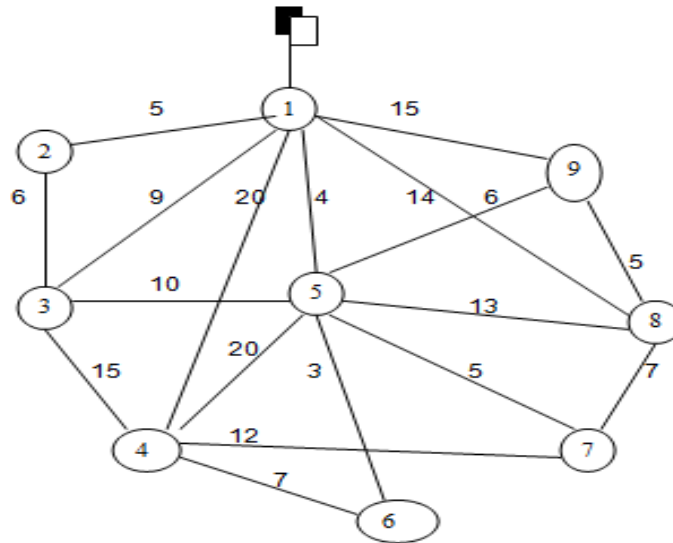
A De	Costo unitario de envío			Capacidad de envío		
	T1	T2	T3	T1	T2	T3
Almacén 1	\$1 370	\$1 505	\$1 490	300	450	300
Almacén 2	\$1 190	\$1 210	\$1 240	375	450	225
Demanda	450	600	450	450	600	450

La administración desea determinar un plan de distribución: número de cargas enviadas al mes de cada planta a cada almacén y de cada uno de éstos a cada tienda de modo que se minimice el costo total de transporte.

Formule este problema como uno de flujo de costo mínimo y coloque todos los datos necesarios.

**PROBLEMAS DE ÁRBOL DE EXPASION MÍNIMA:**

- Determine la red de tubería que enlaza todas las fuentes **al punto de reparto que minimizará la longitud total de los gaseoductos.**



- Una ciudad está planificando el desarrollo de una nueva línea en sistemas de tránsito. El sistema debe unir 5 Zonas poblacionales, Universidades y Centros comerciales. La Dirección de tránsito necesita seleccionar un conjunto de líneas que conecten todos los centros a un mínimo costo. La red seleccionada se debe diseñar al mínimo costo.

