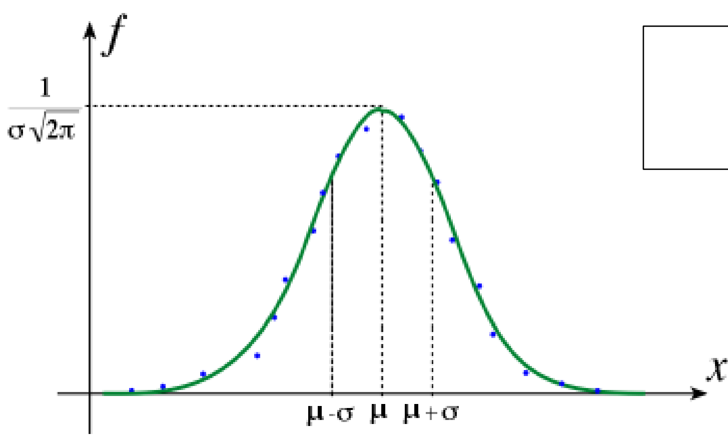
CURSO DE ESTADÍSTICA INFERENCIAL
EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE DISTRIBUCIÓN NORMAL

Prof.:MSc. Julio R. Vargas A.

La Distribución Normal:

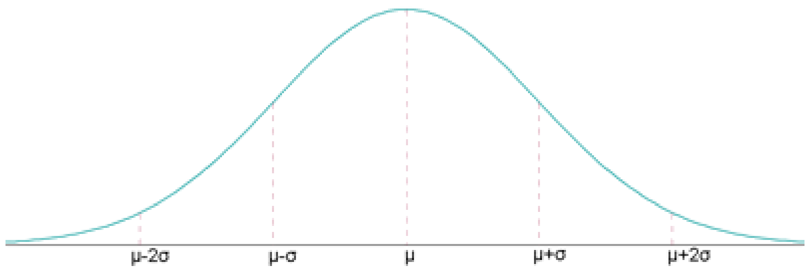
La distribución normal N (μ, σ): es un modelo matemático que rige muchos fenómenos. La experiencia demuestra que las distribuciones de la mayoría de las muestras tomadas en el campo de la industria se aproximan a la distribución normal si el tamaño de la muestra es grande. Esta distribución queda definida por dos parámetros: **la media μ** y **la desviación típica σ.** Se presenta mediante una curva simétrica conocida como **campana de Gauss**. Esta distribución nos da la probabilidad de que al elegir un valor, éste tenga una medida contenida en unos intervalos definidos. Esto permitirá predecir de forma aproximada, el comportamiento futuro de un proceso, conociendo los datos del presente.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- La distribución normal fue reconocida por primera vez por el francés Abraham de Moivre (1667-1754).
- Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) realizó estudios más a fondo donde formula la ecuación de la curva conocida comúnmente, como la "**Campana de Gauss**".

Una **distribución normal** de **media μ** y **desviación típica σ** se designa por **N(μ, σ)**. Su gráfica es la **campana de Gauss**:



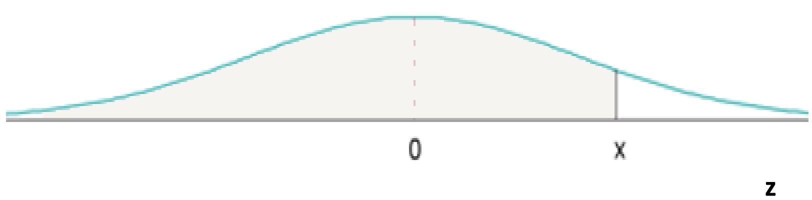
El área del recinto determinado por la función y el eje de abscisas **es igual a la unidad**.

Al ser **simétrica** respecto al eje que pasa por **x = μ**, deja un **área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha**.

La probabilidad equivale al área encerrada bajo la curva.

Distribución normal estándar N(0, 1)

La **distribución normal estándar, o tipificada o reducida,** es aquella que tiene por **media** el valor **cero(μ =0)**, y por **desviación típica uno (σ =1)**.



La probabilidad de la variable X dependerá del área del área sombreado en la figura. Y para calcularla utilizaremos una tabla adjunta)

Tipificación de la variable

Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable **X** que sigue una distribución **N(μ,σ)** en otra variable **Z** que siga una distribución **N(0, 1)**.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

La **tabla** nos da las **probabilidades de P(z ≤ k)**, siendo **z** la variable tipificada.

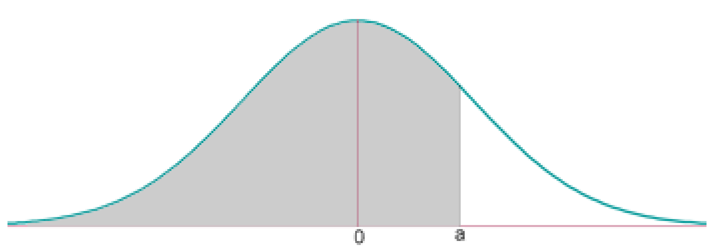
Estas probabilidades nos dan la **función de distribución Φ(k)**.

Φ(k) = P(z ≤ k)

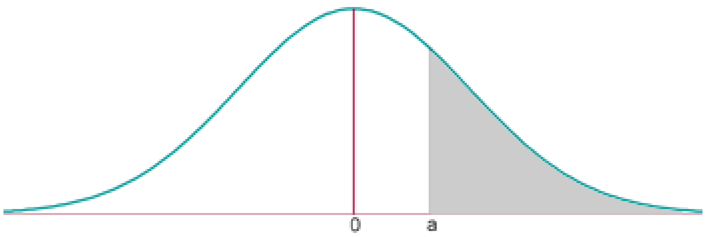
Búsqueda en la tabla de valor de k

Unidades y décimas en la columna de la izquierda y **Centésimas** en la fila de superior.

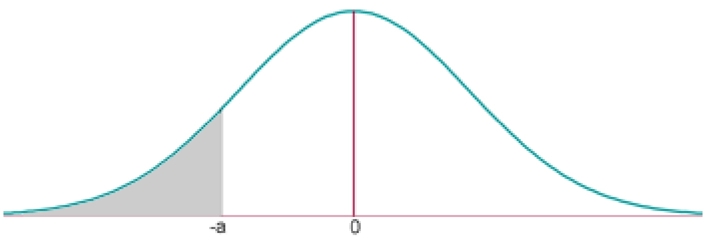
P(Z ≤ a)=1- P(Z > a)



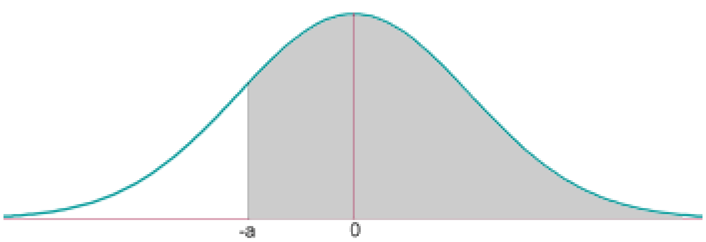
$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$



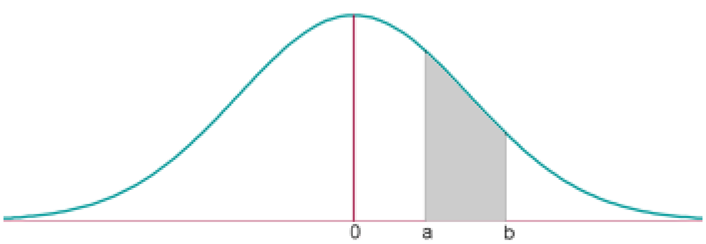
$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$



$P(Z > -a) = 1 - P(Z \leq -a)$

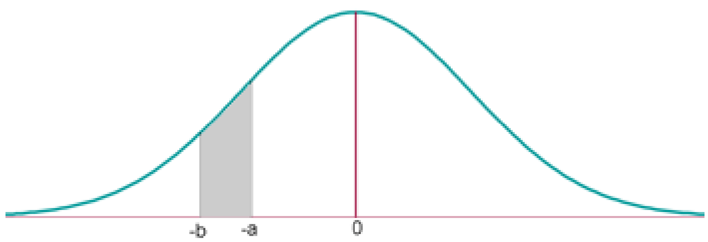


$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$

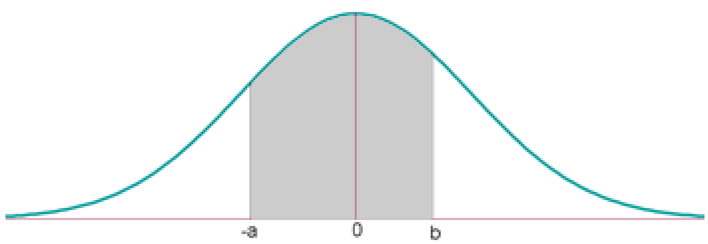


P(−b < Z ≤ −a) = P(a < Z ≤ b)

Nos encontramos con el caso inverso a los anteriores, conocemos el valor de la probabilidad y se trata de hallar el valor de la abscisa. Ahora tenemos que buscar en la tabla el **valor que más se aproxime a K**.



P(−a < Z ≤ b) = P(Z ≤ b) − [1 − P(Z ≤ a)]



p = K

Para calcular la variable **X** nos vamos a la **fórmula de la tipificación.**

Ejercicios y problemas resueltos de la distribución normal

1. Si X es una variable aleatoria de una distribución N(μ, σ), hallar: p(μ−3σ ≤ X ≤ μ+3σ).

Solución: sabemos que $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ **; como** x_1**=** μ−3σ y x_2= μ+3σ entonces la $P(x_1 \le X \le x_2)$ se define como:

$$p(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = p\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma} \le z \le \frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) =$$

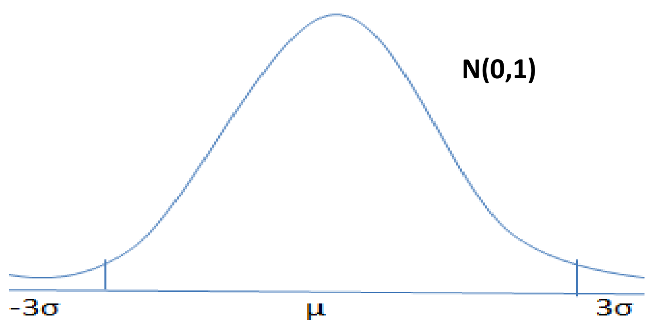
$$p(-3 \le z \le 3) = p(z \le 3) - p(z \le -3) =$$

$$= p(z \le 3) - (1 - p(z \le 3)) =$$

$=P(z\le 3)$ -1 $+$ $P(z\le 3)=$

$=$ 0.9986 -1 + 0.9986 = **0.9972** (usando la tabla N(0,1))

Es decir, que aproximadamente el **99.72%** de los valores de X están a más/menos de tres desviaciones típicas de la media.



2. En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de a para que: $P(4-a \le x \le 4+a) = 0.5934$

Solución: sabemos que $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ **; como x_1= 4-a** y x_2= 4+a entonces la $P(x_1 \le X \le x_2)$ se define como:

$$p\left(\frac{(4-a)-4}{2} \le z \le \frac{(4+a)-4}{2}\right) = 0.5934$$

$$p\left(\frac{-a}{2} \le z \le \frac{a}{2}\right) = p\left(z \le \frac{a}{2}\right) - p\left(z \le -\frac{a}{2}\right) =$$

$$= p\left(z \le \frac{a}{2}\right) - p\left(z \ge \frac{a}{2}\right) = p\left(z \le \frac{a}{2}\right) - p\left(1 - p\left(z \le \frac{a}{2}\right)\right)$$

$=2 \cdot p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) = 1 + 0.5934$

$=p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{1.5934}{2}$=0.7967 (buscamos el valor: 1-0.7967=**0.2033,** en la tabla N(0,1)

$\frac{a}{2} = 0.803$ →→ a= 1.606

3. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°.

Solución: sabemos que $\boldsymbol{z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$ **; como** $\boldsymbol{x_1}$**= 21** y x_2= 27 entonces la $P(x_1 \leq X \leq x_2)$; μ=23° y σ=5° se define como:

$$p(21 \leq X \leq 27) = p\left(\frac{21-23}{5} \leq Z \leq \frac{27-23}{5}\right) =$$

$$p(21 \leq X \leq 27) = p\left(\frac{-2}{5} \leq Z \leq \frac{4}{5}\right) = p(-0.4 \leq Z \leq 0.8) =$$

$= p(-0.4 \leq Z \leq 0.8)$=p(Z≤0.8)-[1-p(Z≤0.4)]=

=p(Z≤0.8)+p(Z≤0.4)-1=0.7881 +0.6554 -1=**0.4435**

=0.4435*30=13.3 (es decir 13 días).

4. La media de los pesos de 500 estudiantes de un Instituto es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:
   a) Entre 60 kg y 65 kg.
   b) Más de 90 kg.
   c) Menos de 64 kg.
   d) 64 kg.
   e) 64 kg o menos.

Solución: sabemos que $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ **;** μ=70 kg. y σ=3 kg. n=500.

a) **como x_1= 60 kg** y x_2= 65 entonces la $P(x_1 \le X \le x_2)$;se define como

p(60≤X≤75)=$p\left(\frac{60-70}{3} \le Z \le \frac{75-70}{3}\right) =$

= $p\left(\frac{-10}{3} \le Z \le \frac{5}{3}\right) =$

=p(-3.33≤Z≤1.67)=p(Z≤1.67) – p(Z≤-3.33)=

=p(Z≤1.67) – p(Z≤-3.33)= p(Z≤1.67) –[1- p(Z≤3.33)]

=0.9525 – (1-0.9996)=0.9525-0.0004=0.921*500=476

b) Más de 90 kg.

$$p(X > 90) = p\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = p(Z > 6.67) =$$

= 1 – p(Z≤6.67)= 1-1=0*500= 0

c) Menos de 64 kg.

$$p(X < 64) = p\left(Z < \frac{64-70}{3}\right) = p(Z < -2) = 1 - p(Z \le 2) =$$

=1-0.9772=0.0228*500=**11**

d) 64 kg.

$$p(X = 64) = p\left(Z = \frac{64-70}{3}\right) = p(Z = -2) = 0 \cdot 500 = 0$$

e) 64 kg o menos.

P(X≤64)= p(Z≤−2)=0.0228*500=**11**

5. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. Se pide:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?
   b) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

Solución: sabemos que $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ **;** μ=78; σ^2=36 y σ=6.

a) p(X>72)=$p\left(Z > \frac{72-78}{6}\right)$ **=P(Z>-1)=1-0.1587=0.8413**

b) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

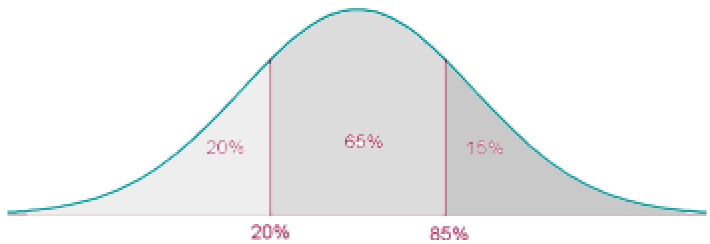
P(X>84)=P(Z>$\frac{84-78}{6}$)=P(Z>1)=0.1587

Aplicamos la fórmula de la probabilidad condicional.

$$p(x > 84 / x > 72) = \frac{p[x > 84 \cap x > 72]}{p(x > 72)} =$$

$$\frac{P(X > 84)}{P(> 72)} = \frac{0.1587}{0.8413} = 0.1886$$

6. Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución N(65, 18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?



$$p(Z \le z_1) = 0.2 \qquad p(Z \le -z_1) = 0.8$$

$$-z_1 = 0.84 \qquad z = -0.84$$

$$\frac{X_1 - 65}{18} = -0.84 \qquad X_1 = 49.88$$

$$p(Z \le z_2) = 0.2 \qquad z_2 = 1.04$$

$$\frac{X_2 - 65}{18} = 1.04 \qquad X_2 = 83.72$$

Baja cultura hasta 49 puntos.

Cultura aceptable entre 50 y 83.

Excelente cultura a partir de 84 puntos.

7. Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

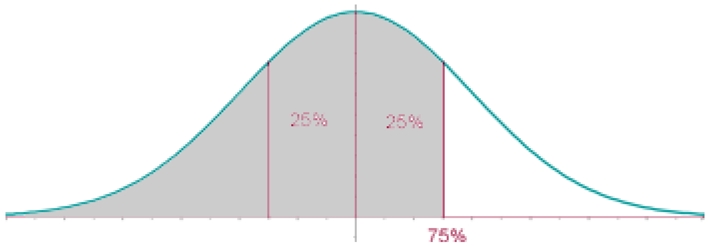
   a) Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

$$p(95 < X \le 110) = p\left(\frac{95-100}{15} < Z \le \frac{110-100}{15}\right) =$$

$$= p(0.33 < Z \le 0.67) = p(Z \le 0.67) - [1 - p(Z \le 0.33)] =$$

$$= 0.7486 - (1 - 0.6293) = 0.3779$$

b) ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?



$p = \ 0.75 \qquad\qquad z = 0.675$

$\frac{X-100}{15} = 0.675 \qquad\qquad X = 110$

$(90,\ 110)$

c) En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

$$p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = p(Z > 1.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 \cdot 2500 = 119$$

8. En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tengan teléfono.

$n = 90 \qquad\qquad p = \frac{1}{3} \qquad\qquad q = \frac{2}{3}$

$n \cdot p > 5 \qquad\qquad n \cdot q > 5$

$$B\left(90, \frac{1}{3}\right) \to N\left(90 \cdot \frac{1}{3}, \sqrt{90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right) = N(30,\ 4.47)$$

$$p(X > 30) = p\left(Z > \frac{30-30}{4.47}\right) = p(Z > 0) = 1 - p(Z \leq 0) = 0.5$$

9. En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

$n = 200 \qquad p = 0.5 \qquad q = 0.5$

$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$

$$B(200, 0.5) \to N\left(200 \cdot 0.5,\ \sqrt{200 \cdot 0.5 \cdot 0.5}\right) = N(100,\ 7.07)$$

$$p(X > 110) = p\left(Z > \frac{110-100}{7.07}\right) = p(Z > 1.41) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.41) = 1 - 0.92073 = 0.07927$$

10. Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos televisores Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

$n = 50 \qquad p = 0.6 \qquad q = 0.4$

$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$

$$B(50, 0.6) \to N\left(50 \cdot 0.6, \sqrt{50 \cdot 0.6 \cdot 0.4}\right) = N(30,\ 3.46)$$

$$p(X > 20) = p\left(Z > \frac{20-30}{3.46}\right) =$$

$$p(Z > -2.89) = p(Z \leq 2.89) = 0.9981$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?

$$p(35 < X \leq 40) = p\left(\frac{35-30}{3.46} < Z \leq \frac{40-30}{3.46}\right) =$$

$$= 0.9981 - 0.9265 = 0.0716$$