CURSO DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

PROBLEMAS RESUELTOS DE PROBABILIDAD

MSc. Julio R. Vargas A.

I. Encuentre los errores en cada uno de los siguientes planteamientos:

a. Las probabilidades de que un vendedor de automóviles venda 0, 1, 2 ó 3 automóviles en cualquier día de julio son de 0.19, 0.38, 0.29 y 0.15, respectivamente.

Solución:

Construyamos una tabla:

No. Autos Vendidos	**0**	**1**	**2**	**3**
Probabilidad	**0.19**	**0.38**	**0.29**	**0.15**

El espacio muestral de que ocurra cualquiera de los eventos es:

$\Omega=\{0,1,2,3\}$

Por lo tanto la suma de las probabilidades de todos los eventos debe sumar exactamente 1.

$P(\Omega)= 0.19 + 0.38 + 0.29 + 0.15= \mathbf{1.01}$

Como puede verse la suma de las probabilidades de todos los eventos posibles del espacio muestral es 1.01, **lo cual NO es posible, dado que la probabilidad del espacio muestral debe ser exactamente 1**. Por lo tanto hay un error en la probabilidad en alguno(s) de los evento(s).

b. La probabilidad que llueva mañana es 0.4 y la probabilidad de que no llueva mañana es 0.52.

Solución:

Llamaremos A: el evento llueve mañana por lo canto el evento complemento A^C es no llueve mañana.

Sabemos por la ley de complementos de probabilidades que: $P(A) + P(A^C)=1$

Pero el enunciado nos dice que $P(A)=.04$ y $P(A^C)=0.52$

Aplicando la fórmula $P(A) + P(A^C)=1$

Resulta: ¿ 0.4 + 0.52 =1 ? puede verse que la suma no es 1. Por lo tanto hay un error. Si la probabilidad del evento es correcta ($P(A)=0.4$), entonces la probabilidad del complemento debería ser 0.6 ($P(A^C)=0.6$ y de esa manera se cumpliría la ley de complementos.

c. La probabilidad que una impresora cometa 0, 1, 2, 3, 4 o más errores son, en forma respectiva, de 0.19, 0.34, -0.25, 0.43 y 0.29.

Solución:

Construyamos una tabla:

No. De errores	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	**0.19**	**0.34**	**-0.25**	**0.43**	**0.29**

El espacio muestral de que ocurra cualquiera de los eventos es:
Ω={0,1,2,3, 4 ó más}
Cuando vemos las probabilidades nos percatamos que el evento cuando ocurren dos errores tiene una probabilidad **NEGATIVA**, lo cual no es posible en teoría de probabilidades, ya que sabemos que las probabilidades son valores entre 0 y 1. Por tanto eso es un error.

II. Una caja contiene 500 sobres, de los cuales 75 contienen $100 en efectivo, 150 contienen $25 y 275 contienen $10. Se puede adquirir un sobre en $25. ¿Cuál es el espacio muestral para las diferentes cantidades de dinero? Asigne probabilidades a los puntos muestrales y después encuentre la probabilidad de que el primer sobre que se compre contenga menos de $100.

Solución:

a. ¿Cuál es el espacio muestral?

Primero formemos el espacio muestral con todos los posibles eventos:
Ω={$10, $25, $100}
Hay tres eventos posibles:
A: comprar un sobre con $10
B: comprar un sobre con $25
C: comprar un sobre con $100

b. Asigne probabilidades a los puntos muestrales

Mostraremos en una tabla los eventos con sus probabilidades.

Evento	A	B	C
Probabilidad	P(A)=275/500	P(B)=150/500	P(C)=75/500

Puede ver que para obtener la probabilidad hemos dividido el número de sobres de cada tipo entre el total de sobres que hay en la caja.

c. Encuentre la probabilidad de que el primer sobre que se compre contenga menos de $100.

Hay dos eventos que pueden ocurrir en que los sobres contienen cantidades menos de $100. Son los eventos A y B. Por lo tanto al comprar un sobre nos interesa saber la probabilidad de que ocurra A o B, también sabemos que A y B son eventos excluyentes, por lo tanto usaremos la fórmula para eventos excluyentes.

P(A u B)= P(A) + P(B) = 275/500 + 150/500 = 425/500 = 0.85

Es decir la probabilidad de que al comprar el primer sobre resulte un valor menor de $100 es 0.85 o 85%.

III. En un grupo de 500 estudiantes universitarios, 210 de ellos fuman, 258 ingieren bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman e ingieren bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas e ingieren bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 participan en estas tres malas prácticas para la salud. Si se elige al azar un miembro de este grupo, encuentre la probabilidad de que el estudiante:

a. Fume pero no ingiera bebidas alcohólicas
b. Coma entre comidas e ingiera bebidas alcohólicas, pero no fume
c. No fume ni coma entre comidas.

Solución:

Lo primero que haremos es denotar cada uno de los eventos.

A: Fuman
B: Ingieren bebidas alcohólicas
C: Comen entre comidas.

Los eventos complementarios son:

$\mathbf{A^c}$: No fuman
$\mathbf{B^c}$: No ingieren bebidas alcohólicas
$\mathbf{C^c}$: No comen entre comidas.

Puede ver que estudiantes que practican los tres eventos $A \cap B \cap C = ABC = 52$

Es decir, hay 52 estudiantes que fuman, ingieren bebidas alcohólicas y comen entre comidas.

Hay 122 que fuman e ingieren bebidas alcohólicas. $A \cap B = AB = 122$

Hay 83 comen entre comidas e ingieren bebidas alcohólicas. $B \cap C = BC = 83$

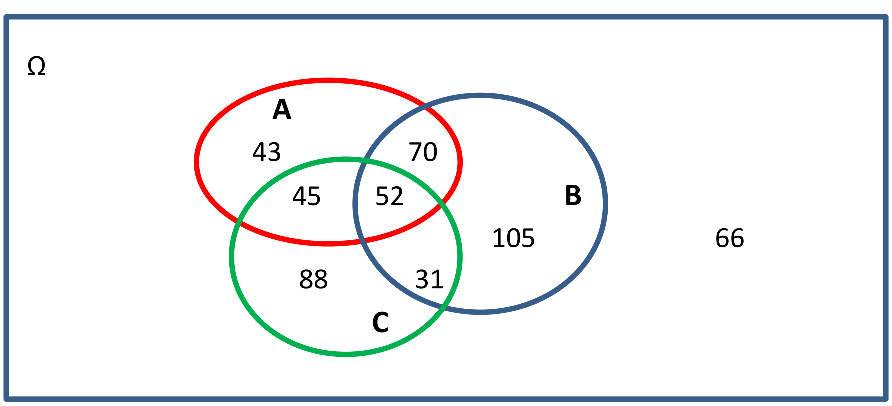
Hay 97 fuman y comen entre comidas. $A \cap C = AC = 97$

Hay 210 que fuman. $A = 210$.

Hay 258 que ingieren bebidas alcohólicas. $B = 258$

Hay 216 comen que entre comidas. $C = 216$

Ahora esto lo representamos en un diagrama de Venn. Para facilitar el cálculo de las probabilidades.



Como ubicar los datos en el diagrama de Venn:

El círculo rojo son los fuman, ese es el evento A.

El círculo azul son los que ingieren bebidas alcohólicas, ese es el evento B.

El círculo verde son los que comen entre comidas, ese es el evento C.

Los círculos están entrelazados es decir no son eventos excluyentes, esto debido que hay estudiantes que tienen las tres malas prácticas y otros tienen dos y otros solo una.

El área donde se entrelazan los tres círculos (A,B y C) aquí ubicamos el número 52 como puede ver en el gráfico.

Ahora vamos a ubicar solo los que tienen dos malas prácticas: Empecemos con los que **fuman e ingieren bebidas alcohólicas** que son 122, pero ya tenemos 52 por lo que solo faltan 70 y lo ubicamos en el área solo de intersección de A y B (ver diagrama). Ahora veamos a **los que comen entre comidas e ingieren bebidas alcohólicas** que son 83, que son el área de los círculos B y C, ellos se entrelazan como ya están 52 solo agregamos 31 en el área solo de intersección de B y C. Por último nos falta **los que fuman y comen entre comidas** que son 97, que son los círculos A y C, estos se entrelazan como ya hay 52 solo le agregamos 45 en el área solo intersección de A y C.

Ahora nos corresponde completar el total de los fuman que son 210. A=210, pero ya tenemos 45+52+70=167 es decir faltan 43 los que ubicamos en el área del círculo rojo que no se traslapa con ninguno de los otros círculos. Hacemos lo mismo con los otros dos eventos como se muestran en el gráfico. Si sumamos todos las áreas nos resultan 43+45+ 52+70+88+31+105=434 estos estudiantes tienen una, dos o las tres malas prácticas, pero en total son 500 es decir que hay 66 estudiantes que están fuera de cualquiera de los círculos o eventos pero son parte del espacio muestral.

Responderemos las tres preguntas:

a. Fume pero no ingiera bebidas alcohólicas

   $P(A \cap B^C) = (43+45)/500 = 88/500 = 0.176$

   Observe el círculo A que se intercepta con B^C en la región donde está 43 y 45, los que sumados nos 88 entre el total de estudiantes que son 500, para una probabilidad de 0.176.

b. Coma entre comidas e ingiera bebidas alcohólicas, pero no fume

   $P(C \cap B \cap A^C) = 31/500 = 0.062$

   Observe primeramente $C \cap B$ hay 52+31=83 estudiantes esa región o área la vamos a interceptar con A^C. es decir no debemos tomar encuenta los estudiantes que están en círculo de A. Esto reduce a 31 el número de estudiantes que buscamos de un total de 500, para una probabilidad de 0.062

c. No fume ni coma entre comidas.

   $P(A^C \cap C^C) = P(AuC)^C = 1-P(AuC) = 1-\{P(A)+P(C)-P(A \cap C)\} = 1-\{210/500 + 216/500 - 97/500\}$

   $= 1 - 329/500 = 1 - 0.658 = 0.342$

La ley de DeMorgan establece que **$A^c \cap C^c = (AuC)^c$** por lo **tanto trabajamos con los complemento de la unión y por la propiedad del complemento $1 - P(AuC)^C$. como A y B no son eventos excluyentes. Usamos la fórmula $P(AuC)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$.**

IV. La probabilidad de que una industria Norteamericana se ubique en Munich es 0.7, la probabilidad que se ubique en Bruselas es 0.4 y la probabilidad que se ubique en Munich o Brusela o en ambas es 0.8 ¿Cuál es la probabilidad que se ubique

a. En ambas ciudades
b. En ninguna de esas ciudades.

Solución:

Denotaremos los eventos:

A: la industria de ubica en Munich

B. la industria se ubica en Brusela

Se sabe que:

$P(A)= 0.7$

$P(B)=0.4$

$P(AuB)=0.8$

Los eventos no son excluyentes por lo que la fórmula para AuB es:

$P(AuB)=P(A)+P(B) - P(A\cap B)$

Respondiendo las preguntas.

a. La probabilidad que se ubica en ambas ciudades.

   Esto es buscamos que ocurra $P(A\cap B)$, para lo cual despejamos de la fórmula anterior y resulta como se muestra:

   $P(A\cap B)= P(A) + P(B) - P(AuB)$

   $P(A\cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.8 = 0.3$

   Es decir la probabilidad que industria se instale en ambas ciudades es 0.3

b. La probabilidad que no se instale en ninguna de las ciudades

   En vista que ya conocemos la probabilidad de instalarse en A o en B o en ambas AuB, 0.8 que no se instale en ninguna es el complemento de AuB

   $P(AuB)^C= 1 - P(AuB)= 1 - 0.8 = 0.2$

V. En una ciudad pequeña la población de adulto que ha completado los requisitos para obtener un grado universitario. Se les ha dividido en categorías de acuerdo a su sexo y su condición de empleo, como se muestra en la siguiente tabla.

	(E)mpledo	(D)esempleado	Total
(M)asculino	460	40	500
(F)emenino	140	260	400
Total	600	300	900

Se va a elegir a una de esas personas al azar para que realice un viaje en todo el país. Con la intención de que haga publicidad acerca de las ventajas de establecer nuevas industrias en la localidad.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b. Si se elige un empleado ¿Cuál es la probabilidad de que sea Mujer?
c. Si se elige un empleado ¿Cuál es la probabilidad de que sea Hombre?

Solución:

Denotamos los eventos:

M: se elige a un hombre

F: se elige a una Mujer

E: el elegido tiene empleo

a. **P(F) = 400/900 = 0.44**

   La probabilidad de elegir una mujer es 0.44

b. **P(F/E) = P(F∩E)/P(E) = 140/600 = 0.23**

c. **P(M/E)= P(M∩E)/P(E)= 460/600 =0.77**

VI. Tres máquinas A,B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de esas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

a. Seleccionamos una pieza al azar, cual es la probabilidad de que sea defectuosa

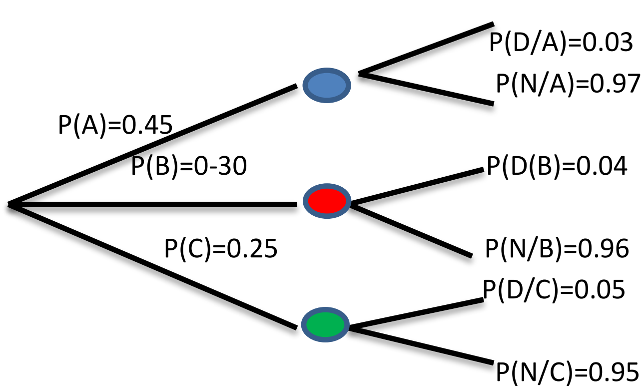
b. Seleccionamos una pieza al azar, cual es la probabilidad de que no sea defectuosa

Solución:

Sea D: la pieza defectuosa

N: la pieza no defectuosa.

Construimos un árbol para apreciar mejor las probabilidades de los eventos y las condicionales.



Se deben leer así:
P(A)= 0.45 probabilidad de producción de la máquina A
P(D/A)=0.03 probabilidad que la pieza sea defectuosa si la produce la máquina A
P(N/A)=0.97 probabilidad que la pieza no sea defectuosa si la produce la máquina A

P(B)=0.30 probabilidad de producción de la máquina B
P(D/B)=0.04 probabilidad que la pieza sea defectuosa si la produce la máquina B
P(N/B)=0.96 probabilidad que la pieza no sea defectuosa si la produce la máquina B

P(C)=0.25 probabilidad de producción de la máquina B
P(D/B)=0.05 probabilidad que la pieza sea defectuosa si la produce la máquina C
P(N/B)=0.95 probabilidad que la pieza no sea defectuosa si la produce la máquina C

a. Seleccionamos una pieza al azar, cual es la probabilidad de que sea defectuosa

Debemos calcular la probabilidad total, para el caso de pieza defectuosa: la fórmula es la siguiente:

P(D)= P(A)*P(D/A) + P(B)*P(D/B) + P(C)*P(D/C)

P(D)= 0.45*0.03 + 0.30*0.04 + 0.25*0.05 = 0.0135 + 0.012 + 0.0125=0.038

b. Seleccionamos una pieza al azar, cual es la probabilidad de que no sea defectuosa

Debemos calcular la probabilidad total, para el caso de pieza no defectuosa: la fórmula es la siguiente:

P(N)= P(A)*P(N/A) + P(B)*P(N/B) + P(C)*P(N/C)

P(N)= 0.45*0.97 + 0.30*0.96 + 0.25*0.95 = 0.4365 + 0.288 + 0.2375=0.962

VII. En una población se tiene 2 camiones de bomberos operando en forma independiente. La probabilidad de que un camión esté disponible cuando se le requiere es 0.96.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno esté disponible cuando se le necesita?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que esté disponible un camión cuando se le necesita?

Solución:

Denotaremos los eventos:

A: disponible el camión 1 → P(A) = 0.96

B: disponible el camión 2 → P(B) = 0.96

A^C: ocupado el camión 1 → $P(A^C)$= 0.04

B^C: ocupado el camión 2 → $P(B^C)$= 0.04

Tomamos en cuenta que los eventos son independientes.

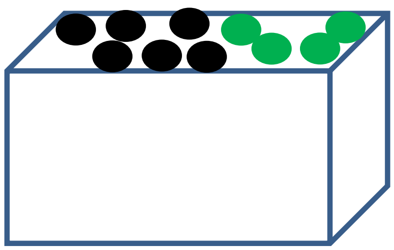
¿Cuál es la probabilidad de que ninguno esté disponible cuando se le necesita?

$P(A^C \cap B^C) = P(A^C) * P(B^C) = 0.04 * 0.04 = 0.0016$

c. ¿Cuál es la probabilidad de que esté disponible un camión cuando se le necesita?
$P(AUB)= 1 - P(A^C \cap B^C)=1 - P(A^C)*P(B^C)= 1-0.04*0.04= 1-0.0016= 0.9984$
Por ser los eventos independientes.

VIII. De una caja que contiene 6 bolas negras y 4 bolas verdes se extraen 3 bolas en forma sucesiva y se remplazan cada una de ellas antes de hacer la siguiente extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que

a. Las tres sean del mismo color?
b. Esté representado cada color?



Solución:

a. Las tres sean del mismo color

A: extrar una bola negra (en la 1ra. , 2da., 3ra. Extracción)
B: extraer una bola verde (en la 1ra., 2da., 3ra. Extracción)
En vista que la extracción es con reemplazo, los eventos son independientes.
El segunda extracción es independiente de la primera así mismo la tercer extracción es independiente de la primera y la segunda.

$P((A\cap A\cap A)u(B\cap B\cap B))= P(A)*P(A)*P(A)+P(B)*P(B)*P(B)=$
$= 6/10*6/10*6/10 + 4/10*4/10*4/10= 216/1000 + 64/1000=$
$= 280/1000= 0.28$

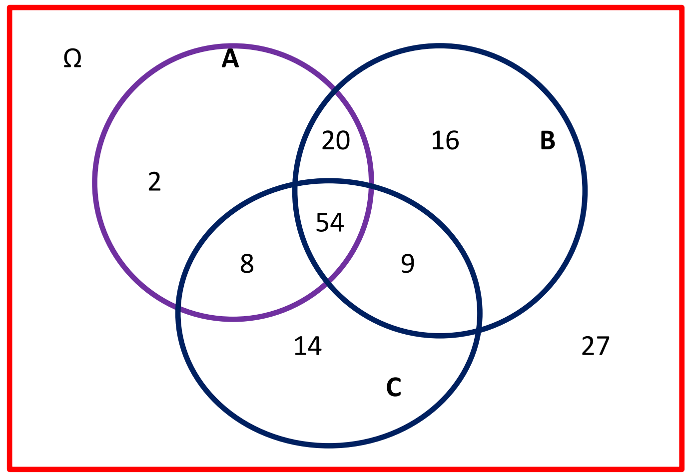
b. Esté representado cada color

Es decir todas las combinaciones donde estén representado el color negro y el verde, como son tres extracciones en algunos casos saldrán dos negras y una verde o dos verdes y una negra. Recuerde que son eventos independientes, es decir la extracción de la segunda y tercera no se afectan por las extracciones anteriores.

$P((A\cap A\cap B)u(A\cap B\cap B)u(A\cap B\cap A)u(B\cap A\cap B)u(B\cap B\cap A)u(B\cap A\cap A))=$
$= P(A)*P(A)*P(B) + P(A)*P(B)*P(B) + P(A)*P(B)*P(A) + P(B)*P(A)*P(B) + P(B)*P(B)*P(A) + P(B)*P(A)*P(A)$
$=6/10*6/10*4/10 + 6/10*4/10*4/10 + 6/10*4/10*6/10 + 4/10*6/10*4/10 + 4/10*4/10*6/10 + 4/10*6/10*6/10$
$= 144/1000 + 96/1000 + 144/1000 + 96/1000 + 96/1000 + 144/1000= 720/1000=0.72$

IX. Entre 150 personas entrevistadas en un estudio de transporte urbano colectivo, algunas viven a más de 3 kilómetros del centro de la ciudad (A), algunas utilizan su propio auto para ir al trabajo (B) y otro grupo gustosamente cambiarían al transporte urbano colectivo si lo hubiera (C). Con la información dada en la figura siguiente, encuentre:

a. P(A)
b. P(B)
c. P(C)
d. P(A∩B∩C)
e. P(AuB)
f. P(BuC)
g. P(B∩(AuC))



Solución:

Para asignar las probabilidades a los eventos solo debemos fijarnos en la figura, ya que contiene la cantidad de personas que se encuentran en cada uno de los eventos.

Los eventos simples son:

A: viven a más de 3 kilómetros del centro de la ciudad.

B: utilizan su propio auto para ir al trabajo

C: cambiarían al transporte urbano colectivo si lo hubiera.

Responderemos cada uno de los incisos

a. **P(A)=** $\frac{\mathbf{2+20+54+8}}{\mathbf{150}} = \frac{\mathbf{84}}{\mathbf{150}} = \mathbf{0.56}$ Se suman todos las personas que están dentro del círculo de A y lo dividimos por 150.

b. P(B)=$\frac{\mathbf{20+54+16+9}}{\mathbf{150}} = \frac{\mathbf{99}}{\mathbf{150}} = \mathbf{0.66}$ Sumamos todas las personas que están dentro del círculo de B y lo dividimos por 150.

c. P(C)= $\frac{\mathbf{54+8+9+14}}{\mathbf{150}} = \frac{\mathbf{85}}{\mathbf{150}} = \mathbf{0.57}$ Sumamos todas las personas que están dentro del círculo de C y lo dividimos por 150.

d. **P(A∩B∩C)=**$\frac{\mathbf{54}}{\mathbf{150}} = \mathbf{0.36}$ Son todas las personas que pertenecen a los tres eventos, es decir, son los que viven a más de tres km y se vienen en auto al trabajo y gustosamente optarían por el transporte colectivo si lo hubiera.

e. P(AuB)= $\frac{2+8+20+54+16+9}{150}$=$\frac{109}{150} = 0.73$ Son todas personas que se encuentran en los círculos A y B, los que suman 109 luego lo dividimos por 150. Se lee la probabilidad de que ocurra A o B o ambos.

f. P(BuC)= $\frac{8+14+54+9+20+16}{150} = \frac{121}{150} = 0.81$ Son todas las personas que están en B o C o en ambos.

g. P(B∩(AuC))= $\frac{20+54}{150} = \frac{74}{150} = 0.49$ Son todos las personas que están en A o C y que también están en B. puede ver la figura que son 20 y 54, los sumamos y resultan 74, los que dividimos por 150.

X. Si A y B son mutuamente excluyentes, P(A)=0.29; P(B)=0.43; calcule

a. P(A^C)
b. P(AUB)
c. P(A∩B^C)
d. P(A^C∩B^C)

Solución:

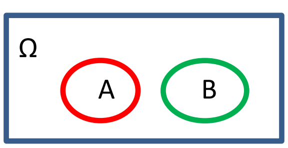
a. P(A^C)= 1 – P(A) = 1 – 0.29 =0.71

Como nos piden el complemento de A, aplicamos la fórmula del complemento y automáticamente obtenemos el resultado como se muestra.

b. P(AuB)=P(A)+P(B) aplicamos está fórmula por tratarse de eventos excluyentes.

=0.29 + 0.43=0.72

c. P(A∩B^C)= P(A) = 0.29



d. P(A^C∩B^C)= P(AuB)^C= 1 – P(AuB)=1 –{ P(A)+P(B)}= 1-{0.29+0.43}=1-0.72=0.28

Por propiedades de probabilidades P(A^C∩B^C)= P(AuB)^C.

Luego aplicamos complemento y por último la fórmula de eventos excluyentes y el cálculo resulta sencillo.