PROBABILIDAD CONDICONAL Y TEOREMA DE BAYES

Prof.: MSc. Julio Rito Vargas A.

Definición de Probabilidad Condicional: Para dos eventos cualesquiera A y B en un espacio muestra Ω, tales que P(B) > 0 con P(B)> 0, la probabilidad del evento A dado el evento B, se define por :

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En general P(A/B) es diferente a la P(B/A).

Ejemplo 1: Se seleccionan dos semillas aleatoriamente, una por una, de una bolsa que contiene 10 semillas de flores rojas y 5 de flores blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. La primera semilla sea roja?
b. La segunda semilla sea blanca dado que la primera fue roja?

Solución:

a. La probabilidad de que la primera semilla sea roja es $P(R_1)=10/15$, puesto que hay 10 semillas de flores rojas de un total de 15. Escrito con notación de probabilidad tenemos: $P(R_1)=10/15$.

b. La probabilidad de que la segunda semilla sea blanca se ve influida por lo que salió primero, es decir esta probabilidad está sujeta a una condición, la de que la primera semilla sea roja. Este tipo de probabilidad se le llama probabilidad condicional y se denota por $P(B_2/R_1)$, y se lee: la probabilidad de B_2 dado R_1.

Esta probabilidad $P(B_2/R_1)=5/14$, puesto que todavía hay 5 semillas blancas en un total de 14 restantes.

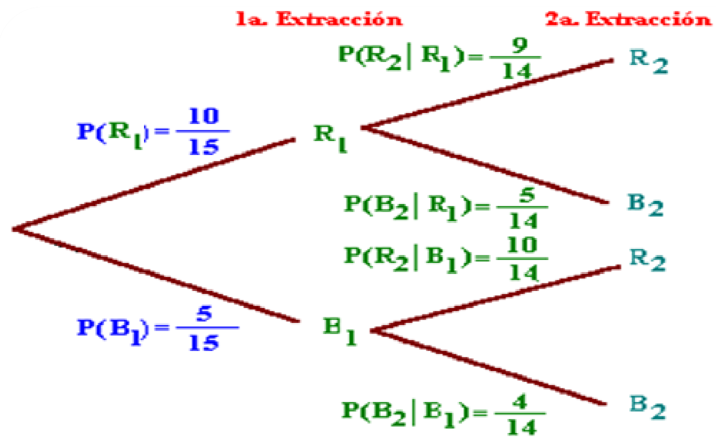
Veamos la situación en un diagrama de árbol:

$P(B_1)$: probabilidad de sacar una semilla blanca en la primera extracción.

$P(B_2)$: probabilidad de sacar una semilla blanca en la segunda extracción.

$P(R_1)$: probabilidad de sacar una semilla roja en la primera extracción.

$P(R_2)$: probabilidad de sacar una semilla roja en la segunda extracción.



<u>**Primera extracción**</u>: <u>**Segunda Extracción**</u>:

$P(R_1) = 10/15$ $P(R_2/R_1)= 9/14$

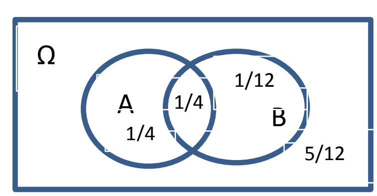
$P(B_2/R_1)= 5/14$

$P(B_1) = 5/15$ $P(R_2/B_1)= 10/14$

$P(B_2/B_1)= 4/14$

Ejemplo 2: Sean A y B dos sucesos aleatorios con $p(A) = 1/2$, $p(B) = 1/3$, $p(A \cap B)= 1/4$. Determinar:

a. **$P(A/B)$**
b. **$P(B/A)$**
c. **$P(A\cup B)$**
d. **$P(A^c/B^c)$**
e. **$P(B^c\cap A^c)$**



Solución:

a. $P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/3} = \mathbf{0.75}$

b. $P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \mathbf{0.5}$

c. **$P(A\cup B)$=**$P(A)+P(B)-P(A\cap B)$**=0.5 + 0.333… – 0.25= 0.5833…**

d. **$P(A^c/B^c)=\frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{5/12}{2/3}=\frac{5}{8}$=0.625**
e. **$P(B^c \cap A^c)=P(A^c)+P(B^c)-P(A^c \cup B^c)$=0.5 + 0.667 – 0.75=0.417**

Se debe saber las siguientes leyes:
$P(A \cup B)^c = P(A^c \cap B^c)$
$P(A \cap B)^c = P(A^c \cup B^c)$
$P(\Omega)= 1$
$P(A^C)=1 – P(A)$

Ejemplo 3: Un taller sabe que por término medio acuden: por la mañana tres automóviles con problemas eléctricos, ocho con problemas mecánicos y tres con problemas de carrocería, y por la tarde dos con problemas eléctricos, tres con problemas mecánicos y uno con problemas de carrocería.

	(E)lectrecidad	**Mecá(N)ico**	**(C)arrocería**	**total**
(M)añana	**3**	**8**	**3**	**14**
(T)arde	**2**	**3**	**1**	**6**
total	**5**	**11**	**4**	**20**

a. Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.
b. Calcular el porcentaje de los que acuden por problemas mecánicos.
c. Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.
d. Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas mecánicos acuda por la tarde.

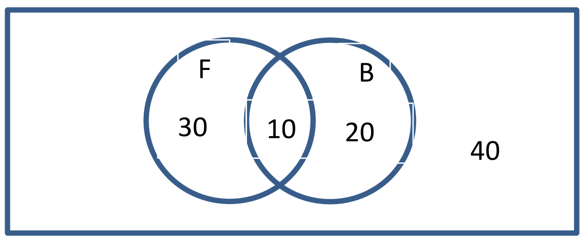
Solución

a. P(T)= 6/20 = 0.30x100= 30%
b. P(N)= 11/20 = 0.55x100= 55%
c. $P(M/E)= P(M \cap E)/P(E)$ = 3/20/5/20 = 3/5 =0.60x100= 60%
d. $P(T/N)= P(T \cap N)/P(N)$ = 3/20/11/20 = 3/11 =0.2727x100= 27.3%

Ejemplo 4: En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al fútbol, cuál será la probabilidad de que escogido al azar un alumno de la clase:

a. Juegue sólo al fútbol (F)
b. Juegue sólo al baloncesto (B)
c. Practique uno solo de los deportes
d. No juegue ni al fútbol ni al baloncesto
e. Que juega futbol dado que ya juega baloncesto.

Solución:



a. **$P(F-B) = 30\%$**
b. **$P(B-F) = 20\%$**
c. **$P[(F-B)\cup(B-F)]=P(F-B)+P(B-F)= 30\%+20\%= 50\%$**
d. **$P(F^c\cap B^c) = P(F\cup B)^c=40\%$**
e. **$P(F/B)= P(F\cap B)/P(B) = 10\%/30\% = 0.333$**

<u>**Eventos Independientes**</u>: Cuando A y B son dos eventos con probabilidades positivas, hemos visto que en general la probabilidad condicional del evento B dado el evento A es diferente de la probabilidad del evento B. Sin embargo, cuando se tiene la igualdad: *P(B/A) = P(B)*es de especial importancia porque esto quiere decir que el **evento B no depende o es independiente del evento A**. Es decir, no importa si ocurrió o no el evento A puesto que la ocurrencia o no de A **no afecta** al evento B.

> **Proposición:** Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B.
> **Cuando los eventos son independientes, se cumple que:**

$$P(A\cap B)= P(A) * P(B)$$

Ejemplo 5: En una escuela el 20% de los alumnos tiene problemas visuales, el 8% tiene problemas auditivos y el 4% tienen tanto problemas visuales como auditivos, Sean: V los que tienen problemas visuales y V^C los que no lo tienen. A los que tienen problemas auditivos y A^C los que no los tienen.

a. ¿Son los dos eventos de tener problemas visuales y auditivos, eventos independientes?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un niño tenga problemas auditivos si sabemos que tiene problemas visuales?

c. Complete la siguiente tabla

	V	V^c	Total
A	4%		8%
A^c			
Total	20%		100%

d. $P(A^c/V)$

Solución:

a. Para responder esta pregunta debemos suponer que son independientes:
   Lo que implica que
   $P(A\cap V)$ ¿=? $P(A)xP(V)= 0.08x0.20= 0.016$
   Pero $P(A\cap V)=0.04$ por lo tanto $P(A\cap V)\neq P(A)xP(V)$
   Esto es A y V no son independientes.
b. $P(A/V)= P(A\cap V)/P(V) = 4\%/20\% = 1/5= 0.20$

c.

	V	V^c	Total
A	4%	4%	8%
A^c	16%	76%	92%
Total	20%	80%	100%

d. $P(A^c/V)= P(A^c\cap V)/P(V) = 16\%/20\% = 4/5= 0.8$

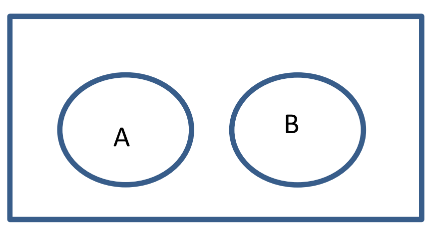
Eventos mutuamente excluyentes

Dos o más eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento (o eventos).

La regla de la Adición expresa que: la probabilidad de ocurrencia de al menos dos eventos A y B es igual a:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

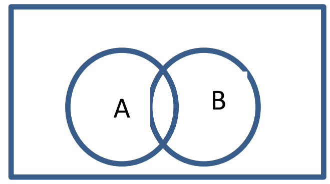
Si A y B son mutuamente excluyentes.



Dos o más eventos son no excluyentes, o conjuntos, cuando es posible que ocurran ambos. Esto no indica que necesariamente deban ocurrir estos eventos en forma simultánea.

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Si A y B son no excluyentes.



PRINCIPIO DE CONTEOS:

PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACION

Si se desea realizar una actividad que consta de r pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de N_1 maneras o formas, el segundo paso de N_2 maneras o formas y el r-ésimo paso de N_r maneras o formas, entonces esta actividad puede ser llevada a efecto de. El principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos de la actividad debe ser llevado a efecto, uno tras otro. Si un evento E1 puede suceder de N_1 maneras diferentes, el evento E2 puede ocurrir de N_2 maneras diferentes, y así sucesivamente hasta el evento Ep el cual puede ocurrir de N_p maneras diferentes, entonces el total de maneras distintas en que puede suceder el evento "ocurren E1 y E2…..y Ep" es igual a producto.

$$\mathbf{N_1 \times N_2 \times \ldots\ldots\ldots \times N_r} \text{ **maneras o formas**}$$

Ejemplo:
Se dispone de 3 vías para viajar de C1 a C2 y de 4 vías para viajar de C2 a C1. ¿De cuántas formas se puede organizar el viaje de ida y vuelta de C1 a C2.Respuesta: **(3)(4)=12**

PERMUTACIÓN:

A diferencia de la fórmula de la multiplicación, se la utiliza para determinar el número de posibles arreglos cuando solo hay un solo grupo de objetos. Permutación: un arreglos o posición de r objetos seleccionados de un solo grupo de n objetos posibles. Si nos damos cuenta los arreglos a, b, c y b, a, c son permutaciones diferentes, la fórmula que se utiliza para contar el número total de permutaciones distintas es:

FÓRMULA: $nPr = n!\,(n - r)$

Ejemplo: ¿Cómo se puede designar los cuatro primeros lugares de un concurso, donde existen 15 participantes?
Aplicando la fórmula de la permutación tenemos:

n P r = n!/ (n - r)! = 15! /(15-4)!= 15*14*13*12 *11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1 / 11*10*9*8*7*6* 5* 4*3*2*1 = 32,760

Dónde: n= número total de objetos r= número de objetos seleccionados != factorial, producto de los números naturales entre 1 y n.
NOTA: se puede cancelar números factoriales, cuando se tiene las mismas cifras en numerador y denominador.

PRINCIPIO DE COMBINACION:

En una permutación, el orden de los objetos de cada posible resultado es diferente. Si el orden de los objetos no es importante, cada uno de estos resultados se denomina combinación. Por ejemplo, si se quiere formar un equipo de trabajo formado por 2 personas seleccionadas de un grupo de tres (A, B y C). Si en el equipo hay dos funciones diferentes, entonces si importa el orden, los resultados serán permutaciones. Por el contrario si en el equipo no hay funciones definidas, entonces no importa el orden y los resultados serán combinaciones. Los resultados en ambos casos son los siguientes:

Permutaciones: AB, AC, BA, CA, BC, CB

Combinaciones: AB, AC, BC

Combinaciones: Es el número de formas de seleccionar r objetos de un grupo de n objetos sin importar el orden.
La fórmula de combinaciones es:

n C r = n! r! (n – r)!

Ejemplo: En una compañía se quiere establecer un código de colores para identificar cada una de las 42 partes de un producto. Se quiere marcar con 3 colores de un total de 7 cada una de las partes, de tal suerte que cada una tenga una combinación de 3 colores diferentes. ¿Será adecuado este código de colores para identificar las 42 partes del producto?
Usando la fórmula de combinaciones:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7.6.5.4!}{3!*4!} = \frac{210}{6} = 35$$

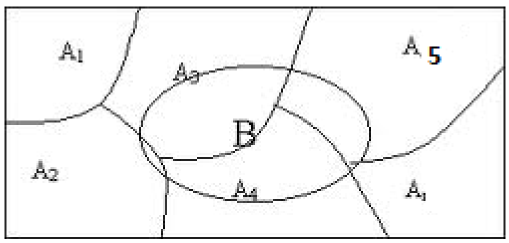
No es adecuado este código, ya que solo permite codificar 35 partes por lo faltarían 7.

TEOREMA DE BAYES:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son **Sucesos mutuamente excluyentes y** cuya **unión** es el **espacio muestral** ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$). Y B es otro suceso.
Resulta que:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \ldots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

Las probabilidades $\mathbf{p(A_1)}$ se denominan **probabilidades a priori**.
Las probabilidades $\mathbf{p(A_i/B)}$ se denominan **probabilidades a posteriori**.
Las probabilidades $\mathbf{p(B/A_i)}$ se denominan verosimilitudes.

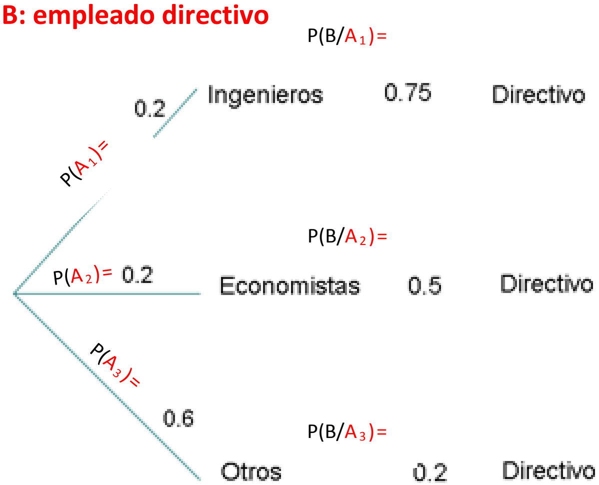


Ejemplo 1: El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el 20% ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

Solución:

A_1: empleados que son Ingenieros
A_2: empleados que son Economistas
A_3: empleados que no son Ingenieros ni Economistas

B: empleado directivo



$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{(0.20)(0.75)}{(0.20)(0.75)+(02,0)(0.50)+(0.60)(0.20)} = 0.405$$

Ejemplo 2: La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta sí se ha producido algún incidente es de 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02.

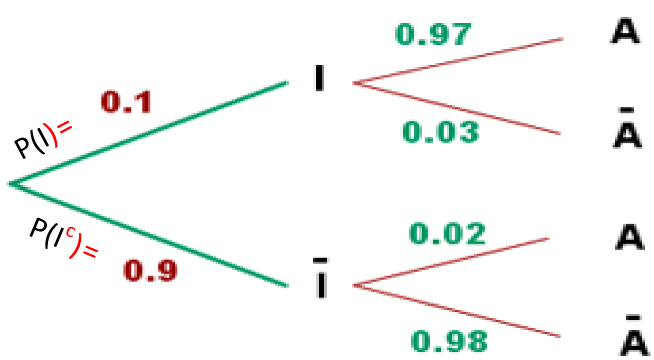
En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Solución:

Sean los sucesos:

I = Producirse incidente.

A = Sonar la alarma.



$$P\left(\bar{I}\ /\ A\right) = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.1 \cdot 0.97 + 0.9 \cdot 0.02} = 0.157$$

Ejemplo 3: Consideremos dos cajas, la caja 1 contiene 3 esferas blancas y 4 rojas y la caja 2 contiene 8 blancas y 4 rojas. Se selecciona una caja al azar y luego se extrae una esfera al azar. Hallar la probabilidad de que la esfera sea blanca.

Solución:

Sea A el evento de seleccionar la caja 1 y B el evento de seleccionar la caja 2, entonces *P(A)* = *P(B)* = 1/2 ya que cualquiera de las dos cajas tiene la misma probabilidad de ser extraída.

Sea C el evento de seleccionar una esfera blanca, entonces P(C/A) = 3/7 ya que en la caja 1 hay 3 esferas blancas en un total de 7 *y P(C/B) = 8/12* porque en la caja 2 hay 8 esferas blancas en un total de 12.

Ahora bien

P(C)= P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B) = 3/7 x 1/2 + 8/12 x 1/2 = 3/14 + 8/24 = 0.54761

Esto se conoce como la probabilidad total.