

PROBABILIDAD Y PRINCIPIO DE CONTEO

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO.

Si se desea realizar una actividad que consta de r pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de N_1 maneras o formas, el segundo paso de N_2 maneras o formas y el r -ésimo paso de N_r maneras o formas, entonces esta actividad puede ser llevada a efecto de;

$$N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r \text{ maneras o formas}$$

El principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos de la actividad deben ser llevados a efecto, uno tras otro.

Ejemplos:

- 1) Una persona desea construir su casa, para lo cual considera que puede construir los cimientos de su casa de cualquiera de dos maneras (concreto o block de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o lámina galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?

Solución:

Considerando que $r = 4$ pasos

$N_1 =$ maneras de hacer cimientos = 2

$N_2 =$ maneras de construir paredes = 3

$N_3 =$ maneras de hacer techos = 2

$N_4 =$ maneras de hacer acabados = 1

$$N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12 \text{ maneras de construir la casa}$$

El principio multiplicativo, el aditivo y las técnicas de conteo que posteriormente se tratarán nos proporcionan todas las maneras o formas posibles de como se puede llevar a cabo una actividad cualquiera.

- 2) ¿Cuántas placas para automóvil pueden ser diseñadas si deben constar de tres letras seguidas de cuatro números, si las letras deben ser tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9?, a. Si es posible repetir letras y números, b. No es posible repetir letras y números, c. Cuántas de las placas

diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D y empiezan por el cero, d. Cuantas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D seguida de la G.

Solución:

a. Considerando 26 letras del abecedario y los dígitos del 0 al 9

$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 75,760,000$ placas para automóvil que es posible diseñar

b. $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 78,624,000$ placas para automóvil

c. $1 \times 25 \times 24 \times 1 \times 9 \times 8 \times 7 = 302,400$ placas para automóvil

d. $1 \times 1 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 120,960$ placas para automóvil

3) ¿Cuántos números telefónicos es posible diseñar, los que deben constar de seis dígitos tomados del 0 al 9?, a. Considere que el cero no puede ir al inicio de los números y es posible repetir dígitos, b. El cero no debe ir en la primera posición y no es posible repetir dígitos, c. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b empiezan por el número siete?, d. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b forman un número impar?.

Solución:

a. $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900,000$ números telefónicos

b. $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136,080$ números telefónicos

c. $1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15,120$ números telefónicos

d. $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 5 = 67,200$ números telefónicos

PERMUTACIONES.

Para entender lo que son las permutaciones es necesario definir lo que es una combinación y lo que es una permutación para establecer su diferencia y de esta manera entender claramente cuando es posible utilizar una combinación y cuando utilizar una permutación al momento de querer cuantificar los elementos de algún evento.

COMBINACIÓN Y PERMUTACION.

COMBINACIÓN:

Es todo arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

PERMUTACIÓN:

Es todo arreglo de elementos en donde nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

Para ver de una manera objetiva la diferencia entre una combinación y una permutación, plantearemos cierta situación.

Suponga que un salón de clase está constituido por 35 alumnos. a) El maestro desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades tales como mantener el aula limpia o entregar material a los alumnos cuando así sea necesario.

b) El maestro desea que se nombre a los representantes del salón (Presidente, Secretario y Tesorero).

Solución:

a) Suponga que por unanimidad se ha elegido a Daniel, Arturo y a Rafael para limpiar el aula o entregar material, (aunque pudieron haberse seleccionado a Rafael, Daniel y a Enrique, o pudo haberse formado cualquier grupo de tres personas para realizar las actividades mencionadas anteriormente).

¿Es importante el orden como se selecciona a los elementos que forma el grupo de tres personas?

Reflexionando al respecto nos damos cuenta de que el orden en este caso no tiene importancia, ya que lo único que nos interesaría es el contenido de cada grupo, dicho de otra forma, ¿quiénes están en el grupo? Por tanto, este ejemplo es una combinación, quiere decir esto que las combinaciones nos permiten formar grupos o muestras de elementos en donde lo único que nos interesa es el contenido de los mismos.

b) Suponga que se han nombrado como representantes del salón a Daniel como Presidente, a Arturo como secretario y a Rafael como tesorero, pero resulta que a alguien se le ocurre hacer algunos cambios, los que se muestran a continuación:

CAMBIOS

PRESIDENTE:	Daniel	Arturo	Rafael	Daniel
SECRETARIO:	Arturo	Daniel	Daniel	Rafael
TESORERO:	Rafael	Rafael	Arturo	Arturo

Ahora tenemos cuatro arreglos, ¿se trata de la misma representación?

Creo que la respuesta sería no, ya que el cambio de función que se hace a los integrantes de la representación original hace que definitivamente cada una de las representaciones trabaje de manera diferente, ¿importa el orden de los elementos en los arreglos?. La respuesta definitivamente sería sí, luego entonces las representaciones antes definidas son diferentes ya que el orden o la forma en que se asignan las funciones sí importa, por lo tanto es este caso estamos tratando con permutaciones.

A continuación obtendremos las fórmulas de permutaciones y de combinaciones, pero antes hay que definir lo que es $n!$ (ene factorial), ya que está involucrado en las fórmulas que se obtendrán y usarán para la resolución de problemas.

$n!$ = al producto desde la unidad hasta el valor que ostenta n .

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$$

Ejemplo.

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 10 = 3,628,800$$

$$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 8 = 40,320$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 6 = 720, \text{ etc., etc.}$$

Obtención de fórmula de permutaciones.

Para hacer esto, partiremos de un ejemplo.

¿Cuántas maneras hay de asignar los cuatro primeros lugares de un concurso de creatividad que se verifica en las instalaciones de nuestro instituto, si hay 14 participantes?

Solución:

Haciendo uso del principio multiplicativo,

$$14 \times 13 \times 12 \times 11 = 24,024 \text{ maneras de asignar los primeros tres lugares del concurso}$$

Esta solución se debe, a que al momento de asignar el primer lugar tenemos a 14 posibles candidatos, una vez asignado ese lugar nos quedan 13 posibles candidatos para el segundo lugar, luego tendríamos 12 candidatos posibles para el tercer lugar y por último tendríamos 11 candidatos posibles para el cuarto lugar.

Luego si n es el total de participantes en el concurso y r es el número de participantes que van a ser premiados, y partiendo de la expresión anterior, entonces.

$$14 \times 13 \times 12 \times 11 = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)$$

si la expresión anterior es multiplicada por $(n - r)! / (n - r)!$, entonces

$$= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1) (n - r)! / (n - r)!$$

$$= n! / (n - r)!$$

Por tanto, la fórmula de permutaciones de r objetos tomados de entre n objetos es:

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Esta fórmula nos permitirá obtener todos aquellos arreglos en donde el orden es importante y solo se usen parte (r) de los n objetos con que se cuenta, además hay que hacer notar que no se pueden repetir objetos dentro del arreglo, esto es, los n objetos son todos diferentes.

Entonces, ¿ qué fórmula hay que usar para arreglos en donde se utilicen los n objetos con que se cuenta?

Si en la fórmula anterior se sustituye n en lugar de r , entonces.

$${}_n P_n = n! / (n - n)! = n! / 0! = n! / 1 = n!$$

Como $0! = 1$ de acuerdo a demostración matemática, entonces

$${}_n P_n = n!$$

Ejemplos:

- 1) ¿Cuántas representaciones diferentes serán posibles formar, si se desea que consten de Presidente, Secretario, Tesorero, Primer Vocal y Segundo Vocal?, sí esta representación puede ser formada de entre 25 miembros del sindicato de una pequeña empresa.

Solución:

Por principio multiplicativo:

$25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6,375,600$ maneras de formar una representación de ese sindicato que conste de presidente, secretario, etc., etc.

Por Fórmula:

$$n = 25, \quad r = 5$$

$${}_{25}P_5 = 25! / (25 - 5)! = 25! / 20! = (25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times \dots \times 1) / (20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 1) = 6,375,600 \text{ maneras de formar la representación}$$

2) a. ¿Cuántas maneras diferentes hay de asignar las posiciones de salida de 8 autos que participan en una carrera de fórmula uno? (Considere que las posiciones de salida de los autos participantes en la carrera son dadas totalmente al azar) b. ¿Cuántas maneras diferentes hay de asignar los primeros tres premios de esta carrera de fórmula uno?

Solución:

a. Por principio multiplicativo:

$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40,320$ maneras de asignar las posiciones de salida de los autos participantes en la carrera

Por Fórmula:

$$n = 8, \quad r = 8$$

$${}_8P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots \times 1 = 40,320 \text{ maneras de asignar las posiciones de salida} \\ \dots \text{etc., etc.}$$

b. Por principio multiplicativo:

$8 \times 7 \times 6 = 336$ maneras de asignar los tres primeros lugares de la carrera

Por fórmula:

$$n = 8, \quad r = 3$$

$${}_8P_3 = 8! / (8 - 3)! = 8! / 5! = (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \dots \times 1) / (5 \times 4 \times 3 \times \dots \times 1) = 336 \text{ maneras de} \\ \text{asignar los tres primeros lugares de la carrera}$$

- 3) ¿Cuántos puntos de tres coordenadas (x, y, z), será posible generar con los dígitos 0, 1, 2, 4, 6 y 9?, Si, a. No es posible repetir dígitos, b. Es posible repetir dígitos.

Solución:

a. Por fórmula

$$n = 6, \quad r = 3$$

$${}_6P_3 = 6! / (6 - 3)! = 6! / 3! = 6 \times 5 \times 4 \times 3! / 3! = 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ puntos posibles}$$

Nota: este inciso también puede ser resuelto por el principio multiplicativo

b. Por el principio multiplicativo

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ puntos posibles}$$

¿Cuál es la razón por la cual no se utiliza en este caso la fórmula?. No es utilizada debido a que la fórmula de permutaciones sólo se usa cuando los objetos no se repiten, esto quiere decir que en el inciso a. Los puntos generados siempre van a tener coordenadas cuyos valores son diferentes ejemplos (1, 2, 4), (2, 4, 6), (0, 4, 9), etc. etc., mientras que los puntos generados en el inciso b. Las coordenadas de los puntos pueden tener valores diferentes o repeticiones de algunos valores o pueden tener todas las coordenadas un mismo valor ejemplos (1, 2, 4), (1, 2, 2), (1, 1, 1), etc., etc.

- 4) a. ¿Cuántas maneras hay de asignar las 5 posiciones de juego de un equipo de básquetbol, si el equipo consta de 12 integrantes?, b. ¿Cuántas maneras hay de asignar las posiciones de juego si una de ellas solo puede ser ocupada por Uriel José Esparza?, c. ¿Cuántas maneras hay de que se ocupen las posiciones de juego si es necesario que en una de ellas este Uriel José Esparza y en otra Omar Luna?

Solución:

a. Por fórmula:

$$n = 12, \quad r = 5$$

$${}_{12}P_5 = 12! / (12 - 5)! = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95,040 \text{ maneras de asignar las cinco posiciones de juego}$$

a. Por principio multiplicativo:

$$1 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7,920 \text{ maneras de asignar las posiciones de juego}$$

Por fórmula:

$$1 \times {}_{11}P_4 = 1 \times 11! / (11 - 4)! = 11! / 7! = 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7,920 \text{ maneras de asignar las posiciones de juego con Uriel José en una determinada posición}$$

a. Por principio multiplicativo

$$1 \times 1 \times 10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ maneras de ocupar las diferentes posiciones de juego}$$

Por fórmula:

$$1 \times 1 \times {}_{10}P_3 = 1 \times 1 \times 10! / (10 - 3)! = 10! / 7! = 10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ maneras de ocupar las posiciones de juego con Uriel José y Omar Luna en posiciones previamente definidas}$$

- 5) Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar, si debe constar de dos letras, seguidas de cinco dígitos, las letras serán tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9. a. Considere que se pueden repetir letras y números, b. Considere que no se pueden repetir letras y números, c. ¿Cuántas de las claves del inciso b empiezan por la letra A y terminan por el número 6?, d. ¿Cuántas de las claves del inciso b tienen la letra R seguida de la L y terminan por un número impar?

Solución:

a. Por principio multiplicativo:

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 67,600,000 \text{ claves de acceso}$$

Por fórmula:

$${}_{26}P_2 \times {}_{10}P_5 = 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 19,656,000 \text{ claves de acceso}$$

a. **Por fórmula:**

$1 \times {}_{25}P_1 \times {}_9P_4 \times 1 = 1 \times 25 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 75,600$ claves de acceso que empiezan por la letra A y terminan por el número 6

b. **Por fórmula:**

$1 \times 1 \times {}_9P_4 \times 5 = 1 \times 1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15,120$ claves de acceso que tienen la letra R seguida de la L y terminan por un número impar.

PROBABILIDAD

En ocasiones cuando se habla de probabilidad o posibilidad de que un evento ocurra, se pierde la credibilidad acerca del evento en cuestión, pero ¿es posible tener siempre la certeza total en todo proyecto o actividad que se desea realizar?, es muy difícil tenerla, debido a que el llevar a efecto un proyecto cualquiera por más simple que este sea, éste está sujeto a una gran diversidad de factores que afectan su ocurrencia, ¿entonces que es lo más aconsejable para predecir su ocurrencia?, la *probabilidad* es la que nos ayuda en estos casos, ya que basándose en estadísticas, podemos cuantificar la posibilidad de ocurrencia de los eventos y por consiguiente tomar una buena decisión basados en esta información.

CONCEPTO.

La probabilidad se encarga de evaluar todas aquellas actividades en donde se tiene incertidumbre acerca de los resultados que se pueden esperar, esto quiere decir que la probabilidad está presente en casi en todas las actividades que se pretenda realizar, ejemplos:

- Cualquier proyecto de Ingeniería o de otras áreas
- Competencias deportivas
- Juegos de azar, etc., etc.

¿Cómo podemos calcular probabilidades?

1. Haciendo uso de las estadísticas.

En este caso, se hace uso de la información que se ha acumulado acerca del evento que nos interesa, y después de esto se procede a calcular las probabilidades requeridas.

Ejemplo. Determine la probabilidad de que en cierta línea de producción se manufacture un producto defectuoso, si se toma como referencia que la producción de la última semana en esta línea fue de 1,500 productos, entre los que se encontraron 8 productos defectuosos.

$$p(\text{producto defectuoso}) = \text{No de productos defectuoso} / \text{Total de productos producidos en la semana}$$
$$= 18 / 1500 = 0.012$$

Lo anterior nos indica que es muy probable que 1.2 productos de cada 100 que se manufacturen en esa línea serán defectuosos.

¿Por qué se utilizó para calcular las probabilidades la información de la semana inmediata anterior?. Debido a que esta refleja la situación que guarda actualmente la producción de la línea mencionada.

2. Basándose en la experimentación. Hay casos en los que después de repetir un número muy grande de veces un experimento, es posible determinar las probabilidades de ocurrencia de algunos eventos, tales como: La probabilidad de que aparezca águila al lanzar una moneda equilibrada, la probabilidad de que aparezca el número 3 en un dado, etc., etc.

Ejemplos:

$$p(\text{águila}) = 1/2 = 0.5$$

$$p(\text{aparezca el número 3}) = 1 / 6 = 0.1666$$

3. Asignando probabilidades. En este caso se hace uso de las probabilidades obtenidas mediante estadísticas y la experimentación y se asignan a los eventos previamente descritos y a partir de ellas se determinan probabilidades de otros eventos.

A continuación se definen algunas cuestiones implícitas en el cálculo de probabilidades.

a) Espacio muestral (Ω).- Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Es nuestro Universo.

Ejemplos:

1. Se lanza al aire un dado normal (perfectamente equilibrado), enumere los posibles resultados de este experimento.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Se lanza al aire dos veces una moneda normal, defina su espacio muestral.

$$\Omega = \{AA, AS, SA, SS\}$$

b) Evento A.- El evento A es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos:

1. Sea A el evento de que aparezca un número par en el lanzamiento de un dado, entonces;

$$A = \{2,4,6\}$$

2. Sea B el evento de que aparezcan dos águilas en tres lanzamientos de una moneda normal, entonces;

$$\text{Como } \Omega = \{AAA, AAS, SAA, ASA, ASS, SAS, SSA, SSS\}$$

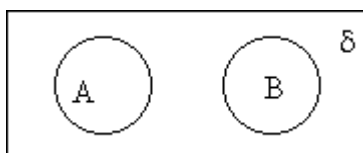
$$\text{Luego } B = \{AAS, SAA, ASA\}$$

a) Sea f un evento que carece de elementos.

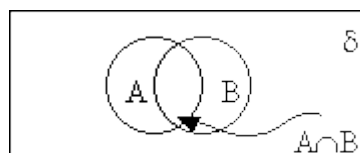
$$f = \{ \quad \} = \phi$$

Como se observa los experimentos y eventos probabilísticos se pueden expresar con la notación de conjuntos y a continuación se enumeran algunas operaciones que es posible realizar con los eventos.

1) $A \cup B$ Es el evento que ocurre si y solo si A ocurre o B ocurre o ambos ocurren.

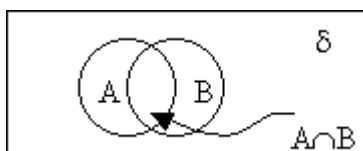


$$A \cup B = A + B$$



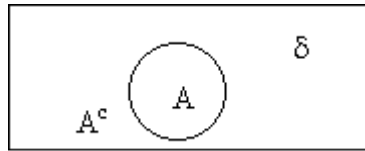
$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

2) $A \cap B$ Es el evento que ocurre si y solo si A y B ocurren a un mismo tiempo.

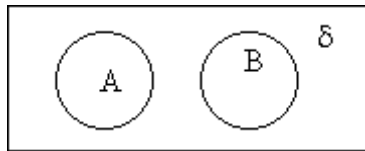


$$A \cap B = \emptyset$$

3) A^c Es el complemento de A. Es el evento que ocurre si y solo si A no ocurre.



1) Se dice que A y B son eventos mutuamente excluyentes o exclusivos si $A \cap B = \phi$



Ejemplo:

En un salón de clase hay 15 alumnos, 7 de los cuáles son de tercer semestre, 5 son de cuarto semestre y 3 son de quinto semestre de la carrera de Ingeniería Química, de los cuales 4, 2 y 1 respectivamente dominan el Inglés, si se selecciona un alumno al azar de este grupo, a. ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea de quinto semestre?, b. ¿cuál es la probabilidad de que sea de tercero o cuarto semestre?, c. ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado sea de tercer semestre y domine el inglés?, d. ¿cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado no domine el inglés?, e. Diga si los eventos T y Q son mutuamente excluyentes, diga si los eventos Q e I son mutuamente excluyentes?

Solución:

Empezaremos por definir algunos eventos;

T = evento de que un alumno sea de tercer semestre

Cu = evento de que un alumno sea de cuarto semestre

Q = evento de que un alumno sea de quinto semestre

I = evento de que un alumno domine el inglés

a. $p(\text{alumno seleccionado sea de quinto semestre}) = p(Q) = 3/15 = 0.2$

b. $p(\text{alumno seleccionado sea de tercero o cuarto semestre}) = p(T \cup Cu) =$

$= p(T) + p(Cu) = 7/15 + 5/15 = 12/15 = 0.8$

c. $p(\text{alumno sea de tercer semestre y domine el inglés}) = p(T \cap I) = 4/15 = 0.26667$

d. $p(\text{alumno seleccionado no domine el inglés}) = p(I^c) = 8/15 = 0.53333$

e. Los eventos T y Q son mutuamente excluyentes dado que $T \cap Q = \phi$

Los eventos Q e I no son eventos mutuamente excluyentes, ya que $Q \cap I = \{1\}$

Ya que hay un alumno que cumple con ambos eventos, es de quinto semestre y domina el inglés.

AXIOMAS Y TEOREMAS.

Para el cálculo de probabilidades hay que tomar en cuenta los Axiomas y Teoremas que a continuación se enumeran.

1) La probabilidad de que ocurra un evento A cualquiera se encuentra entre cero y uno.

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

2) La probabilidad de que ocurra el espacio muestral Ω debe de ser 1.

$$p(\Omega) = 1$$

3) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces la $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Generalizando:

Si se tienen n eventos mutuamente excluyentes o exclusivos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, entonces;

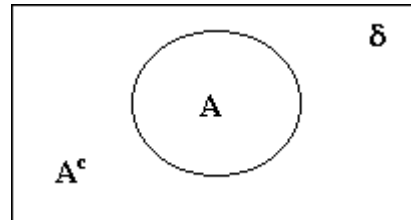
$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$

TEOREMAS

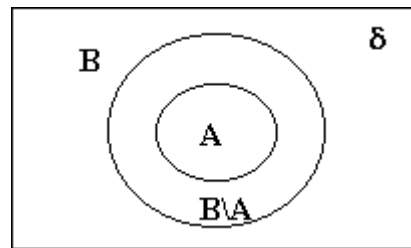
TEOREMA 1. Si ϕ es un evento nulo o vacío, entonces la probabilidad de que ocurra ϕ debe ser cero.

$$p(\phi) = 0$$

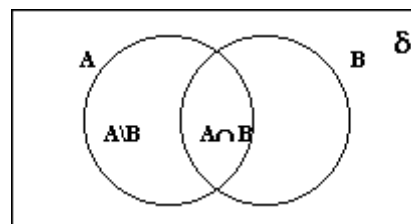
TEOREMA 2. La probabilidad del complemento de A, A^c debe ser, $p(A^c) = 1 - p(A)$



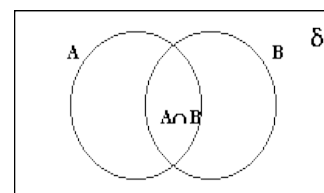
TEOREMA 3. Si un evento $A \subset B$, entonces la $p(A) \leq p(B)$.



TEOREMA 4. La $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$



TEOREMA 5. Para dos eventos A y B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.



Para tres eventos A, B y C, $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$.

