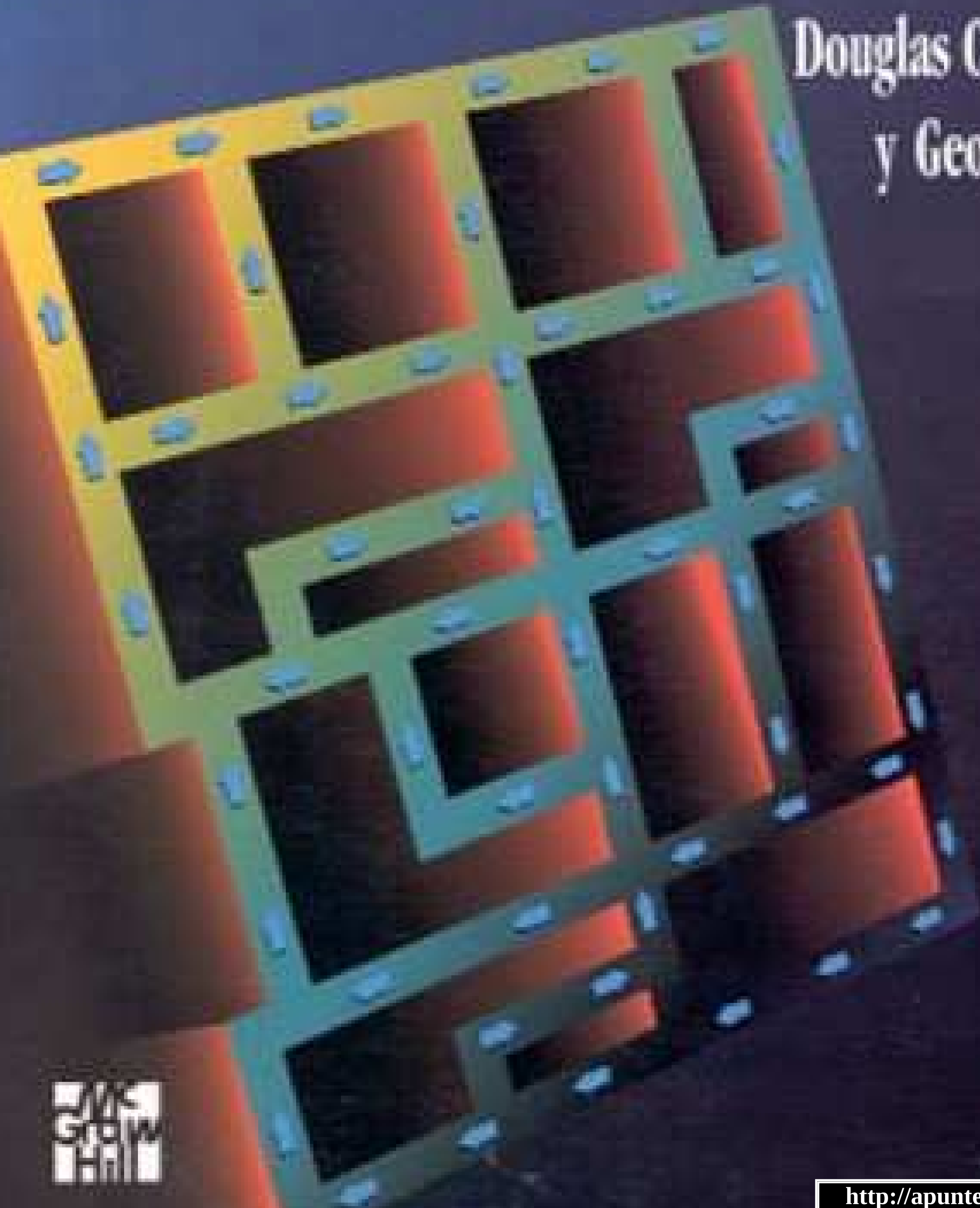
Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería

Douglas C. Montgomery
y George C. Runger



Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería

Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería

Douglas C. Montgomery
Arizona State University

George C. Runger
Rensselaer Polytechnic Institute

Traducción:
Edmundo G. Urbina Medal
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Autónoma Metropolitana,
Iztapalapa

Revisión técnica:
M. en C. Fernando Piña Soto
Profesor asociado
Universidad Autónoma Metropolitana,
Iztapalapa

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA
MADRID • NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN
SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

Prefacio

Para continuar compitiendo en los mercados nacional e internacional, la industria de cada país debe mejorar, de manera continua, la calidad de los productos y servicios que ofrece. Una parte importante de este esfuerzo por incrementar la calidad será realizado por ingenieros y científicos, ya que son ellos quienes diseñan y desarrollan nuevos productos, sistemas y procesos de fabricación, además de que perfeccionan los ya existentes. Los métodos estadísticos constituyen una herramienta importante en estas actividades porque proporcionan al ingeniero métodos descriptivos y analíticos que le permiten abordar la variabilidad de los datos que observa.

El presente libro es un texto a nivel introductorio para un primer curso en estadística y probabilidad aplicadas, para estudiantes de licenciatura en ingeniería y en ciencias físicas o químicas. Si bien muchos de los métodos que se presentan en la obra son básicos para el análisis estadístico en otras disciplinas (como el comercio o la administración, las ciencias naturales y las ciencias sociales), al escribirla se decidió orientar su contenido hacia estudiantes de ingeniería. Creemos que este enfoque es el que mejor se adapta a las necesidades de estos lectores, por que les permite concentrarse en las muchas aplicaciones que tiene de la estadística en diversas ramas de la ingeniería. Por otra parte, se ha hecho un gran esfuerzo para asegurar que todos los ejemplos y ejercicios tengan un contenido ingenieril, y en casi todos los casos se han empleado ejemplos con datos reales —algunos, tomados de publicaciones; otros, basados en nuestra experiencia como consultores.

Consideramos que los estudiantes de cualquiera de las ramas de la ingeniería deben tomar al menos un curso de estadística. Desafortunadamente, como consecuencia de otros requisitos para obtener la licenciatura, la mayoría sólo cursará una vez la asignatura. Por tanto, el libro fue escrito para ese curso único, aunque se ha incluido material suficiente para dos cursos, con la esperanza de que cada vez más estudiantes se animen a tomar otro curso al ver las importantes aplicaciones que tiene la estadística en su trabajo cotidiano. Por otra parte, creemos que el libro también puede servir como un útil libro de consulta.

ORGANIZACIÓN DEL LIBRO

El libro tiene un nivel matemático elemental; cualquier estudiante de ingeniería que haya cursado uno o dos semestres de cálculo no ha de tener ninguna dificultad para leer casi todo el texto. Nuestra intención es que el lector comprenda la metodología y su aplicación, y no tanto la teoría matemática que hay detrás de ella.

En el capítulo 1 se presenta una introducción al campo de la estadística, así como los métodos básicos de la estadística descriptiva. Además de los temas estándar (diagramas de tallo y hoja, diagramas de caja, histogramas, etc.), también se incluyen las gráficas de series de tiempo, diagrama de dígitos y líneas y la carta de control. Muchos de los datos en ingeniería dependen del tiempo, y en este primer capítulo el lector debe comenzar a darse cuenta de ello.

Los capítulos 2, 3, 4 y 5 abarcan los conceptos básicos de probabilidad, variables aleatorias continuas y discretas, valores esperados, distribuciones de probabilidad conjunta e independencia. Se proporciona un estudio razonablemente completo de estos temas, pero al mismo tiempo se evitan muchos detalles matemáticos o de índole más teórica.

En los capítulos 6, 7 y 8 presentan las herramientas básicas de la inferencia estadística: la estimación puntual, la estimación por intervalos y la prueba de hipótesis, temas claramente orientados hacia las aplicaciones. Con esto se busca interesar al estudiante en la forma en que estos métodos pueden emplearse para resolver problemas reales de la ingeniería, además de hacer que logre cierta comprensión sobre los conceptos que encierran. Por otra parte, el desarrollo de los conceptos se hace de una manera lógica y heurística, más que matemática.

Los capítulos 9 y 10 presentan la regresión lineal simple y múltiple. Al tratar la regresión lineal múltiple (capítulo 10), se hace un uso extenso del álgebra de matrices, ya que, para ser francos, éste es el único camino fácil para entender los conceptos, cuya presentación utilizando la aritmética escalar es, en el mejor de los casos, complicada; los autores han notado que los estudiantes de ingeniería tienen el conocimiento suficiente del álgebra de matrices para poder entender la presentación del material.

En los capítulos 11 y 12 se abordan los experimentos con uno y varios factores, respectivamente. Se hace hincapié en las nociones de aleatorización, formación de bloques, diseños factoriales, interacciones, análisis de datos gráfico y factoriales fraccionarios. El capítulo 13 proporciona una breve introducción a los métodos y aplicaciones de la estadística no paramétrica, mientras que el capítulo 14 ofrece una introducción al control estadístico de calidad, y se destacan la carta de control y los fundamentos del control estadístico de procesos.

Además de la usual recopilación de tablas y cartas estadísticas, en el apéndice se proporciona cierto material complementario de índole técnica, que incluye una introducción a los temas siguientes: funciones generadoras de momentos, técnica del cambio de variable, permutaciones y métodos de conteo, desarrollo de las distribuciones t y F, estimación bayesiana y el principio del cociente de verosimilitud. Este material puede ser de interés para algunos profesores y estudiantes, por lo que se ha proporcionado como referencia.

Cada capítulo tiene un extenso conjunto de ejercicios: los que aparecen al final de cada sección, que recalcan el material estudiado en ella; los ejercicios complementarios, que están al final del capítulo y abarcan todos los temas tratados en éste; y los ejercicios de comprensión, que a menudo hacen que el estudiante amplíe el material un poco o que lo aplique en alguna situación novedosa.

USO DEL LIBRO

El texto es muy flexible debido a que las ideas de los profesores sobre lo que debe ser un primer curso de estadística para ingenieros son muy diversas, al igual que las habilidades de distintos grupos de estudiantes. Por tanto, titubeamos para demasiadas sugerencias, pero a continuación explicamos cómo utilizar el libro.

Creemos que un primer curso de estadística para ingenieros debe ser principalmente un *curso de estadística aplicada*, no un curso de probabilidad. En el curso de estadística de un semestre que impartimos, se cubre todo el capítulo 1 (en tres o cuatro clases), se revisa el material sobre probabilidad dando mayor atención a la distribución normal (de seis a ocho clases), se estudia la mayor parte de los capítulos 7 y 8 sobre intervalos de confianza y pruebas (diez clases), se presentan los modelos de regresión del capítulo 9 (cuatro clases), se proporciona una introducción al diseño de experimentos tomada de los capítulos 11 y 12 (seis clases), y se presentan los conceptos básicos del control estadístico de procesos, incluyendo la carta de control de Shewhart del capítulo 14 (seis clases). Este esquema deja alrededor de tres o cuatro periodos para exámenes y repasos. Queremos recalcar que la finalidad de este curso es mostrar a los estudiantes la forma en que puede emplearse la estadística para resolver problemas reales de la ingeniería, y no para eliminar a los menos aptos en habilidades matemáticas. Por otra parte, éste no es el curso "elemental" que a menudo se imparte a todos los ingenieros.

Si se dispone de un segundo semestre, entonces es posible cubrir todo el contenido del libro, incluso parte del material que aparece en el apéndice, si esto resulta adecuado para el grupo. También pueden destinarse muchos de los problemas de tarea para ser resueltos en clase, con la finalidad de reforzar la comprensión de los conceptos. Es obvio que los temas más importantes del segundo curso son la regresión múltiple y el diseño de experimentos.

USO DE LA COMPUTADORA

En la práctica, los ingenieros utilizan las computadoras para aplicar los métodos estadísticos a la resolución de problemas. Por consiguiente, se recomienda integrar la computadora a la clase. En todo el libro se presenta la salida de Statgraphics y SAS como ejemplos representativos de lo que puede hacerse con el software para estadística disponible en la actualidad. En la enseñanza de esta materia los autores no sólo han utilizado estos paquetes; también han empleado EXECU-STAT, MINITAB, DESIGN-EASE y SPSS. No se llenó el libro con ejemplos de muchos paquetes diferentes, debido a que es más importante la forma en que el profesor integra el software en la clase, que el paquete utilizado para tal fin. Todos los datos que aparecen en el texto están disponibles en un disco de computadora.

En nuestros salones proporcionamos una computadora personal con pantalla de cristal líquido casi para cualquier clase, y mostramos la forma en que se implanta la técnica en la computadora tan pronto como ésta se estudia en la clase. Por otra parte, para los estudiantes existen versiones de bajo costo de muchos paquetes de software estadístico, así que ellos pueden adquirir su propia copia o utilizar los productos disponibles en las redes locales de computadoras personales. Hemos encontrado que este enfoque mejora mucho el avance del curso y la comprensión del material por parte del estudiante.

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro profundo reconocimiento a las organizaciones y personas que contribuyeron a la realización de este libro. Diversos revisores proporcionaron muchas sugerencias útiles; entre ellos: el Dr. Dwayne Rollier, Arizona State University; el Dr. Smiley

Cheng, University of Manitoba; el Dr. John Wilkinson, Rensselaer Polytechnic Institute y el Dr. J.E. Mann, Virginia Polytechnic Institute. Agradecemos al señor Dale Kennedy su asistencia editorial. Damos nuestras más sinceras gracias al Dr. Smiley Cheng por su autorización para adaptar muchas de las tablas de su excelente libro (escrito con el Dr. James Fu), *Statistical Tables for Classroom and Exam Room*. También agradecemos a John Wiley and Sons, a Prentice-Hall, a Biometrika Trustees, a The American Statistical Association, al Institute of Mathematical Statistics y a los editores de *Biometrics*, por permitirnos usar material con derechos reservados.

Contenido

9 REGRESIÓN LINEAL SIMPLE Y CORRELACIÓN 471

10 REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE 531

12 DISEÑO DE EXPERIMENTOS CON VARIOS FACTORES 686

13 ESTADÍSTICAS NO PARAMÉTRICAS 802

1 Introducción y estadística descriptiva

1-1 PANORAMA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

1-1.1 ¿Qué es la estadística?

El campo de la estadística tiene que ver con la recopilación, presentación, análisis y uso de datos para tomar decisiones y resolver problemas. Cualquier persona, tanto en su carrera profesional como en la vida cotidiana recibe información en forma de datos a través de periódicos, de la televisión y de otros medios. A menudo es necesario obtener alguna conclusión a partir de la información contenida en los datos, por eso será útil para cualquier persona tener cierta comprensión de la estadística. Puesto que los ingenieros y los científicos obtienen y analizan datos de manera rutinaria, el conocimiento de la estadística tiene una importancia especial en estos campos. De manera específica, el conocimiento de la estadística y la probabilidad puede constituirse en una herramienta poderosa para ayudar a los científicos e ingenieros a diseñar nuevos productos y sistemas, a perfeccionar los existentes y a diseñar, desarrollar y mejorar los procesos de producción. Este libro busca dotar a ingenieros y científicos con las herramientas estadísticas básicas que les permitan practicar con éxito esos aspectos de sus profesiones.

1-1.2 El papel de la estadística en la ingeniería y en la ciencia

La importancia de la estadística en la ingeniería, la ciencia y la administración ha sido subrayada por la participación de la industria en el aumento de la calidad. Muchas compañías se han dado cuenta de que la baja calidad de un producto (ya sea en la forma de defectos de fabricación, en una baja confiabilidad en su rendimiento, o en ambos), tiene un efecto muy pronunciado en la productividad global de la compañía, en el mercado y la posición competitiva y, finalmente, en la rentabilidad de la empresa. Mejorar estos aspectos de la calidad puede eliminar el desperdicio; disminuir la cantidad de material de desecho, la necesidad de volver a maquilar piezas, los requerimientos para inspección y prueba y las pérdidas por garantía; además de mejorar la satisfacción del consumidor y permitir que la empresa se convierta en un productor de alta calidad y bajo costo en el mercado. La estadística es un elemento decisivo en el incremento de la calidad, ya que las técnicas estadísticas pueden emplearse para describir y comprender la **variabilidad**.

Virtualmente todos los procesos y sistemas de la vida real exhiben variabilidad. Por ejemplo, considere la situación donde, de un proceso de maquinado, se seleccionan varios componentes del motor de una aeronave y se mide la altura de la turbina del propulsor (una dimensión crítica) de cada parte. Si el instrumento de medición tiene una resolución suficiente, la altura de cada turbina será diferente; esto es, habrá variabilidad en la dimensión. Otro ejemplo: si se cuenta el número de defectos en los gabinetes para computadoras personales, se encontrará cierta variabilidad en los conteos, ya que algunos gabinetes tendrán pocos defectos, mientras que otros tendrán muchos. Esta noción de variabilidad se extiende a todos los ambientes. Existe variabilidad en el espesor del recubrimiento de óxido en las pastillas de silicio, en el rendimiento por hora de un proceso químico, en el número de errores en los dibujos de ingeniería y en el tiempo necesario para ensamblar el motor de un automóvil.

¿Por qué se presenta la variabilidad? En general, **la variabilidad es el resultado de cambios en las condiciones bajo las que se hacen las observaciones**. En el contexto de la manufactura, estos cambios pueden ser diferencias en las propiedades de los materiales utilizados, en la forma en que trabajan los obreros, en las variables del proceso (tales como la temperatura, la presión o el tiempo de ocupación) y en factores ambientales (como la humedad relativa). La variabilidad también se presenta debido al sistema de medición utilizado. Por ejemplo, la medición obtenida a partir de una escala puede depender del lugar del panel en que se coloque el objeto que se ha de medir. El muestreo también puede ser causa de variabilidad. Por ejemplo, supóngase que un lote de 5000 circuitos integrados contiene exactamente 50 circuitos defectuosos. Si se inspeccionan los 5000 dispositivos, y el proceso de inspección es perfecto (sin error en la inspección o en la medición), entonces se encontrarán 50 circuitos defectuosos. Ahora bien, supóngase que se selecciona una muestra de 100 dispositivos; es probable que alguno de los dispositivos en la muestra esté defectuoso. De hecho, lo que se espera es que la muestra contenga alrededor de un uno por ciento de circuitos defectuosos (ya que el lote contiene $50/5000 \times 100 = 1\%$ de artículos defectuosos), pero esta cantidad puede ser cero, dos o cinco por ciento de circuitos defectuosos, dependiendo de los dispositivos específicos contenidos en la muestra. Es así como el proceso de muestreo introduce cierta variabilidad en los resultados observados en el sentido en que la proporción de unidades defectuosas puede cambiar de la proporción real de éstas.

El campo de la estadística y la probabilidad consiste de métodos tanto para describir y modelar la variabilidad, como para tomar decisiones en presencia de ésta. En la **estadística inferencial** lo que se desea hacer es tomar una decisión acerca de una población en particular. El término *población* se refiere a la recolección de mediciones de todos los elementos del universo con respecto al cual se quieren obtener conclusiones o tomar decisiones. Por ejemplo, la población puede ser el lote de 5000 circuitos integrados del párrafo anterior. Supóngase que el fabricante está interesado en la ganancia del transistor de un circuito en particular de cada uno de los dispositivos. Los distintos niveles que puede tener la ganancia del transistor pueden considerarse como la población de interés. Por tanto, cada valor de la población es una medición numérica, tal como 5.10 o 5.24; en consecuencia, los datos se conocen como *variables* o *datos numéricos*. Por otra parte, es posible que el fabricante esté interesado en determinar si el dispositivo produce o no una ganancia que cumpla con algún requisito de diseño. En este caso la población se considera como formada por *datos de atributo*, en los que a cada dispositivo se le asigna el valor de uno si la unidad no satisface el requisito de diseño, y cero si cumple con él. En este libro se presentan técnicas para tratar con datos variables y con datos de atributos.

En la mayoría de las aplicaciones de la estadística, los datos disponibles consisten de una **muestra** de la población de interés. Esta muestra es sólo un subconjunto de observaciones seleccionadas de una población. En el ejemplo de los circuitos integrados, supóngase que la muestra está formada por cinco dispositivos, seleccionados de un lote de 5000. Las ganancias del transistor observadas en estos dispositivos son 5.10, 5.24, 5.13, 5.19 y 5.08. El interés puede centrarse en cuestiones como las siguientes: "¿La información contenida en esta muestra lleva a la conclusión de que la ganancia del transistor es menor que 5.50?", o "¿Cuánta confianza puede tenerse en que la ganancia del transistor se encuentre en el intervalo que va de 5.00 a 5.50?". Los métodos de la **estadística inferencial** se emplean para dar respuesta a estas preguntas, y a otras del mismo tipo.

El campo de la estadística inferencial se ha desarrollado principalmente desde comienzos de este siglo. Es resultado de los métodos para organizar y resumir datos, cuyos orígenes se remontan a varios siglos atrás. Estos métodos para resumir y organizar datos se denominan **estadística descriptiva**. La mayor parte del uso moderno de la estadística, particularmente en la ciencia y la ingeniería, se dirige más hacia la inferencia que a la descripción. Por ejemplo, un ingeniero que diseña un nuevo circuito de computadora fabricará una muestra (prototipo) de ellos, y entonces querrá obtener conclusiones sobre la forma en que estos dispositivos funcionarán una vez que se produzcan a gran escala.

El enfoque principal de este libro se encuentra en las técnicas de la estadística inferencial que son de más utilidad para los ingenieros y científicos. El resto de este capítulo presenta algunas técnicas de estadística descriptiva útiles. Los capítulos 2 a 5 presentan los conceptos básicos de la **probabilidad**. El conocimiento de este tema constituye la base que permite comprender la forma en que se desarrollan las técnicas de la inferencia estadística y la toma de decisiones, por qué funcionan, y cómo pueden presentarse e interpretarse de manera correcta las conclusiones obtenidas con estos procedimientos. Así pues, la probabilidad es el lenguaje y la fundamentación matemática de la estadística inferencial, al igual que las reglas de la gramática proporcionan las bases para organizar ideas a partir de las palabras que forman la lengua. Los capítulos 6 a 8 definen e ilustran tres procedimientos inferenciales importantes: la **estimación puntual de parámetros**, la **estimación por intervalos de confianza** y la **prueba de hipótesis**. Muchos problemas de la ingeniería se pueden formular y resolver de manera eficaz con el empleo de estos métodos. En los capítulos 9 a 14 se estudia la manera en que estos procedimientos forman la base del diseño de investigaciones experimentales, del análisis de los datos resultantes, de la construcción de modelos que ayuden a explorar las relaciones entre varias variables, y el aumento en la calidad de las actividades de ingeniería de diseño y manufactura.

1-1.3 Las computadoras y la estadística

La computadora se ha convertido en una herramienta importante en la presentación y el análisis de datos. Si bien muchas técnicas estadísticas sólo necesitan una calculadora de mano, cuyo empleo consume mucho tiempo y esfuerzo, la computadora realiza las tareas con mucha mayor eficiencia.

La mayor parte del análisis estadístico se realiza utilizando una biblioteca de programas estadísticos. El usuario introduce los datos y luego selecciona los tipos de análisis y la presentación de los resultados que le interesan. Los paquetes de software estadístico están disponibles para grandes sistemas de cómputo y para computadoras personales. Entre los paquetes más utilizados están SAS (Statistical Analysis System), para grandes sistemas y para computadoras personales, y el Statgraphics, para computadoras personales. En este libro se presentan algunos ejemplos de la salida generada por estos paquetes, pero no se proporciona información sobre cómo introducir y editar datos o acerca del uso de los comandos. El lector encontrará estos paquetes (u otros similares), disponibles en la institución donde estudia, junto con la asesoría local para su empleo.

1-2 PRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS DATOS

La estadística descriptiva puede dividirse en dos grandes áreas: métodos gráficos y métodos numéricos. En esta sección se presentan varias técnicas gráficas para mostrar y resumir datos, y en las secciones 1-3 y 1-4 se presenta un resumen de varios métodos numéricos. En lo referente a la notación, n representa el número de observaciones en un conjunto de datos; las observaciones están representadas por una variable con subíndice (por ejemplo $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Así, la representación de los cinco valores, $n = 5$, de la resistencia a la tensión del concreto medidos por un ingeniero civil, será: $x_1 = 2310$, $x_2 = 2325$, $x_3 = 2315$, $x_4 = 2340$ y $x_5 = 2335$ (las unidades son psi).

1-2.1 Diagrama de puntos y diagrama tallo y hoja

Montgomery (1991a) describe un experimento en el que un ingeniero agrega un polímero de látex a un mortero de cemento portland, para determinar los efectos del polímero sobre la resistencia a la tensión (en kgf/cm^2). Los datos obtenidos de este experimento son 16.85, 16.40, 17.21, 16.35, 16.52, 17.04, 16.96, 17.15, 16.59 y 16.57. En la figura 1-1 aparecen

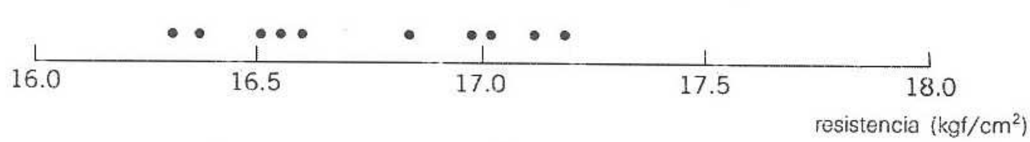


Figura 1-1 Diagrama de puntos para la resistencia a la tensión de un mortero de cemento portland modificado.

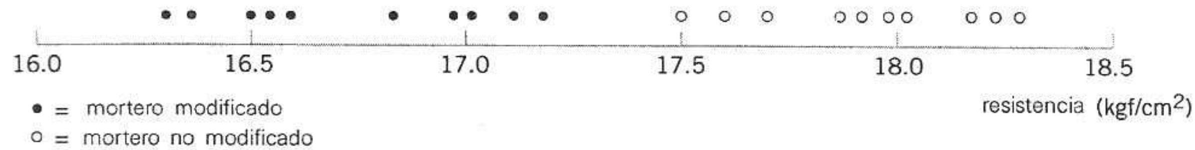


Figura 1-2 Diagrama de puntos para los datos de resistencia a la tensión.

estos datos en un **diagrama de puntos**. El diagrama de puntos es una gráfica muy útil para visualizar un conjunto pequeño de datos; por ejemplo, de unas 20 observaciones. La gráfica permite ver con rapidez y facilidad la **ubicación** o **tendencia central** de los datos, así como su **dispersión** o **variabilidad**. Por ejemplo, nótese que la parte media de los datos está muy próxima a 16.8, y que los valores de resistencia a la tensión caen dentro del intervalo definido por los valores 16.3 y 17.2 kgf/cm^2.

A menudo, los diagramas de puntos son útiles al comparar dos o más conjuntos de datos. Por ejemplo, los siguientes son diez datos de resistencia a la tensión de un mortero portland sin modificar: 17.50, 17.63, 18.25, 18.00, 17.86, 17.75, 18.22, 17.90, 17.96 y 18.15. El diagrama de puntos de la figura 1-2 muestra los dos conjuntos de mediciones de resistencia a la tensión, donde los puntos sólidos corresponden al mortero modificado, y los círculos, al mortero no modificado. Nótese que el diagrama de puntos revela de inmediato que el mortero modificado parece tener una menor resistencia a la tensión, pero que la variabilidad inherente *a* ambos grupos de mediciones es casi la misma.

Si el número de observaciones es pequeño, a menudo es difícil identificar algún patrón de variación específico; sin embargo, con frecuencia el diagrama de puntos es útil y puede proporcionar información sobre características poco usuales de los datos. Cuando el número de observaciones es moderadamente grande, pueden ser más útiles otros tipos de gráficas.

Por ejemplo, considérense los datos de la tabla 1-1, los cuales representan la resistencia a la tensión, en libras por pulgada cuadrada (psi), de 80 muestras de una nueva aleación de aluminio y litio, que está siendo evaluada como posible material para la fabricación de elementos estructurales de aeronaves. Los datos fueron registrados conforme se realizaba la prueba, y en este formato no conllevan mucha información con respecto a la resistencia a la tensión. No es fácil responder a preguntas tales como "¿Qué porcentaje de las muestras fallaron debajo de los 120 psi?". Dado que se tienen muchas observaciones, la construcción de un diagrama de puntos para estos datos es ineficiente; existen presentaciones visuales más eficaces para conjuntos grandes de datos.

Tabla 1-1 Resistencia a la tensión de 80 muestras de aleación de aluminio-litio

105	221	183	186	121	181	180	143
97	154	153	174	120	168	167	141
245	228	174	199	181	158	176	110
163	131	154	115	160	208	158	133
207	180	190	193	194	133	156	123
134	178	76	167	184	135	229	146
218	157	101	171	165	172	158	169
199	151	142	163	145	171	148	158
160	175	149	87	160	237	150	135
196	201	200	176	150	170	118	149

Tallo	Hoja	Frecuencia
7	6	1
8	7	1
9	7	1
10	5 1	2
11	5 8 0	3
12	1 0 3	3
13	4 1 3 5 3 5	6
14	2 9 5 8 3 1 6 9	8
15	4 7 1 3 4 0 8 8 6 8 0 8	12
16	3 0 7 3 0 5 0 8 7 9	10
17	8 5 4 4 1 6 2 1 0 6	10
18	0 3 6 1 4 1 0	7
19	9 6 0 9 3 4	6
20	7 1 0 8	4
21	8	1
22	1 8 9	3
23	7	1
24	5	1

Figura 1-3 Diagrama de tallo y hoja para los datos de resistencia a la tensión de la tabla 1-1.

El **diagrama de tallo y hoja** es una buena manera de obtener una presentación visual informativa del conjunto de datos $x_1, x_2, \ldots, x_m$, donde cada número x_i está formado al menos por dos dígitos. Para construir un diagrama de este tipo, los números x_i se dividen en dos partes: un **tallo**, formada por uno o más de los dígitos principales, y una **hoja**, la cual contiene el resto de los dígitos. Para ilustrar lo anterior, si los datos contienen información sobre el porcentaje entre 0 y 100 de artículos defectuosos en lotes de pastillas de semiconductor, entonces el valor 76 puede dividirse en un tallo 7 y una hoja 6. En general, debe escogerse un número relativamente pequeño de tallos en comparación con el número de observaciones. Lo usual es seleccionar entre 5 y 20 tallos. Una vez elegido el conjunto de tallos, éstos se enlistan en la parte izquierda del diagrama. Al lado de cada tallo, se ponen todas las hojas que corresponden a los valores observados, ordenados tal como se encuentran en el conjunto de datos.

EJEMPLO 1-1

Para ilustrar la construcción de un diagrama de tallo y hoja, considérense los datos sobre resistencia a la tensión que aparecen en la tabla 1-1. En este caso se seleccionan como tallos los números 7, 8, 9, . . . , 24. La figura 1-3 presenta el diagrama resultante. La última columna del diagrama es una frecuencia del número de hojas asociada con cada tallo. La inspección de esta gráfica revela de inmediato que la mayor parte de los valores de resistencia a la tensión se encuentran entre 110 y 200 psi, y que el valor central está en algún punto entre 150 y 160 psi. Por otra parte, las resistencias están distribuidas casi simétricamente alrededor del valor central. El diagrama permite determinar con rapidez algunas características importantes de los datos, que no son de inmediato obvias en la presentación original de los datos dada en la tabla 1-1.

En algunos conjuntos de datos puede ser deseable proporcionar más clases o tallos. Una manera de hacer esto es modificando los tallos originales de la siguiente manera: se divide el tallo 5 (por ejemplo) en dos nuevos tallos, 5L y 5U. El tallo 5L tiene las hojas 0, 1, 2, 3 y 4, y el tallo 5U tiene las hojas 5, 6, 7, 8 y 9. Esto duplica el número de tallos originales. Puede cuadruplicarse el número de tallos originales si se definen cinco tallos nuevos: 5z con las hojas 0 y 1, 5t (para los números dos y los números tres), con las hojas 2 y 3, 5f (para los números cuatro y cinco) con las hojas 4 y 5, 5s (para los números seis y siete) con las hojas 6 y 7, y 5e con las hojas 8 y 9.

EJEMPLO 1-2

La figura 1-4 ilustra el diagrama de tallo y hoja para 25 observaciones del rendimiento por lote de un proceso químico. En la figura 1-4*a* se han utilizado los números 6, 7, 8 y 9 como tallos. Esto produce muy pocos tallos, con lo que el diagrama no proporciona mucha información sobre los datos. En la figura 1-4*b* se ha dividido cada tallo en dos partes, con lo que se tiene una presentación más adecuada de los datos. La figura 1-4*c* ilustra un diagrama en el que cada tallo se ha dividido en cinco partes. En esta gráfica existen muchos tallos, lo que da como resultado una presentación que no dice mucho con respecto a la configuración de los datos.

~~Hoja~~ Tallo	~~Tallo~~ hoja
6	1 3 4 5 5 6
7	0 1 1 3 5 7 8 8 9
8	1 3 4 4 7 8 8
9	2 3 5

(a)

Hoja	Tallo
6L	1 3 4
6U	5 5 6
7L	0 1 1 3
7U	5 7 8 8 9
8L	1 3 4 4
8U	7 8 8
9L	2 3
9U	5

(b)

Hoja	Tallo
6z	1
6t	3
6f	4 5 5
6s	6
6e	
7z	0 1 1
7t	3
7f	5
7s	7
7e	8 8 9
8z	1
8t	3
8f	4 4
8s	7
8e	8 8
9z	
9t	2 3
9f	5
9s	
9e	

(c)

Figura 1-4 Diagramas de tallo y hoja para el ejemplo 1-2.

La figura 1-5 presenta la gráfica de tallo y hoja de los datos de resistencia a la tensión de la tabla 1-1, producida por el paquete Statgraphics. El software utiliza tallos un poco diferentes de los de la figura 1-2. (El usuario no tiene control sobre este aspecto.) El programa también forma dos categorías adicionales de observaciones: "LO", que contiene los valores extremos más pequeños, 76 y 87, y "HI", con los valores extremos más grandes, 237 y 245. Nótese también que la computadora ordena las hojas de cada tallo de menor a mayor. Esta forma de la gráfica se conoce como **diagrama de tallo y hoja ordenado en pantalla.** Esto no se hace cuando la gráfica se construye de manera manual, ya que es una labor que consume mucho tiempo. La computadora añade una columna en la parte izquierda de los tallos; esta columna proporciona un conteo de las observaciones que están en cada tallo y por encima de él en la mitad superior del diagrama, así como un conteo de las observaciones que están en cada tallo y por debajo de él en la mitad inferior del diagrama. En el tallo de la parte media (16), la columna indica el número de observaciones que corresponden a dicho tallo.

1-2.2 Distribución de frecuencias e histograma

La **distribución de frecuencias** ofrece un resumen más compacto de los datos que el diagrama de tallo y hoja. Para construir una distribución de frecuencias, primero se divide el rango de los datos en intervalos, los cuales se conocen como **intervalos de clase** o **celdas.** Si es posible, las clases deben tener el mismo ancho con la finalidad de mejorar la información visual en la distribución de frecuencias. Para la selección del número de clases debe emplearse cierto criterio de modo que pueda desarrollarse un diagrama razonable. El

```
Stem-and-leaf display for strength: unit = 1      1:2 represents 12

              LO : 76, 87

   3           9 : 7
   5          10 : 1 5
   8          11 : 0 5 8
  11          12 : 0 1 3
  17          13 : 1 3 3 4 5 5
  25          14 : 1 2 3 5 6 8 9 9
  37          15 : 0 0 1 3 4 4 6 7 8 8 8 8
 (10)         16 : 0 0 0 3 3 5 7 7 8 9
  33          17 : 0 1 1 2 4 4 5 6 6 8
  23          18 : 0 0 1 1 3 4 6
  16          19 : 0 3 4 6 9 9
  10          20 : 0 1 7 8
   6          21 : 8
   5          22 : 1 8 9

              HI : 237, 245
```

Figura 1-5 Diagrama de tallo y hoja generado por Statgraphics.

Tabla 1-2 Distribución de frecuencias para los datos de resistencia a la tensión, de la tabla 1-1

Intervalo de clase (psi)	Conteo	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulativa
$70 \leq x < 90$	𝍷𝍷	2	0.0250	0.0250
$90 \leq x < 110$	𝍷𝍷𝍷	3	0.0375	0.0625
$110 \leq x < 130$	𝍸 𝍷	6	0.0750	0.1375
$130 \leq x < 150$	𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	14	0.1750	0.3125
$150 \leq x < 170$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷	22	0.2750	0.5875
$170 \leq x < 190$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷	17	0.2125	0.8000
$190 \leq x < 210$	𝍸 𝍸	10	0.1250	0.9250
$210 \leq x < 230$	𝍷𝍷𝍷𝍷	4	0.0500	0.9750
$230 \leq x < 250$	𝍷𝍷	2	0.0250	1.0000

número de clases depende del número de observaciones y de la dispersión de los datos. En general, una distribución de frecuencias que emplea muy pocas o demasiadas clases no contiene mucha información. Hemos visto que, en muchos casos, resulta satisfactorio usar entre cinco y 20 clases, y que el número de clases debe aumentar en función de n. En la práctica se obtienen buenos resultados si se hace la selección del número de clases aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de observaciones.

En la tabla 1-2 se presenta una distribución de frecuencias para los datos de resistencia a la tensión, de la tabla 1-1. Puesto que el conjunto de datos contiene 80 observaciones, y dado que $\sqrt{80} \simeq 9$, entonces ocho o nueve clases proporcionarán una distribución de frecuencias satisfactoria. Los datos más grande y más pequeño son 245 y 76, respectivamente, de modo que las clases deben abarcar al menos un rango de $245 - 76 = 169$ unidades en la escala psi. Si se desea que el límite inferior de la primera clase comience un poco antes del valor más pequeño de los datos, y que el límite superior de la última clase sea un poco más grande que el mayor valor en los datos, entonces tal vez sea conveniente comenzar la distribución de frecuencias en 70 y terminarla en 250. Éste es un intervalo o rango de 180 unidades psi. Por tanto, nueve clases, cada una con un ancho de 20 psi, proporcionarán una distribución de frecuencias razonable; es por esto que la distribución de frecuencias de la tabla 1-2 está basada en nueve clases.

La cuarta columna de la tabla 1-2 contiene una **distribución de frecuencias relativa**. Las frecuencias relativas se obtienen dividiendo la frecuencia observada en cada clase entre el número total de observaciones. La última columna de la misma tabla expresa las frecuencias relativas sobre una base acumulativa. A menudo, las distribuciones de frecuencias son más fáciles de interpretar que las tablas de datos. Por ejemplo, a partir de la tabla 1-2 es muy fácil ver que la mayor parte de las muestras tienen una resistencia a la tensión entre 130 y 190 psi, y que el 97.5% de ellas están por debajo de los 230 psi.

También es útil presentar la distribución de frecuencias en forma gráfica, tal como se muestra en la figura 1-6. Esta gráfica recibe el nombre de **histograma**. Para dibujar un histograma, el eje horizontal se utiliza para representar la escala de medición y para dibujar las fronteras de las clases. El eje vertical representa la escala de frecuencia (o de frecuencia relativa). Si los intervalos de clase tienen el mismo ancho, entonces las alturas de los rectángulos dibujados en los histogramas son proporcionales a las frecuencias. Si los interva-

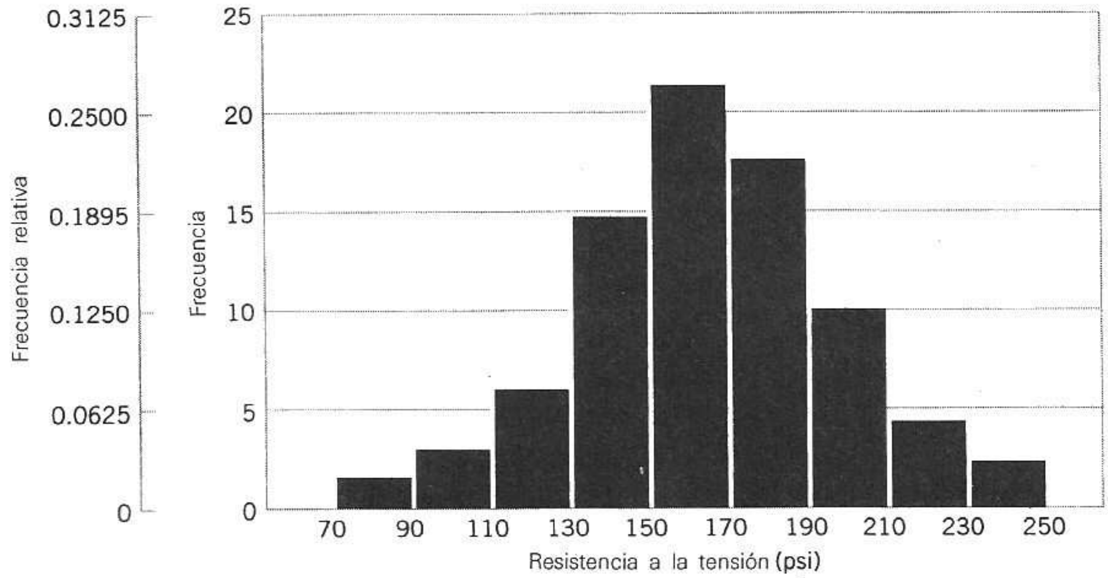


Figura 1-6 Histograma de resistencia a la tensión, correspondiente a 80 muestras de aleación aluminio-litio.

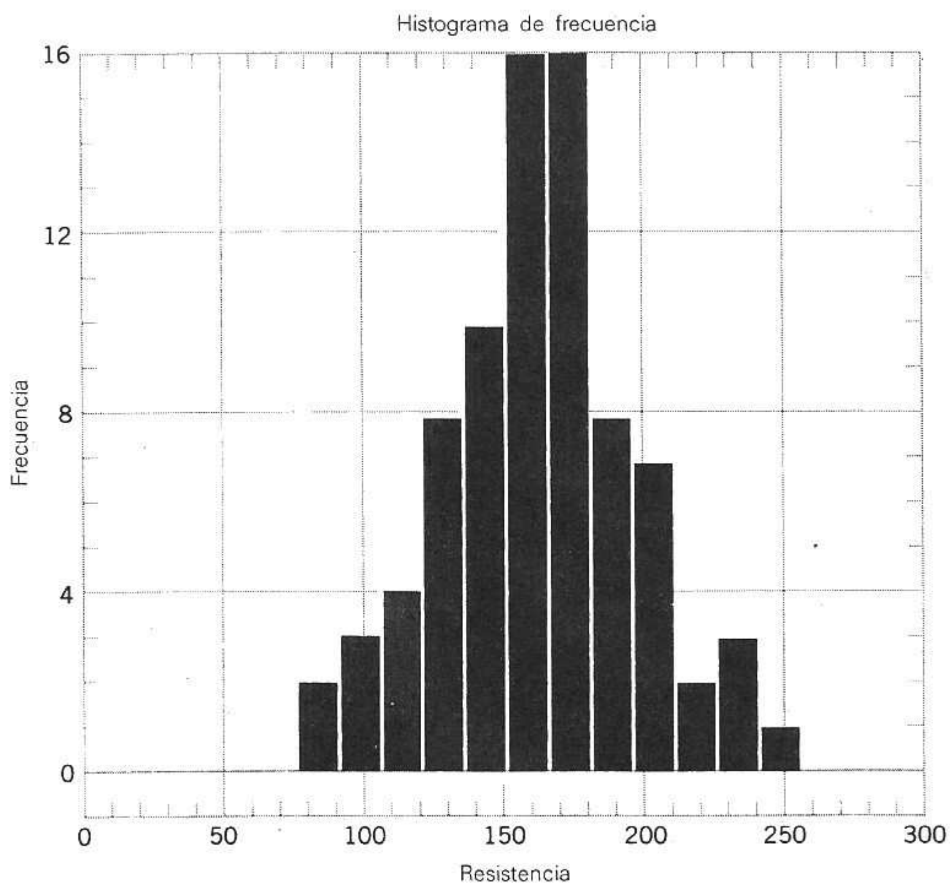


Figura 1-7 Histograma de los datos de resistencia a la tensión, generado por Statgraphics con 20 clases.

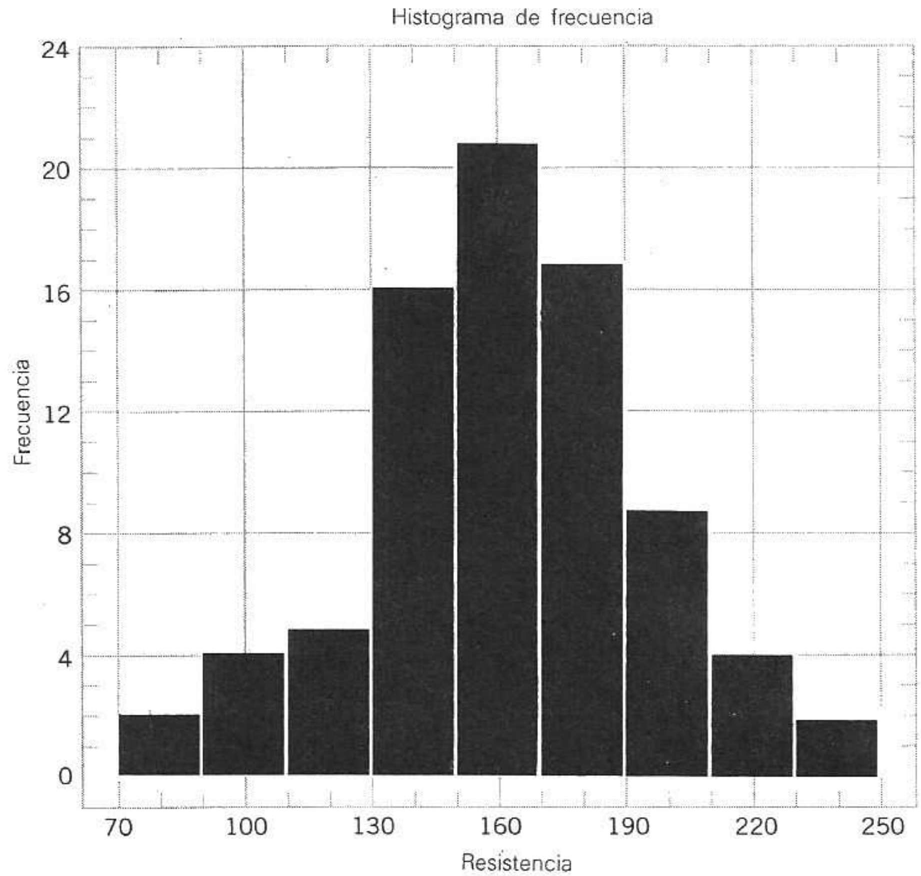


Figura 1-8 Histograma de los datos de resistencia a la tensión, generado por Statgraphics con nueve clases.

los de clase no tienen el mismo ancho, entonces se acostumbra dibujar rectángulos cuyas áreas sean proporcionales a las frecuencias. Sin embargo, los histogramas son más fáciles de interpretar si los intervalos de clase tienen el mismo ancho. El histograma, al igual que la gráfica de tallo y hoja, proporciona una impresión visual del aspecto que tiene la distribución de las mediciones, así como información sobre la dispersión de los datos. En la figura 1-6, nótese la simétrica forma de campana de la distribución de las mediciones de resistencia.

Al pasar ya sea de los datos originales o del diagrama de tallo y hoja a la distribución de frecuencias o histograma, se pierde parte de la información debido a que ya no se tienen las observaciones. Sin embargo, esta pérdida en la información a menudo es pequeña si se le compara con la concisión y la facilidad de interpretación ganada al utilizar la distribución de frecuencias y el histograma.

La figura 1-7 presenta un histograma de los datos de resistencia a la tensión generado por el paquete Statgraphics. Para hacer la gráfica se utilizaron valores "prestablecidos", los que dan 20 clases con valores inicial y final de 0 y 300, respectivamente. Los autores han notado que los histogramas pueden exhibir cierta sensibilidad con respecto al número de clases y al ancho de éstos. Para conjuntos pequeños de datos, los histogramas pueden cambiar claramente de apariencia si el número de clases o el ancho de éstas cambia. Los histogramas son más estables si el conjunto de datos es grande, de preferencia, de 75 a 100 o más datos. La figura 1-8 muestra el histograma para los datos de resistencia a la tensión con nueve clases, comenzando en 70 psi y terminando en 250 psi. El histograma tiene una apariencia similar a la del histograma de la figura 1-6. Puesto que el número de observaciones es moderadamente grande ($n = 80$), la selección del número de clases no es en especial importante, y tanto la figura 1-7 como la 1-8 llevan información semejante.

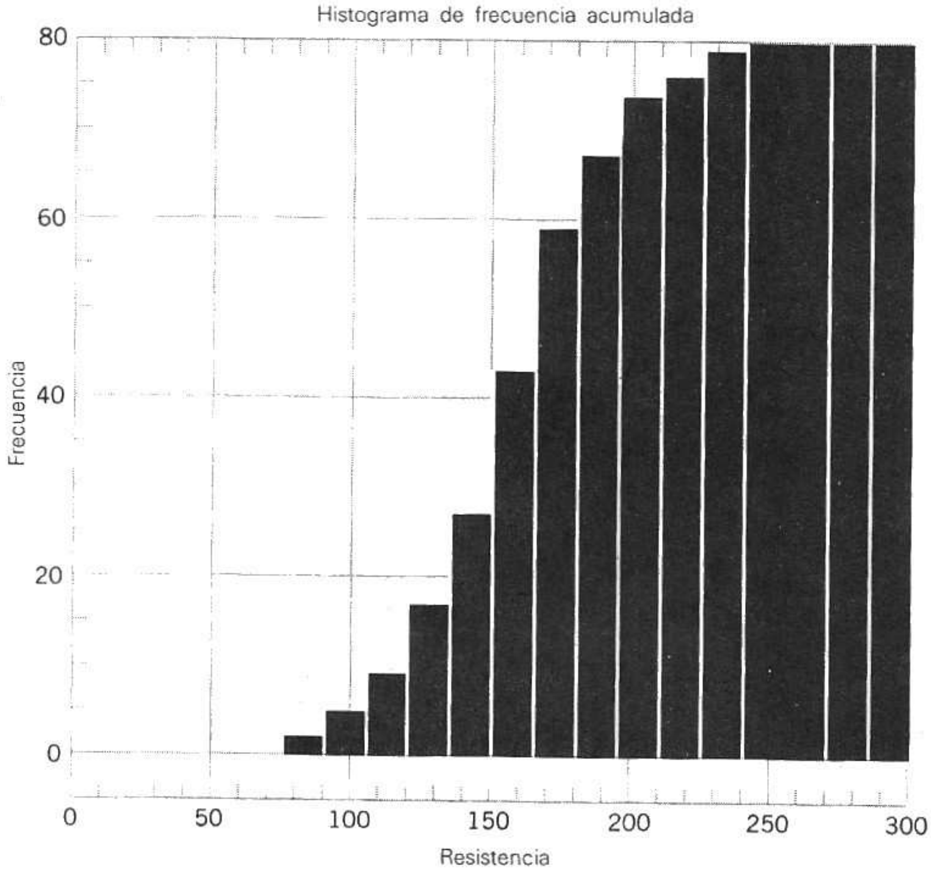


Figura 1-9 Gráfica de distribución acumulada de los datos de resistencia a la tensión, generada por Statgraphics.

La figura 1-9 presenta una variación del histograma disponible en el paquete Statgraphics, la **gráfica de frecuencia acumulada**. En esta gráfica, la altura de cada barra representa el número total de observaciones que son menores o iguales al límite superior de la clase respectiva. Las distribuciones acumuladas también son útiles en la interpretación de datos; por ejemplo, en la figura 1-9 puede leerse de inmediato que existen aproximadamente 75 observaciones menores o iguales a 200 psi.

Las distribuciones en frecuencia y los histogramas también pueden emplearse con datos cualitativos o categóricos. En algunas aplicaciones existe un ordenamiento natural de las categorías (como un estudiante del primer año, del segundo año, del tercer año, del cuarto año), mientras que en otras el orden de las categorías es arbitrario (tal como masculino y femenino). Cuando se emplean datos categóricos, las clases deben dibujarse con el mismo ancho.

EJEMPLO 1-3

La figura 1-10 presenta un histograma que muestra la producción de aeronaves de la Boeing Company en 1985. Nótese que el 737 es el modelo más popular, seguido por los modelos 757, 747, 767 y 707.

En esta sección, el estudio se ha concentrado en métodos descriptivos para situaciones en las que cada observación de un conjunto de datos es un número o pertenece a una sola categoría. En muchos casos, se trabaja con datos en los cuales cada observación está formada por varias mediciones. Por ejemplo, en un estudio sobre el rendimiento de una gasolina,

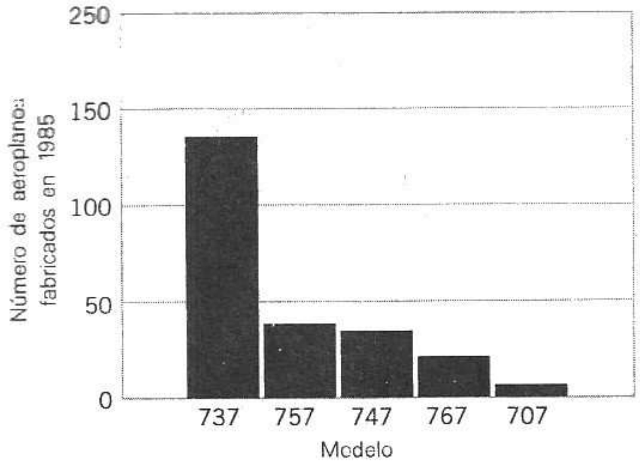


Figura 1-10 Producción de aeroplanos en 1985. (*Fuente:* Boeing Company.)

cada observación puede consistir de una medición de kilómetros por litro, del tamaño del motor del vehículo, de la potencia del motor, del peso del vehículo y de la longitud del mismo. Éste es un ejemplo de **datos multivariados**. En los capítulos finales se estudia el análisis de este tipo de datos.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1-2

1-1. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos (en mm) son: 74.001, 74.003, 74.015, 74.000, 74.005, 74.002, 74.005 y 74.004. Construya un diagrama de puntos y haga comentarios con respecto a los datos.

1-2. En su obra *Applied Life Data Analysis* (Wiley, 1982), Wayne Nelson presenta el tiempo de ruptura de un fluido aislante entre electrodos a 34 kV. Los tiempos, en minutos, son los siguientes: 0.19, 0.78, 0.96, 1.31, 2.78, 3.16, 4.15, 4.67, 4.85, 6.50, 7.35, 8.01, 8.27, 12.06, 31.75, 32.52, 33.91, 36.71 y 72.89. Construya un diagrama de puntos para estos datos.

1-3. El ejemplar de enero de 1990 de *Arizona Trend* contiene un suplemento que describe los doce "mejores" campos de golf de Arizona, Estados Unidos. Los yardajes (longitud) de los campos son: 6981, 7099, 6930, 6992, 7518, 7100, 6935, 7518, 7013, 6800, 7041 y 6890. Construya un diagrama de puntos para estos datos.

1-4. Un artículo del *Journal of Structural Engineering* (Vol. 115, 1989) describe un experimento para probar la resistencia de tubos circulares con tapas soldadas en los extremos. Los primeros resultados obtenidos (en kN) son los siguientes: 96, 96, 102, 102, 102, 104, 104, 108, 126, 126, 128, 128, 140, 156, 160, 160, 164 y 170. Construya un diagrama de puntos para estos datos.

1-5. Un artículo publicado en *Human Factors* (junio 1989) presenta datos de acomodamiento visual (una función del movimiento del ojo) cuando se reconoce un patrón de manchas sobre la pantalla de un tubo de rayos catódicos de alta resolución. Los datos son: 36.45, 67.90, 38.77, 42.18, 26.72, 50.77, 39.30 y 49.71. Construya un diagrama de puntos para estos datos.

1-6. Los datos siguientes son mediciones de intensidad solar directa (en watts/m^2) realizadas en distintos días en una localidad del sur de España: 562, 869, 708, 775, 775, 704, 809, 856, 655, 806, 878, 909, 918, 558, 768, 870, 918, 940, 946, 661, 820, 898, 935, 952, 957, 693, 835, 905, 939, 955, 960, 498, 653, 730 y 753. Construya un histograma para estos datos.

1-7. Un artículo publicado en *Technometrics* (Vol. 19, 1977, pág. 425) presenta los datos siguientes sobre el octanaje de varias mezclas de gasolina:

88.5	87.7	83.4	86.7	87.5	91.5	88.6	100.3	96.5	93.3
94.7	91.1	91.0	94.2	87.8	89.9	88.3	87.6	84.3	86.7
84.3	86.7	88.2	90.8	88.3	98.8	94.2	92.7	93.2	91.0
90.1	93.4	88.5	90.1	89.2	88.3	85.3	87.9	88.6	90.9
89.0	96.1	93.3	91.8	92.3	90.4	90.1	93.0	88.7	89.9
89.8	89.6	87.4	88.4	88.9	91.2	89.3	94.4	92.7	91.8
91.6	90.4	91.1	92.6	89.8	90.6	91.1	90.4	89.3	89.7
90.3	91.6	90.5	93.7	92.7	92.2	92.2	91.2	91.0	92.2
90.0	90.7								

Construya un diagrama de tallo y hoja en pantalla para estos datos.

1-8. Los datos siguientes representan el número de ciclos transcurridos hasta que se presenta una falla en una prueba de piezas de aluminio sujetas a un esfuerzo alternante repetido de 21 000 psi, a 18 ciclos por segundo:

1115	1567	1223	1782	1055	798	1016	2100	910	1501
1310	1883	375	1522	1764	1020	1102	1594	1730	1238
1540	1203	2265	1792	1330	865	1605	2023	1102	990
1502	1270	1910	1000	1608	2130	706	1315	1578	1468
1258	1015	1018	1820	1535	1421	2215	1269	758	1512
1315	845	1452	1940	1781	1109	785	1260	1416	1750
1085	1674	1890	1120	1750	1481	885	1888	1560	1642

a. Construya un diagrama de tallo y hoja en pantalla para visualizar estos datos.

b. ¿Existe evidencia de que una pieza "sobrevivirá" más allá de los 2000 ciclos? Justifique su respuesta.

1-9. La siguiente tabla presenta el porcentaje de algodón en un material utilizado para la fabricación de camisas para caballeros. Construya un diagrama de tallo y hoja en pantalla para estos datos.

34.2	33.6	33.8	34.7	37.8	32.6	35.8	34.6
33.1	34.7	34.2	33.6	36.6	33.1	37.6	33.6
34.5	35.0	33.4	32.5	35.4	34.6	37.3	34.1
35.6	35.4	34.7	34.1	34.6	35.9	34.6	34.7
36.3	36.2	34.6	35.1	33.8	34.7	35.5	35.7
35.1	36.8	35.2	36.8	37.1	33.6	32.8	36.8
34.7	35.1	35.0	37.9	34.0	32.9	32.1	34.3
33.6	35.3	34.9	36.4	34.1	33.5	34.5	32.7

1-10. Los datos siguientes representan el rendimiento de 90 lotes consecutivos de un sustrato cerámico, en el que se ha aplicado un recubrimiento metálico mediante un proceso de depositación por vapor. Construya un diagrama de tallo y hoja en pantalla para estos datos.

94.1	87.3	94.1	92.4	84.6	85.4
93.2	84.1	92.1	90.6	83.6	86.6
90.6	90.1	96.4	89.1	85.4	91.7
91.4	95.2	88.2	88.8	89.7	87.5
88.2	86.1	86.4	86.4	87.6	84.2
86.1	94.3	85.0	85.1	85.1	85.1
95.1	93.2	84.9	84.0	89.6	90.5
90.0	86.7	78.3	93.7	90.0	95.6
92.4	83.0	89.6	87.7	90.1	88.3
87.3	95.3	90.3	90.6	94.3	84.1
86.6	94.1	93.1	89.4	97.3	83.7
91.2	97.8	94.6	88.6	96.8	82.9
86.1	93.1	96.3	84.1	94.4	87.3
90.4	86.4	94.7	82.6	96.1	86.4
89.1	87.6	91.1	83.1	98.0	84.5

1-11. Construya una distribución de frecuencias y un histograma para los datos de octanaje del ejercicio 1-7. Utilice ocho clases.

1-12. Construya una distribución de frecuencias y un histograma con los datos de fallas del ejercicio 1-8.

1-13. Construya una distribución de frecuencias y un histograma para los datos de contenido de algodón del ejercicio 1-9.

1-14. Construya una distribución de frecuencias y un histograma para los datos de rendimiento del ejercicio 1-10.

1-15. Construya una distribución de frecuencias y un histograma con 16 clases para los datos de octanaje del ejercicio 1-7. Compare la forma del histograma con la que tiene el ejercicio 1-11, donde se emplean ocho clases. ¿Los dos histogramas presentan información similar?

1-16. **Diagrama de Pareto.** Una variación importante de un histograma para datos categóricos es el diagrama de Pareto. Este diagrama tiene un empleo muy amplio en los esfuerzos por incrementar la calidad, y las categorías usualmente representan tipos distintos de defectos, modos de falla o problemas con el producto o el proceso. Las categorías están ordenadas de modo que en la parte izquierda aparezca la categoría con la mayor frecuencia, seguida por la categoría que tiene la segunda mayor frecuencia y, así, sucesivamente. Este tipo de diagramas llevan el nombre del economista italiano V. Pareto, y en general exhiben la "ley de Pareto"; esto es, la mayor parte de los defectos aparece sólo en unas cuantas categorías. Suponga que se obtiene la siguiente información sobre defectos estructurales en las puertas de un automóvil: abolladuras, 4; picaduras, 4; partes ensambladas fuera de secuencia, 6; partes subajustadas, 21; falta de agujeros/ranuras, 8; partes no lubricadas, 5; partes fuera de contorno, 30 y partes con rebabas, 3. Construya un diagrama de Pareto e interprételo.

1-3 MEDIDAS DE LOCALIZACIÓN

Del mismo modo que las gráficas pueden mejorar la presentación de los datos, las descripciones numéricas también tienen gran valor. En esta sección y en la siguiente, se presentan varias medidas numéricas importantes para describir las características de los datos. Supóngase que los datos son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada x_i es un número. Una característica importante de un conjunto de números es su **localización** o **tendencia central**. Esta sección presenta varios métodos para describir la localización o centro de un conjunto de datos. La sección 1-4 presenta métodos para describir la variabilidad de los datos.

1-3.1 Media

La medida más común de localización o centro de un grupo de datos es el promedio aritmético ordinario o media. Ya que casi siempre se considera a los datos como una muestra, la media aritmética se conoce como **media muestral.**

Definición

Si las observaciones de una muestra de tamaño n son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces la **media muestral** es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1\text{-}1)$$

EJEMPLO 1-4

La media muestral de la resistencia a la tensión de las 10 observaciones recopiladas sobre el mortero de cemento portland modificado de la sección 1-2.1 es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{16.85 + 16.40 + \cdots + 16.57}{10}$$
$$= \frac{167.64}{10} = 16.764 \text{ kgf/cm}^2$$

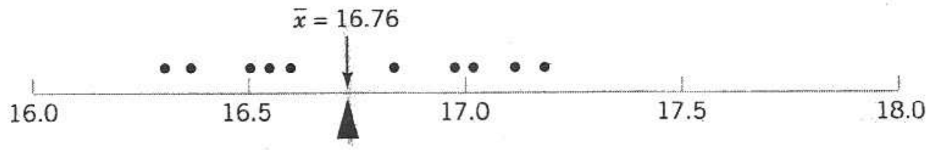


Figura 1-11 La media muestral como punto de equilibrio de un sistema de pesos.

El valor de la media muestral, $\bar{x}$, es más preciso que la precisión asociada con cada observación. En consecuencia, muchas veces se notifica la media muestral con un dígito más que los utilizados en cada medición.

La figura 1-11, que es un diagrama de puntos para los datos de resistencia a la tensión, ilustra la interpretación física de la media muestral como medida de localización. Nótese que la media muestral, $\bar{x} = 16.764$, puede considerarse como un "punto de equilibrio". Esto es, si cada observación representa, por ejemplo, una libra de masa colocada en ese punto sobre el eje x, entonces un punto de apoyo localizado exactamente en $\bar{x}$ equilibrará todo el sistema de pesos.

Para los datos de resistencia de la aleación de aluminio-litio de la tabla 1-1, la suma de las 80 observaciones es

$$\sum_{i=1}^{80} x_i = 13\,013$$

de modo que la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{80} x_i}{80} = \frac{13\,013}{80} = 162.7$$

Si se examina el diagrama de tallo y hoja de la figura 1-3 o el histograma de la figura 1-6, se observa que la media muestral de 162.7 psi es un valor "típico" de la resistencia a la tensión, ya que éste se presenta casi en la parte media de los datos, donde se concentran las observaciones. Sin embargo, esta impresión puede ser errónea. Supóngase que el histograma tiene la apariencia de la figura 1-12. La media de estos datos sigue siendo una medida de

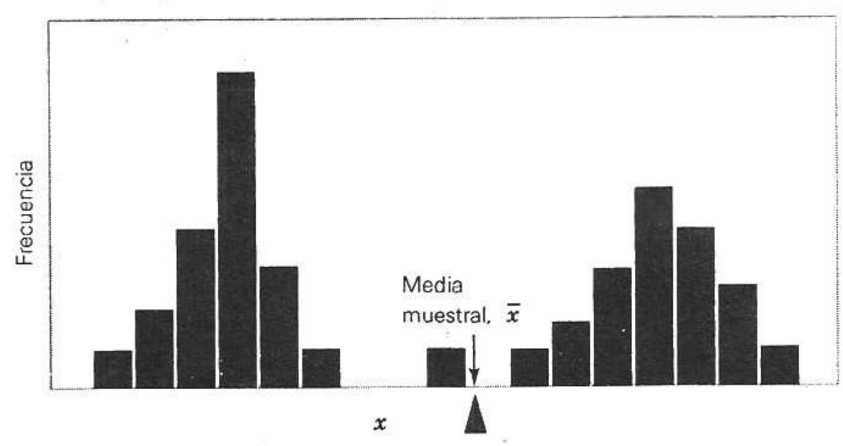


Figura 1-12 Histograma

tendencia central, pero esto no implica necesariamente que la mayor parte de las observaciones se concentre alrededor de ella. Recuérdese que, si se considera a las observaciones como masas unitarias, la media muestral es el punto que equilibra todo el histograma.

La media muestral $\bar{x}$ representa el valor promedio de todas las observaciones en la muestra. También es posible pensar en el cálculo del valor promedio de todas las observaciones de una población. Este promedio se conoce como **media poblacional**, y se denota con la letra griega μ (mu).

Cuando existe un número finito de observaciones (por ejemplo, N) en la población, entonces la media poblacional es

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \tag{1-2}$$

EJEMPLO 1-5

El ejemplar del 22 de abril de 1991 de *Aviation Week and Space Technology*, informa que durante la operación Tormenta del Desierto, los pilotos de aviones de combate F-117A de la fuerza aérea de Estados Unidos volaron un total de 1270 misiones, con un total de 6905 horas. Por tanto, la duración media de una misión de un F-117A durante esta operación fue

$$\mu = \frac{6905}{1270} = 5.4 \text{ hr}$$

En capítulos subsecuentes se estudian modelos para poblaciones infinitas y se proporciona una definición más general de μ. En muchas aplicaciones prácticas de la estadística a problemas de la ingeniería, no se conoce la media y es imposible (o poco práctico) examinar a todos los miembros de una población, como en el ejemplo 1-5. En los capítulos sobre inferencia estadística se presentan métodos para hacer inferencias sobre la media poblacional, con base en la media muestral. En ellos se emplea la media muestral como punto de partida para estimar μ.

1-3.2 Mediana

Otra medida de tendencia central es la **mediana**, o punto donde la muestra se divide en dos partes iguales. La palabra "mediana" es sinónimo de parte media.

Definición

Sean $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ una muestra acomodada en orden creciente de magnitud; esto es, $x_{(1)}$ denota la observación más pequeña, $x_{(2)}$ es la segunda observación más pequeña, . . . , y $x_{(n)}$ denota la observación más grande. Entonces, la **mediana** $\tilde{x}$ se define como la parte media o la ($[n + 1]/2$)-ésima observación si n es impar, o el promedio entre las dos observaciones intermedias [la ($n/2$)-ésima y la ($[n/2] + 1$)-ésima] si n es par. En términos matemáticos,

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{([n+1]/2)}, & \text{impar} \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{([n/2]+1)}}{2}, & \text{par} \end{cases} \tag{1-3}$$

La ventaja de la mediana es que los valores extremos no tienen mucha influencia sobre ella. Para ilustrar esto, supóngase que las observaciones de una muestra son

1, 3, 4, 2, 7, 6 y 8

La media muestral es 4.4, mientras que la mediana muestral es 4. Ambas cantidades proporcionan una medida razonable de la tendencia central de los datos. Ahora supóngase que cambia la penúltima observación, de modo que los datos son

1, 3, 4, 2, 7, 2450 y 8

Para estos datos, la media muestral es 353.6. En este caso, es evidente que la media muestral no dice mucho con respecto a la tendencia central de la mayor parte de los datos. Sin embargo, la mediana sigue siendo cuatro, y ésta es, probablemente, una medida de tendencia central más significativa para la mayor parte de las observaciones.

Del mismo modo que $\tilde{x}$ es el valor medio de una muestra, existe un valor medio en la población. Se define $\tilde{\mu}$ como la **mediana poblacional**; esto es, la mitad de la población se encuentra por debajo de $\tilde{\mu}$, mientras que la otra mitad está por encima de este valor.

1-3.3 Moda

Definición

La **moda** es la observación que se presenta con mayor frecuencia en la muestra.

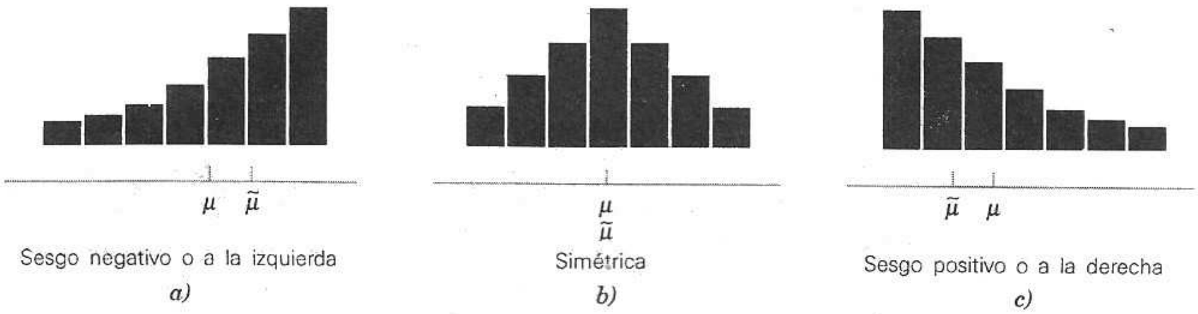


Figura 1-13 Media y mediana para distribuciones simétricas y sesgadas.

Por ejemplo, la moda de los siguientes datos

3, 6, 9, 3, 5, 8, 3, 10, 4, 6, 3, 1

es 3, puesto que este valor ocurre cuatro veces y ningún otro lo hace con mayor frecuencia.

Puede existir más de una moda. Por ejemplo, considérense las siguientes observaciones

3, 6, 9, 3, 5, 8, 3, 10, 4, 6, 3, 1, 6, 2, 5, 6

Las modas son 3 y 6, ya que ambos valores se presentan el mismo número de veces; cuatro, y ningún otro más lo hace con mayor frecuencia. En este caso se dice que los datos son *bimodales*.

Si los datos son simétricos, entonces la media y la mediana coinciden. Si, además, los datos tienen sólo una moda (esto es, son *unimodales*), entonces la media, la mediana y la moda coinciden. Si los datos están *sesgados* (esto es, son asimétricos, con una larga cola en uno de los extremos), entonces la media, la mediana y la moda no coinciden. Generalmente se encuentra que moda < mediana < media si la distribución está sesgada hacia la derecha, mientras que moda > mediana > media si la distribución está sesgada hacia la izquierda. Véase la figura 1-13.

Las propiedades estadísticas de la media muestral son bien conocidas, y es relativamente fácil trabajar con ella. Por otra parte, la media muestral es más estable que la mediana muestral, en el sentido en que ésta no cambia mucho de una muestra a otra. En consecuencia, muchas técnicas estadísticas analíticas utilizan la media muestral. Sin embargo, la mediana y la moda se utilizan mucho como medidas descriptivas de los datos.

1-3.4 Percentiles y cuartiles

La mediana (ya sea de una población o de una muestra) divide los datos en dos partes iguales. También es posible dividir los datos en más de dos partes. Cuando se divide un conjunto ordenado de datos en cuatro partes iguales, los puntos de división se conocen como **cuartiles**. El *primer cuartil*, o *cuartil inferior*, q_1, es un valor que tiene aproximadamente la cuarta parte (25%) de las observaciones por debajo de él, y el 75% restante, por encima de él. El *segundo cuartil*, q_2, tiene aproximadamente la mitad (50%) de las observaciones por debajo de él. El segundo cuartil es exactamente igual a la mediana. El *tercer cuartil*, o *cuartil superior*, q_3, tiene aproximadamente las tres cuartas partes (75%) de las observaciones por debajo de él. Al igual que en el caso de la mediana, es posible que los cuartiles no sean únicos. Por simplicidad, si más de una observación satisface la definición de un cuartil, entonces se utiliza el promedio de ellas como cuartil.

EJEMPLO 1-6

A continuación se presentan 20 observaciones en orden del tiempo de falla, en horas, de un material aislante eléctrico (adaptadas del trabajo de Nelson, *Applied Life Data Analysis*, 1982):

204	228	252	300	324	444	624	720	816	912
1176	1296	1392	1488	1512	2520	2856	3192	3528	3710

Nótese que la mediana es

$$\tilde{x} = q_2 = \frac{912 + 1176}{2} = 1044$$

lo que corresponde a un valor que está entre la décima y la undécima observaciones. El primer cuartil debe tener al menos el 25% de los datos o por lo menos cinco observaciones en su valor o por debajo de él, y al menos el 75% de los datos o al menos 15 observaciones en su valor o por encima de él. Tanto la quinta como la sexta observación satisfacen esta definición, de modo que se define a q_1 como la media de estas observaciones:

$$q_1 = \frac{324 + 444}{2} = 384$$

De manera similar, el tercer cuartil debe tener al menos el 75% de los datos, o por lo menos 15 observaciones en su valor o por debajo de él, y al menos el 25% de los datos, o por lo menos cinco observaciones, en su valor o por encima de él. Las observaciones 15 y 16 satisfacen esta definición, así que se toma a q_3 como la media de estos valores:

$$q_3 = \frac{1512 + 2520}{2} = 2016$$

Cuando un conjunto ordenado de datos se divide en cien partes iguales, los puntos de división reciben el nombre de **percentiles**. En términos más generales, el $100k$-ésimo percentil p_k se define de la siguiente manera:

Definición

El $100k$-ésimo percentil p_k es un valor tal, que al menos el $100k$% de las observaciones están en el valor o por debajo de él, y al menos el $100(1 - k)$% están en el valor o por encima de él.

Nótese que el primer cuartil $q_1 = p_{0.25}$, el tercer cuartil $q_3 = p_{0.75}$, y que la mediana es $p_{0.50}$. El procedimiento para encontrar el valor de cualquier percentil p_k a partir de datos clasificados, es el siguiente: 1) encontrar el *número de la posición i* del percentil mediante el cálculo de nk. Si nk *no* es un entero, entonces i es el siguiente entero más grande. Si nk es entero, i es igual a $nk + 0.5$; 2) si i es un entero, cuéntese desde la observación más pequeña hasta hallar el i-ésimo valor. Si i no es un entero, entonces contiene una fracción igual a un medio, con lo que el valor de p_k es el promedio de las observaciones ordenadas nk y $(nk + 1)$.

EJEMPLO 1-7

Se desea encontrar los percentiles 10 y 88 de los datos del ejemplo 1-6. Primero se considera el cálculo de $p_{0.10}$. Puesto que $k = 0.10$, $nk = 20(0.10) = 2$ es un entero, el número de la posición es $i = 2 + 0.5$, el cual es el promedio de las observaciones segunda y tercera. Por tanto, el percentil 10 es $p_{0.10} = (228 + 252)/2 = 240$. El percentil 88 se encuentra de manera similar. Puesto que ahora $k = 0.88$, $nk = 20(0.88) = 17.6$, que no es un entero, y el número de la posición es $i = 18$. Por tanto, el percentil 88 es la observación ordenada número 18, esto es $p_{0.88} = 3192$.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1-3

1-17. Un artículo publicado en el *Journal of Aircraft* (1988) describe el cálculo de los coeficientes de arrastre para la superficie aerodinámica NASA 0012. Para ello se utilizaron diferentes algoritmos computacionales con $M_\infty = 0.7$, obteniéndose los siguientes resultados (los coeficientes de arrastre están dados en unidades de conteos de arrastre; esto es, un conteo es equivalente a un coeficiente de arrastre de 0.0001): 79, 100, 74, 83, 81, 85, 82, 80 y 84. Calcule:

- **a.** La media muestral de estos datos.
- **b.** La mediana muestral.

1-18. Las siguientes mediciones corresponden a las temperaturas de un horno registradas en lotes sucesivos de un proceso de fabricación de semiconductores (las unidades son °F): 953, 950, 948, 955, 951, 949, 957, 954, 955. Calcule:

- **a.** La media muestral de estos datos.
- **b.** La mediana muestral de estos datos.
- **c.** ¿En cuánto puede incrementarse la mayor medición de temperatura sin que cambie la mediana muestral?

1-19. Considere las mediciones realizadas en los anillos para pistones del ejercicio 1-1. Encuentre la media y la mediana muestrales de esos datos.

1-20. Considere las mediciones realizadas en los anillos para pistones del ejercicio 1-1. Suponga que se elimina la observación más grande (74.015 mm). Calcule la media y la mediana muestrales para los datos restantes. Compare sus resultados con los obtenidos en el ejercicio 1-19, donde se emplean las ocho mediciones.

1-21. Encuentre la media, la mediana y la moda para las dimensiones de los campos de golf de Arizona dadas en el ejercicio 1-3. ¿Qué información transmiten estas medidas de tendencia central?

1-22. Encuentre la media y la mediana muestrales de los datos de resistencia del ejercicio 1-4.

1-23. Los siguientes datos son las temperaturas de unión de los *O-rings* (en grados F), en cada prueba de lanzamiento o de un lanzamiento real, del motor del cohete del transbordador espacial (tomados de *Presidential Commission on the Space Shuttle Challenger Accident*, Vol. 1, págs. 129-131): 84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

36

- **a.** Calcule la media y la mediana muestrales.

15 27,5

- **b.** Encuentre los cuartiles inferior y superior de la temperatura.

2 4

- **c.** Encuentre los percentiles quinto y noveno de la temperatura.
- **d.** Elimine la observación más pequeña (31°F) y vuelva a calcular lo que se pide en los incisos **a)**, **b)** y **c)**. Explique sus hallazgos. ¿Cuánto difieren las demás temperaturas de este último valor?

1-24. Considere los datos sobre tiempo de ruptura del ejercicio 1-2.

- **a.** Encuentre los cuartiles inferior y superior del tiempo de ruptura.
- **b.** Encuentre los percentiles 30 y 95 del tiempo de ruptura.
- **c.** Elimine la observación más grande (72.89) y vuelva a calcular las cantidades que se piden en los incisos **a)** y **b)**. ¿Qué efecto tiene la eliminación de este punto?

1-25. Encuentre los cuartiles inferior y superior de los datos de yardaje de los campos de golf del ejercicio 1-3.

1-4 MEDIDAS DE VARIABILIDAD

La localización o tendencia central no necesariamente proporciona información suficiente para describir datos de manera adecuada. Por ejemplo, considérense los datos de resistencia a la tensión (en psi) de dos muestras de aleación de aluminio-litio:

Muestra 1: 130, 150, 145, 158, 165, 140

Muestra 2: 90, 128, 205, 140, 165, 160

La media de ambas muestras es 148 psi. Sin embargo, con respecto al diagrama de puntos de la figura 1-14, se observa que la dispersión o variabilidad de la muestra 2 es mucho mayor que la de la muestra 1. En esta sección se definen y se ilustran varias medidas útiles de variabilidad.

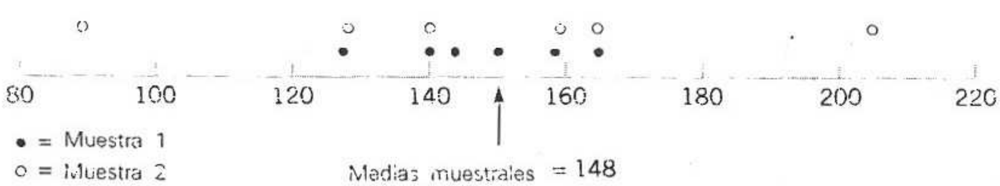


Figura 1-14 Datos de resistencia a la tensión.

1-4.1 Rango de la muestra y rango intercuartílico

Una medida muy sencilla de variabilidad es el **rango de la muestra**, definido como la diferencia entre las observaciones más grande y más pequeña. Esto es, el rango es

$$r = \text{máx}(x_i) - \text{mín}(x_i) \tag{1-4}$$

Para el par de muestras en las que se medía la resistencia a la tensión dadas anteriormente, el recorrido de la primera muestra es $r_1 = 165 - 130 = 35$, mientras que el de la segunda muestra es $r_2 = 205 - 90 = 115$. De estos resultados es claro que entre más grande sea el rango, mayor será la variabilidad en los datos.

El rango de una muestra es fácil de calcular, pero éste ignora toda la información que hay en la muestra entre las observaciones más grande y más pequeña. Por ejemplo, las muestras 1, 3, 5, 8, 9 y 1, 5, 5, 5, 9 tienen el mismo recorrido ($r = 8$). Sin embargo, en la segunda muestra sólo existe variabilidad en los valores de los extremos, mientras que en la primera los tres valores intermedios cambian de manera considerable. Algunas veces, cuando el tamaño de la muestra es pequeño, $n \leq 10$, la pérdida de información asociada con el rango no es muy seria. Por ejemplo, el rango se utiliza mucho en aplicaciones estadísticas al control de calidad, donde lo común es utilizar muestras con tamaños de cuatro o cinco. (En el capítulo 14 se estudian algunas de estas aplicaciones.) En general, lo que se desea es tener una medida de variabilidad que dependa de *todas* las observaciones, más que de unas cuantas.

Al igual que las observaciones máxima y mínima de una muestra llevan información sobre la variabilidad, el **rango intercuartílico**, RIC $= q_3 - q_1$, puede emplearse como medida de variabilidad. Para los datos de duración del aislante eléctrico, el rango intercuartílico es

$$\text{IQR} = q_3 - q_1 = 2016 - 384 = 1632 \text{ horas}$$

El rango intercuartílico es menos sensible a los valores extremos de la muestra, que el rango muestral ordinario.

1-4.2 Varianza muestral y desviación estándar muestral

Las medidas más importantes de variabilidad son la **varianza muestral** y la **desviación estándar muestral**.

Definición

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una muestra de n observaciones, entonces la **varianza muestral** es

VARIANZA

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \qquad (1\text{-}5)$$

La **desviación estándar muestral**, s, es la raíz cuadrada positiva de la varianza muestral.

Las unidades de medición de la varianza muestral son iguales al cuadrado de las unidades con que se mide la variable. De esta manera, si x se mide en libras por pulgada cuadrada (psi), las unidades de la varianza muestral son (psi)^2. La desviación estándar tiene la deseable propiedad de medir la variabilidad en las unidades originales de la variable de interés, x.

¿Cómo mide la varianza muestral la variabilidad?

Para ver la forma en que la varianza muestral mide la variabilidad, considérese la figura 1-15, la cual ilustra las desviaciones $x_i - \bar{x}$ de la segunda muestra de seis observaciones sobre la resistencia a la tensión. Entre más grande sea la variabilidad en los datos, mayor será la magnitud absoluta de las desviaciones $x_i - \bar{x}$. Puesto que la suma de las desviaciones $x_i - \bar{x}$ siempre es cero, se debe utilizar una medida de variabilidad que cambie las desviaciones negativas en cantidades no negativas. Elevar al cuadrado las desviaciones es el enfoque que se emplea en la varianza muestral. En consecuencia, si s^2 es pequeña, entonces existe una variabilidad pequeña en los datos, pero si s^2 es grande, entonces la variabilidad también lo es.

EJEMPLO 1-8

La tabla 1-3 muestra las cantidades necesarias para calcular la varianza muestral y la desviación estándar muestral de la muestra 2 de resistencia a la tensión de la aleación de aluminio-litio. La gráfica de los datos aparece en la figura 1-15. El numerador de s^2 es

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 = 7510,$$

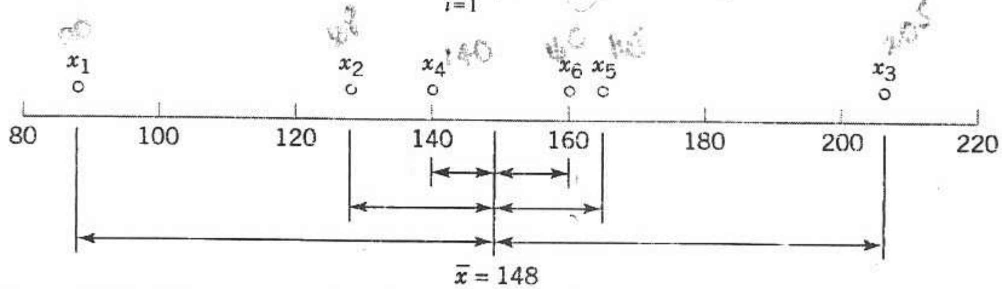


Figura 1-15 Manera en que la varianza muestral mide la variabilidad mediante las desviaciones $x_i - \bar{x}$.

Tabla 1-3 Cálculo de la varianza muestral y de la desviación estándar muestral

$^2(\bar{x} - {}_ix)$	$\bar{x} - {}_ix$	${}_ix$	i
1	90	−58	3364
2	128	−20	400
3	205	57	3249
4	140	−8	64
5	165	17	289
6	160	12	144
	$\sum_{i=1}^{6} x_i = 888$	$\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 = 7510$
		$\bar{x} = \frac{888}{6} = 148$	

de modo que la varianza muestral es

$$s^2 = \frac{7510}{6-1} = \frac{7510}{5} = 1502 \text{ (psi)}^2$$

mientras que la desviación estándar muestral está dada por

$$s = \sqrt{1502} = 38.8 \text{ psi}$$

Cálculo de s^2

El cálculo de s^2 requiere la determinación de $\bar{x}$, la realización de n sustracciones, y de n cuadrados, además de las operaciones de adición. Si las observaciones originales, o las desviaciones $x_i - \bar{x}$, no son enteros, entonces el cálculo de las desviaciones $x_i - \bar{x}$ puede ser tedioso, además de tener que conservar varios decimales para asegurar la exactitud numérica. Puede obtenerse una fórmula más eficiente para el cálculo de la varianza muestral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x_i)}{n-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n-1} \end{aligned}$$

y, puesto que $\bar{x} = (1/n)\ \Sigma_{i=1}^{n} x_i$, la última ecuación se reduce a

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1} \tag{1-6}$$

Nótese que la ecuación 1-6 sólo requiere elevar al cuadrado cada x_i, luego elevar al cuadrado la suma de los x_i, restar $(\Sigma x_i)^2/n$ de Σx_i^2 y, finalmente, dividir el resultado entre $n - 1$. Algunas veces este procedimiento es denominado método abreviado para el cálculo de s^2 (o s).

EJEMPLO 1-9

La tabla 1-4 presenta los cálculos necesarios para obtener la varianza muestral y la desviación estándar utilizando el método abreviado, ecuación 1-6. La fórmula proporciona lo siguiente

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{138.934 - \frac{(888)^2}{6}}{5} = \frac{7510}{5} = 1502\ (\text{psi})^2,$$

y

$$s = \sqrt{1502} = 38.8 \text{ psi}$$

Los resultados anteriores concuerdan de manera exacta con los obtenidos previamente.

Análogo a la varianza de la muestra s^2, existe una medida de variabilidad en la población, conocida como **varianza poblacional**. Se hará uso de la letra griega σ^2 (sigma cuadrada) para denotar la varianza poblacional. La raíz cuadrada positiva de σ^2, σ, denota la

Tabla 1-4 Cálculo de la varianza y la desviación estándar muestrales

i	x_i	x_i^2
1	90	8 100
2	128	16 384
3	205	42 025
4	140	19 600
5	165	27 225
6	160	25 600
	$\sum_{i=1}^{6} x_i = 888$	$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 138\,934$

desviación estándar poblacional. Cuando la población es finita y está formada por N valores, la varianza poblacional puede definirse como

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N} \tag{1-7}$$

En capítulos subsecuentes aparecen definiciones más generales de la varianza σ^2. Anteriormente se dijo que la media muestral puede emplearse para hacer inferencias sobre la media poblacional. De manera similar, la varianza muestral puede utilizarse para hacer inferencias sobre la varianza poblacional.

Nótese que el denominador para la varianza muestral es el tamaño de la muestra menos uno ($n - 1$), mientras que para la varianza poblacional es el tamaño de la población N. Si fuese posible conocer el verdadero valor de la media poblacional μ, entonces la varianza *muestral* podría calcularse como el promedio de los cuadrados de las desviaciones alrededor de μ de las observaciones en la muestra. En la práctica, el valor de μ casi nunca se conoce, de modo que en lugar de lo anterior debe emplearse la suma de los cuadrados de las desviaciones alrededor del promedio de la muestra, $\bar{x}$. Sin embargo, las observaciones x_i tienden a estar más cerca del promedio de la muestra, $\bar{x}$, que de la media poblacional, μ. Por consiguiente, para compensar esto se utiliza $n - 1$ como denominador, en lugar de n. Si se utilizara n como denominador en la varianza muestral, entonces se obtendría una medida de variabilidad que es, en promedio, más pequeña que la verdadera varianza poblacional σ^2.

Otra manera de pensar lo anterior es considerar la varianza muestral s^2 como basada en $n - 1$ **grados de libertad**. El término *grados de libertad* proviene del hecho de que la suma de las n desviaciones $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$ siempre es cero, de modo que la especificación de cualesquiera $n - 1$ de estas cantidades determina de manera automática la restante. Por tanto, sólo $n - 1$ de las n desviaciones, $x_i - \bar{x}$, están determinadas de manera arbitraria.

1-4.3 Coeficiente de variación

En ocasiones es deseable expresar la variación como una fracción de la media. Para hacer esto se utiliza una medida adimensional de variación relativa, denominada **coeficiente de variación muestral**.

Definición

El **coeficiente de variación muestral** es

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} \tag{1-8}$$

El coeficiente de variación es útil cuando se compara la variabilidad de dos o más conjuntos de datos que difieren de manera considerable en la magnitud de las observaciones. Por ejemplo, el coeficiente de variación puede ser de utilidad al comparar la variabilidad del consumo de energía eléctrica por día en muestras tomadas en distintos conjuntos residenciales durante un determinado mes del año.

EJEMPLO 1-10

Con un micrómetro, se realizan mediciones del diámetro de un balero, que tienen una media de 4.03 mm y una desviación estándar de 0.012 mm; con otro micrómetro se toman mediciones de la longitud de un tornillo, que tienen una media de 1.76 pulgadas y una desviación estándar de 0.0075 pulgadas. Los coeficientes de variación son

$$cv_{\text{balero}} = \frac{0.012}{4.03} = 0.003$$

y

$$cv_{\text{tornillo}} = \frac{0.0075}{1.76} = 0.004$$

respectivamente. En consecuencia, las mediciones hechas con el primer micrómetro exhiben una variabilidad relativamente menor que las efectuadas con el otro micrómetro.

1-4.4 Diagramas de caja

El diagrama de tallo y hoja y el histograma proporcionan una impresión visual general del conjunto de datos, mientras que las cantidades numéricas tales como $\bar{x}$ o s brindan información sobre una sola característica de los datos. El **diagrama de caja** es una presentación visual que describe al mismo tiempo varias características importantes de un conjunto de datos, tales como el centro, la dispersión, la desviación de la simetría y la identificación de observaciones que se alejan de manera poco usual del resto de los datos. (Este tipo de observaciones se conocen como "valores atípicos".)

El diagrama de caja presenta los tres cuartiles, y los valores mínimo y máximo de los datos sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente. El rectángulo delimita el rango intercuartílico con la arista izquierda (o inferior) ubicada en el primer cuartil, q_1, y la arista derecha (o superior) en el tercer cuartil, q_3. Se dibuja una línea a través del rectángulo en la posición que corresponde al segundo cuartil (que es igual al percentil 50 o a la mediana), $q_2 = \tilde{x}$. De cualquiera de las aristas del rectángulo se extiende una línea, o **bigote**, que va hacia los valores extremos. Éstas son observaciones que se encuentran entre cero y 1.5 veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo. Las observaciones que están entre 1.5 y 3 veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo reciben el nombre de **valores atípicos**. Las observaciones que están más allá de tres veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo se conocen como **valores atípicos extremos**. En ocasiones se emplean diferentes símbolos (como círculos vacíos o llenos), para identificar los dos tipos de valores atípicos. A veces, los diagramas de caja reciben el nombre de *diagramas de caja y bigotes*.

La figura 1-16 presenta el diagrama de caja obtenido con el paquete Statgraphics para los datos de resistencia a la tensión de la aleación, contenidos en la tabla 1-1. El diagrama indica que la distribución de la resistencia es bastante simétrica con respecto al valor cen-

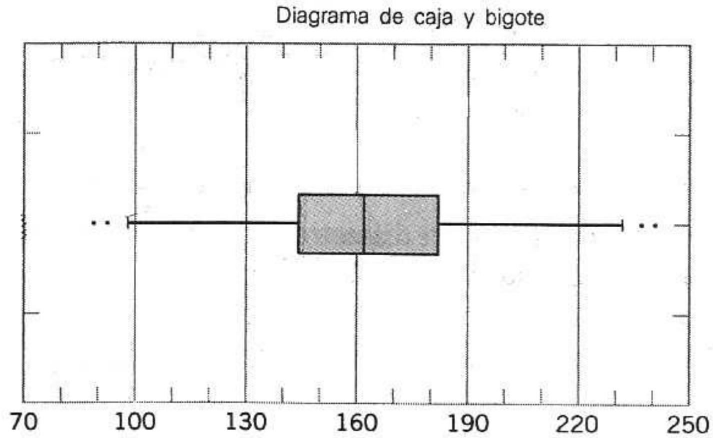


Figura 1-16 Diagrama de caja para los datos de resistencia a la tensión de la tabla 1-1.

tral, ya que los bigotes izquierdo y derecho, así como la longitud de los rectángulos izquierdo y derecho alrededor de la mediana, son casi los mismos. También se observa la existencia de dos valores atípicos de rango medio en ambos extremos de los datos.

Los diagramas de caja son muy útiles al hacer comparaciones gráficas entre conjuntos de datos, ya que tienen un gran impacto visual y son fáciles de comprender. Por ejemplo, la figura 1-7 presenta los diagramas de caja comparativos generados por el paquete Statgraphics para un índice de calidad de fabricación de dispositivos semiconductores en tres plantas distintas. El examen de este diagrama revela que existe mucha variabilidad en la planta 2, y que es necesario que las plantas 2 y 3 incrementen sus índices de calidad.

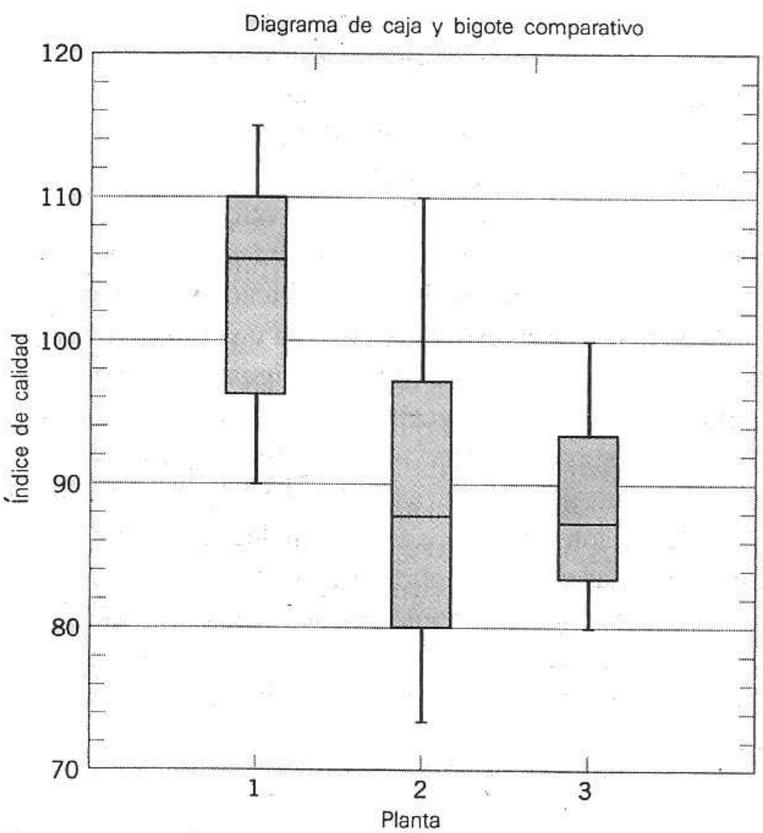


Figura 1-17 Diagramas de caja comparativos de un índice de calidad de tres plantas distintas.

Tabla 1-5 Resumen de estadísticas para los datos de resistencia a la tensión generado por Statgraphics

Variable:	strength
Sample size	80
Average	162.662
Median	161.5
Mode	158
Variance	1140.63
Standard deviation	33.7732
Minimum	76
Maximum	245
Range	169
Lower quartile	144
Upper quartile	181
Interquartile range	37
Coeff. of variation	20.7628
Sum	13013

1-4.5 Salida generada por la computadora para el resumen de estadísticas

Los paquetes de software estadístico calculan las estadísticas numéricas presentadas en las secciones 1-3 y 1-4 (y, en general, varias más que no han sido mencionadas hasta el momento). La tabla 1-5 presenta la salida generada por el paquete Statgraphics para los datos de resistencia a la tensión, de la tabla 1-1. Nótese que los resultados concuerdan con los ya obtenidos, con la excepción de que se incluyen más decimales. Los programas de computadora a menudo generan informes con cuatro o más decimales.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1-4

1-26. Considere los datos para los coeficientes de arrastre de la superficie aerodinámica del ejercicio 1-17. Calcule:

a. La varianza muestral.

b. La desviación estándar muestral.

1-27. La contaminación de una pastilla de silicio puede afectar de manera importante la calidad de la producción de circuitos integrados. De una muestra de 10 pastillas se obtienen las siguientes concentraciones de oxígeno: 3.15, 2.68, 4.31, 2.09, 3.82, 2.94, 3.47, 3.39, 2.81, 3.61. Calcule:

a. La varianza muestral.

b. La desviación estándar muestral.

c. El rango de la muestra.

1-28. Considere los datos para anillos de pistón, del ejercicio 1-1. Calcule:

a. La varianza muestral.

b. La desviación estándar muestral.

c. El rango de la muestra.

1-29. Considere los datos para anillos de pistón, del ejercicio 1-1. Suponga que se elimina la observación más grande (74.015). Calcule la varianza muestral, la desviación estándar muestral y el rango de la muestra. Compare sus resultados con los obtenidos en el ejercicio 1-28, donde se emplean las ocho mediciones. Para esta medición en particular, ¿cuán sensibles son la varianza muestral, la desviación estándar muestral y el rango de la muestra?

1-30. Se toma una muestra de seis resistores y se mide su resistencia (en ohms). Los resultados son los siguientes: $x_1 = 45$, $x_2 = 38$, $x_3 = 47$, $x_4 = 41$, $x_5 = 35$ y $x_6 = 43$.

a. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral con el método de la ecuación 1-6.

b. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral utilizando la definición de la ecuación 1-5.

c. Reste 35 a cada una de las mediciones de resistencia originales, y calcule s^2 y s. Compare sus resultados con los obtenidos en los incisos **a**) y **b**).

d. Si los valores de resistencia fueran 450, 380, 470, 410, 350 y 430 ohms, ¿es posible utilizar los resultados de los incisos anteriores para hallar s^2 y s?

1-31. Considere los datos sobre tiempos de ruptura, del ejercicio 1-2. Calcule:

a. La varianza muestral.

b. La desviación estándar muestral.

c. El rango de la muestra.

d. El rango intercuartílico.

1-32. Construya un diagrama de caja para los datos de contaminación por oxígeno, del ejercicio 1-27.

1-33. Construya un diagrama de caja para los datos de tiempo de ruptura, del ejercicio 1-2. ¿Qué puede afirmar sobre la forma de la distribución? Calcule el rango muestral, la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

1-34. Considere los datos sobre los *O-ring* del transbordador espacial, dados en el ejercicio 1-23.

a. Calcule el recorrido muestral.

b. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

c. Construya un diagrama de caja y discuta sobre la forma de la distribución y la posible presencia de valores atípicos.

1-35. Un fabricante de gasolina investiga el "tiempo de arranque en frío" del motor de un automóvil. Para un vehículo de prueba obtiene los siguientes tiempos (en segundos): 1.75, 1.92, 2.62, 2.35, 3.09, 3.15, 2.53, 1.91.

a. Calcule el rango muestral.

b. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

c. Construya un diagrama de caja para los datos.

1-36. Un artículo del *Transactions of the Institution of Chemical Engineers* (Vol. 34, 1956, pág. 280-293) presenta datos obtenidos de un experimento donde se investigó el efecto de varias variables de un proceso sobre la oxidación en fase de vapor del naftaleno. La siguiente es una muestra del porcentaje de conversión de moles de naftaleno a anhídrido maleico: 4.2, 4.7, 4.7, 5.0, 3.8, 3.6, 3.0, 5.1, 3.1, 3.8, 4.8, 4.0, 5.2, 4.3, 2.8, 2.0, 2.8, 3.3, 4.8, 5.0.

a. Calcule el rango muestral.

b. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

c. Construya un diagrama de caja para estos datos.

1-37. Considere los datos del proceso químico que aparecen en el ejercicio 1-36. Calcule de nuevo el rango muestral, la varianza muestral y la desviación estándar muestral, pero antes reste 1.0 a cada observación. Compare sus resultados con los obtenidos en el ejercicio 1-36. ¿Existe algo "especial" con respecto a la constante 1.0, o es posible seleccionar de manera arbitraria otra constante que produzca los mismos resultados?

1-38. Las cinco primeras desviaciones con respecto a la media muestral de un conjunto de seis observaciones de medición de resistencia son –2, 3, 7, 4 y –1. ¿Cuál es el valor de la sexta desviación con respecto a la media? Proporcione una muestra que tenga las desviaciones anteriores con respecto a la media. ¿Cuántas muestras pueden construirse con esta característica? Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

1-5 GRÁFICAS DE SERIES DE TIEMPO

Las gráficas consideradas hasta el momento (histogramas, diagramas de tallo y hoja, y diagramas de caja) son métodos visuales muy útiles para mostrar la variabilidad presente en los datos. Sin embargo, con frecuencia el tiempo es un factor importante que contribuye a la variabilidad observada en los datos, y los métodos anteriores no lo toman en cuenta. Una **serie de tiempo**, o **secuencia de tiempo**, es un conjunto de datos en los que las observaciones se registran en el orden en que ocurren. La **gráfica de una serie de tiempo** es un diagrama en el que el eje vertical denota el valor observado (por ejemplo x), mientras que el eje horizontal denota el tiempo (que puede ser minutos, días, años, etc.). Cuando se grafican las mediciones como una serie de tiempo, a menudo se observan tendencias, ciclos u otras características importantes de los datos que, de otra forma, pasarían inadvertidas.

Por ejemplo, considérese la figura 1-18*a*, la cual presenta la gráfica de una serie de tiempo de las ventas anuales de una compañía durante los últimos diez años. La impresión general que ofrece esta gráfica es que las ventas tienen una **tendencia** a crecer. Existe cierta variabilidad en esta tendencia, donde, las ventas en algunos años aumentaron con respecto a las del año anterior, mientras que las ventas de otros años disminuyeron. La figura 1-18*b* presenta las ventas de los tres últimos años notificadas por trimestre. Esta gráfica muestra de manera clara que las ventas anuales de la empresa exhiben una variabilidad **cíclica** por trimestre, donde las ventas en los dos primeros trimestres son mayores que en los dos últimos.

Algunas veces puede ser útil combinar las gráficas de serie de tiempo con alguno de los tipos de presentación gráfica considerados hasta el momento. J. Stuart Hunter (*The American Statistician*, vol. 42, 1988, pág. 54) sugiere la combinación de las gráficas de serie de tiempo con los diagramas de tallo y hoja para formar un **diagrama de dígitos y líneas.**

La figura 1-19 presenta un diagrama de dígitos y líneas para las observaciones de resistencia a la tensión de la tabla 1-1, con la hipótesis que éstas se registraron en el orden

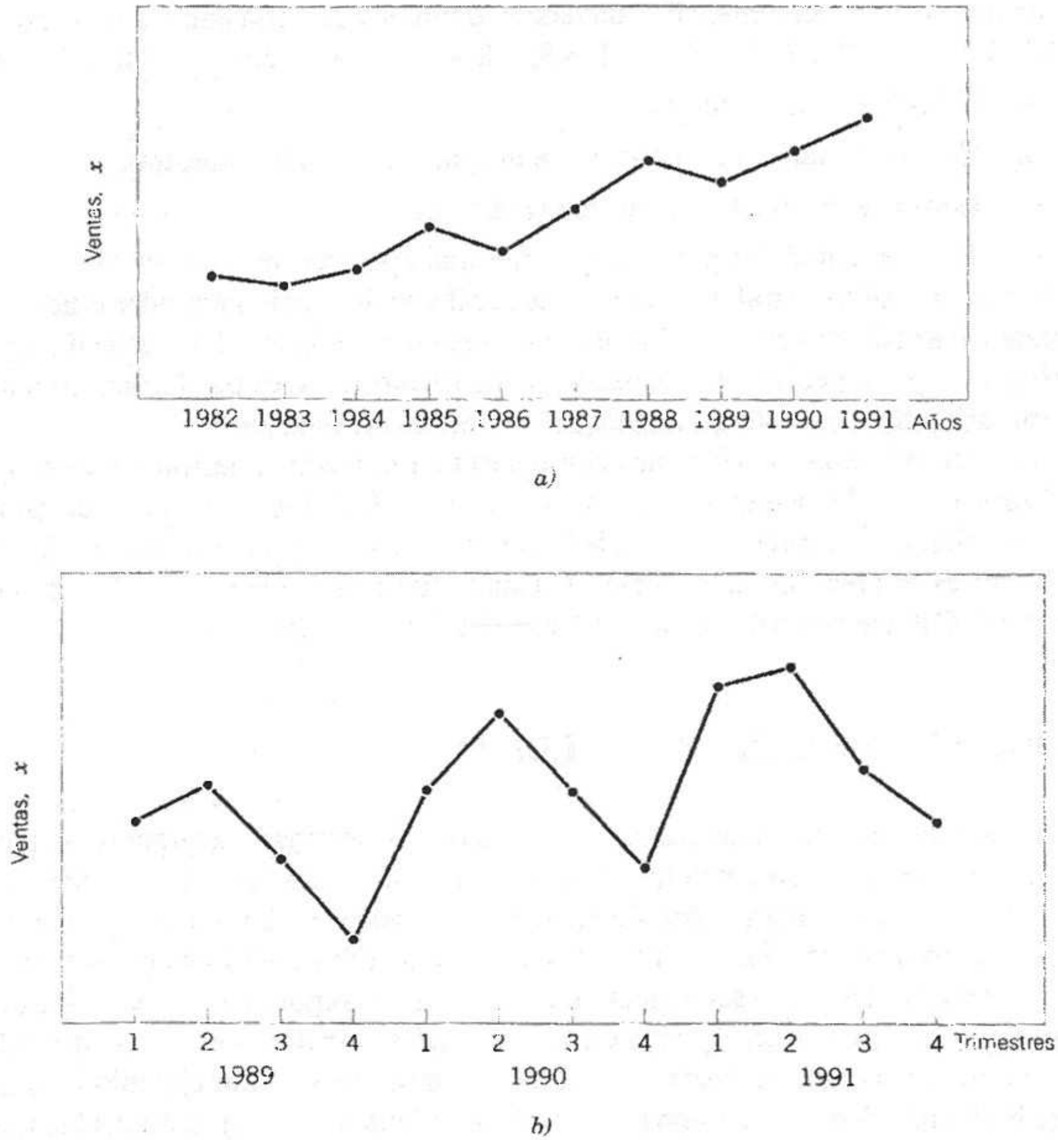


Figura 1-18 Ventas de una compañía por año a) y por trimestre b).

en que ocurrieron. Esta gráfica indica de manera eficaz la variabilidad total de los datos de resistencia a la tensión y, de manera simultánea, presenta la variabilidad en las mediciones con el paso del tiempo. La impresión general es que la resistencia cambia alrededor del valor medio de 162.67, y no hay ningún patrón obvio sobre esta variabilidad con respecto al tiempo.

El diagrama de dígitos y líneas de la figura 1-20 presenta una situación diferente. Esta gráfica resume 30 observaciones sobre la concentración de un producto obtenido mediante un proceso químico, donde las observaciones se registraron a intervalos de una hora. La gráfica indica que, durante las primeras 20 horas de operación, el proceso produjo concentraciones en general por encima de 85 g/l, pero después de la muestra 20 algo ocurrió con el proceso, que dio como resultado concentraciones más bajas. Si esta variabilidad en la concentración del producto puede reducirse, entonces es posible mejorar la operación del proceso.

La **carta de control** es otra manera útil de examinar la variabilidad en datos que dependen del tiempo. La figura 1-21 presenta una carta de control para los datos de concentración del proceso químico de la figura 1-20. La *línea central* de la carta de control representa

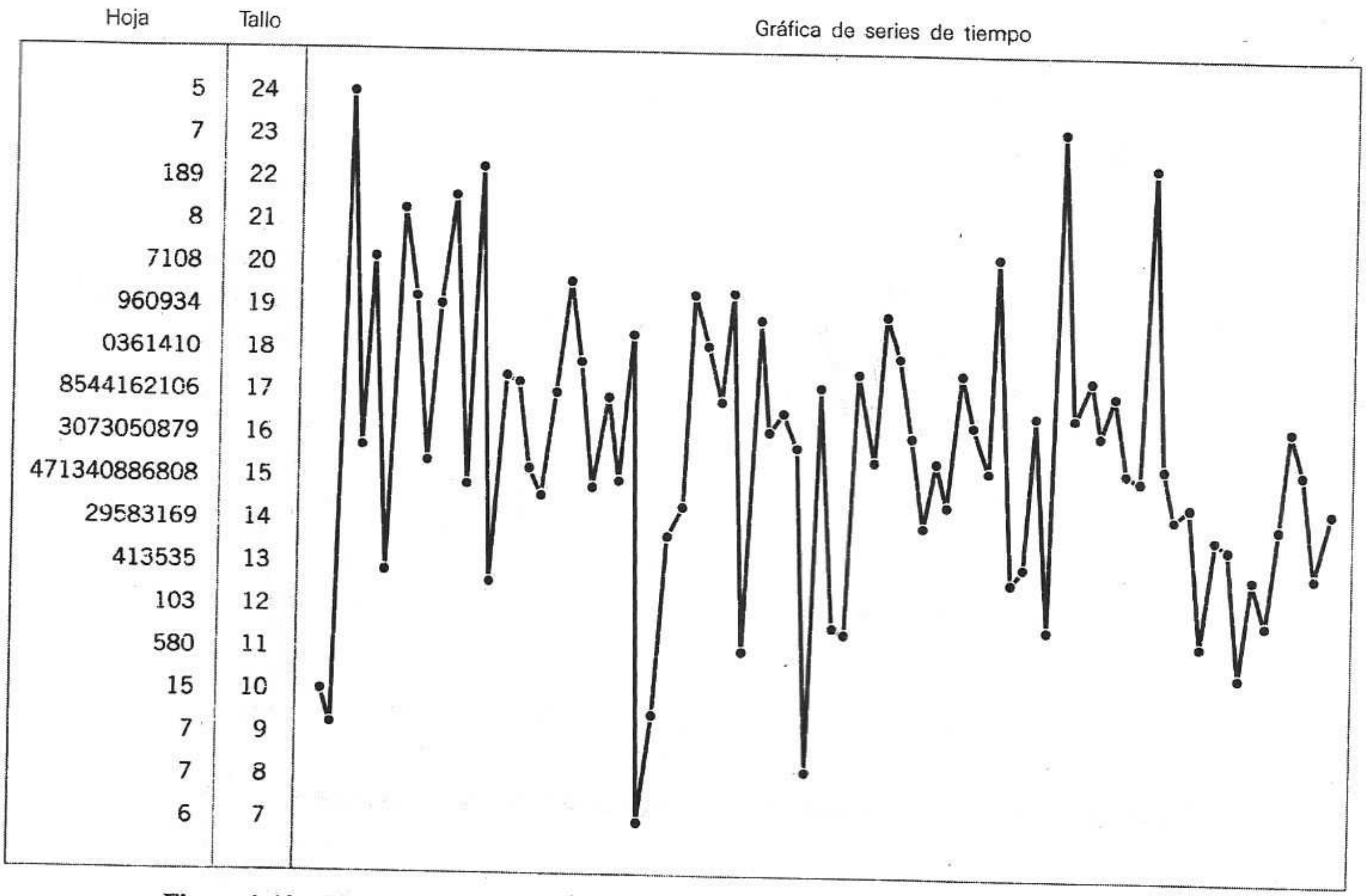


Figura 1-19 Diagrama de dígitos y líneas para los datos de resistencia a la tensión de la tabla 1-1.

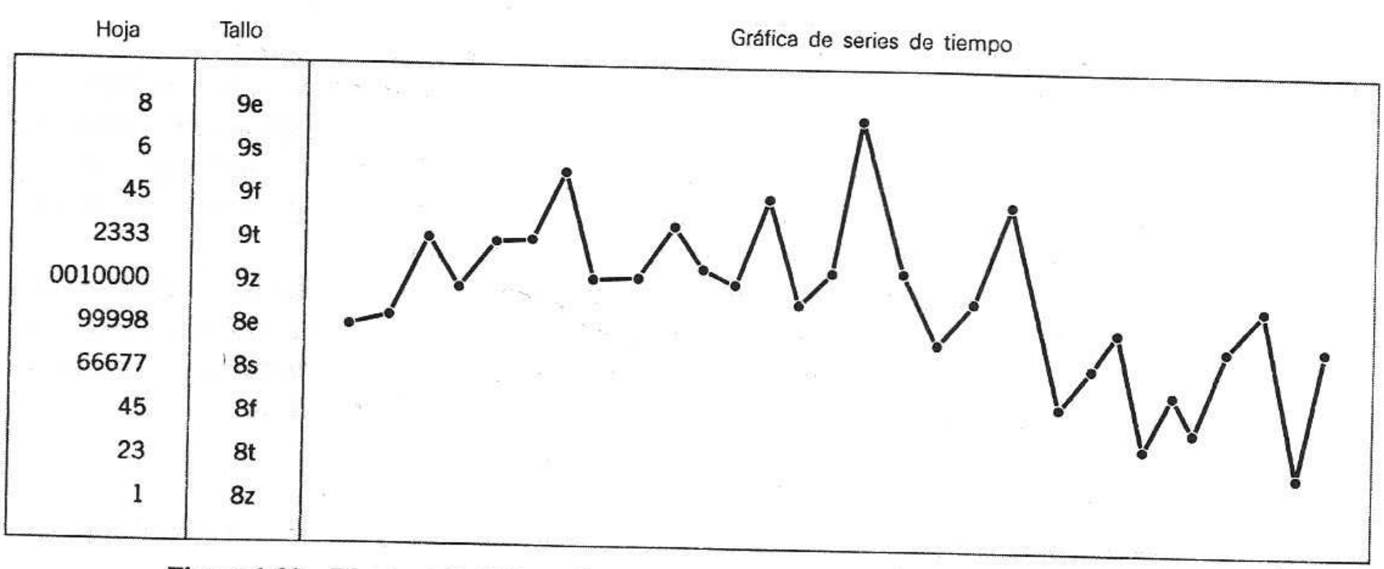


Figura 1-20 Diagrama de dígitos y líneas de las lecturas de concentración de un proceso químico tomadas cada hora.

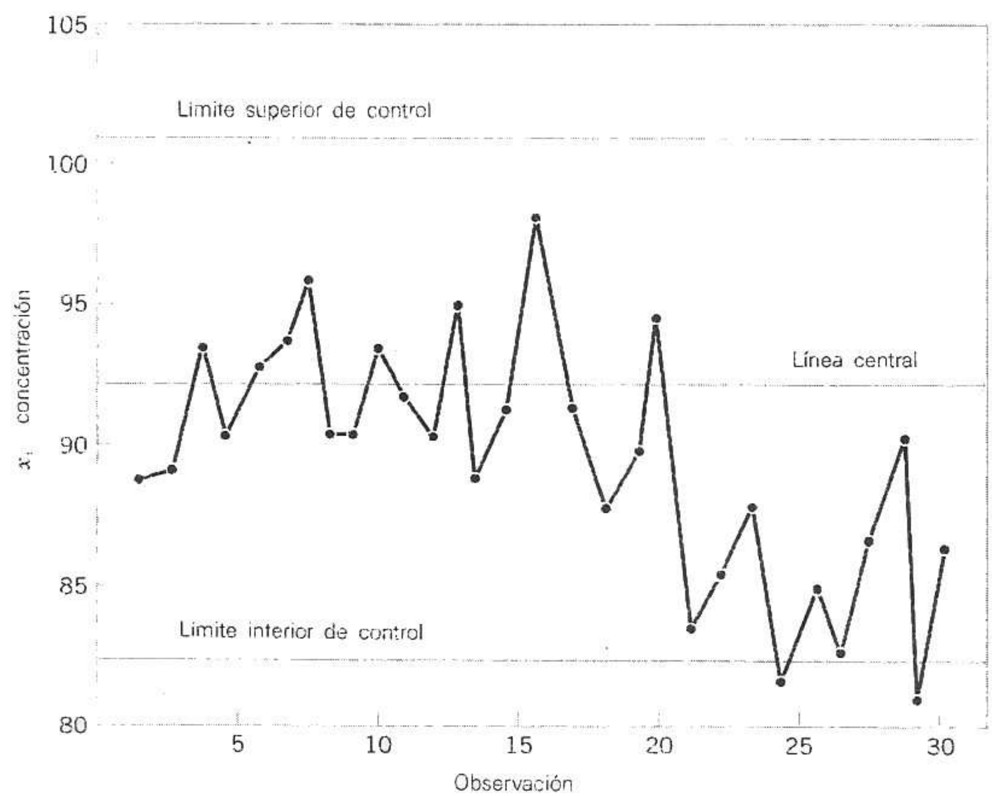


Figura 1-21 Carta de control para los datos de concentración del proceso químico.

el promedio de las mediciones de concentración para las primeras 20 muestras ($\bar{x}$ = 91.45 g/l). El *límite superior de control* y el *límite inferior de control* son un par de límites obtenidos estadísticamente que reflejan la variabilidad inherente o natural del proceso. Estos límites están localizados a tres desviaciones estándar de los valores de concentración por encima y por debajo de la línea central. Si el proceso está trabajando como se debe, sin ninguna fuente externa de variabilidad presente en el sistema, las mediciones de concentración deberán fluctuar de manera aleatoria alrededor de la línea central, y casi todas ellas deben caer dentro de los límites de control.

En la carta de control de la figura 1-21, el marco visual de referencia proporcionado por la línea central y los límites de control, indica que algún cambio o perturbación alrededor de la muestra 20 ha tenido efecto sobre el proceso, ya que todas las observaciones que siguen están por debajo de la línea central, y dos de ellas se encuentran aun más abajo del límite inferior de control. Esto constituye un indicador muy fuerte de que el proceso requiere de una acción correctiva. Si se puede encontrar y eliminar la causa que originó el cambio, podrá mejorarse de manera considerable el rendimiento del proceso.

Las cartas de control son una aplicación muy importante de la estadística para la vigilancia, control y perfeccionamiento de un proceso. La rama de la estadística que hace uso de las cartas de control se conoce como **control estadístico de procesos** o **CEP**. En el capítulo 14 se estudian de manera extensa el CEP y las cartas de control.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 1-5

1-39. El College of Engineering and Applied Science, de la Arizona State University, tiene un sistema de cómputo VAX. Los tiempos de respuesta (registrados en orden) para 20 trabajos consecutivos son los siguientes (de arriba abajo y de izquierda a derecha).

5.3	6.2	8.5	12.4
5.0	5.9	4.7	3.9
9.5	7.2	11.2	8.1
10.1	10.0	7.3	9.2
5.8	12.2	6.4	10.5

Construya e interprete una gráfica de series de tiempo para estos datos.

1-40. Los siguientes datos son mediciones de viscosidad de un producto químico tomadas cada hora (de arriba abajo y de izquierda a derecha).

47.9	48.8	48.6	43.2	43.0
47.9	48.1	48.0	43.0	42.8
48.6	48.3	47.9	43.5	43.1
48.0	47.2	48.3	43.1	43.2
48.4	48.9	48.5	43.0	43.6
48.1	48.6	48.1	42.9	43.2
48.0	48.0	48.0	43.6	43.5
48.6	47.5	48.3	43.3	43.0

a. Construya e interprete un diagrama de dígitos y líneas para estos datos.

b. Las especificaciones sobre la viscosidad del producto son 48 $\pm$ 2. ¿Qué conclusiones puede obtener usted sobre el desempeño del proceso?

1-41. En una prueba de laboratorio se mide la fuerza de tirantez de un conector. Los siguientes son los datos obtenidos (y registrados en orden) para 40 muestras bajo prueba (de arriba abajo y de izquierda a derecha):

241	220	249	209
258	194	251	212
237	245	238	185
210	209	210	187
194	201	198	218
225	195	199	190
248	255	183	175
203	245	213	178
195	235	236	175
249	220	245	190

a. Construya una gráfica de series de tiempo para estos datos.

b. Construya e interprete un diagrama de dígitos y líneas para estos datos.

1-42. En su libro *Time Series Analysis, Forecasting, and Control* (Holden-Day, 1976), G.E.P. Box y G.M. Jenkins presentan una serie de lecturas, tomadas cada dos horas, de la concentración de un proceso químico. A continuación se presentan algunos de estos datos (el orden es de arriba abajo y de izquierda a derecha).

17.0	16.7	17.1	17.5	17.6
16.6	17.4	17.4	18.1	17.5
16.3	17.2	17.4	17.5	16.5
16.1	17.4	17.5	17.4	17.8
17.1	17.4	17.4	17.4	17.3
16.9	17.0	17.6	17.1	17.3
16.8	17.3	17.4	17.6	17.1
17.4	17.2	17.3	17.7	17.4
17.1	17.4	17.0	17.4	16.9
17.0	16.8	17.8	17.8	17.3

Construya e interprete un diagrama de dígitos y líneas para estos datos.

1-43. A continuación aparece el número anual de manchas solares, de 1770 a 1869 de Wolfer. (Para un análisis e interpretación interesante de estos números, consulte el libro de Box y Jenkins cuya referencia aparece en el ejercicio 1-42. El análisis presentado por estos autores requiere un conocimiento avanzado de la estadística así como de la construcción de modelos estadísticos.)

1770	101	1795	21	1820	16	1845	40
1771	82	1796	16	1821	7	1846	62
1772	66	1797	6	1822	4	1847	98
1773	35	1798	4	1823	2	1848	124
1774	31	1799	7	1824	8	1849	96
1775	7	1800	14	1825	17	1850	66
1776	20	1801	34	1826	36	1851	64
1777	92	1802	45	1827	50	1852	54
1778	154	1803	43	1828	62	1853	39
1779	125	1804	48	1829	67	1854	21
1780	85	1805	42	1830	71	1855	7
1781	68	1806	28	1831	48	1856	4
1782	38	1807	10	1832	28	1857	23
1783	23	1808	8	1833	8	1858	55
1784	10	1809	2	1834	13	1859	94
1785	24	1810	0	1835	57	1860	96
1786	83	1811	1	1836	122	1861	77
1787	132	1812	5	1837	138	1862	59
1788	131	1813	12	1838	103	1863	44
1789	118	1814	14	1839	86	1864	47
1790	90	1815	35	1840	63	1865	30
1791	67	1816	46	1841	37	1866	16
1792	60	1817	41	1842	24	1867	7
1793	47	1818	30	1843	11	1868	37
1794	41	1819	24	1844	15	1869	74

a. Construya una gráfica de series de tiempo para estos datos.

b. Construya e interprete un diagrama de dígitos y líneas para estos datos.

1-44. En su libro *Forecasting and Time Series Analysis*, segunda edición (McGraw-Hill, 1990), D.C. Montgomery, L.A. Johnson y J.S. Gardiner analizan los siguientes datos, los cuales corresponden al número total de millas recorridas, por mes, por pasajeros de aeronaves en el Reino Unido, durante el periodo 1964-1970 (en millones de millas).

	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Ene.	7.269	8.350	8.186	8.334	8.639	9.491	10.840
Feb.	6.775	7.829	7.444	7.899	8.772	8.919	10.436
Mar.	7.819	8.829	8.484	9.994	10.894	11.607	13.589
Abr.	8.371	9.948	9.864	10.078	10.455	8.852	13.402
May.	9.069	10.638	10.252	10.801	11.179	12.537	13.103
Jun.	10.248	11.253	12.282	12.953	10.588	14.759	14.933
Jul.	11.030	11.424	11.637	12.222	10.794	13.667	14.147
Ago.	10.882	11.391	11.577	12.246	12.770	13.731	14.057
Sep.	10.333	10.665	12.417	13.281	13.812	15.110	16.234
Oct.	9.109	9.396	9.637	10.366	10.857	12.185	12.389
Nov.	7.685	7.775	8.094	8.730	9.290	10.645	11.594
Dic.	7.682	7.933	9.280	9.614	10.925	12.161	12.772

a. Dibuje una gráfica de series de tiempo para estos datos y explique cualquier característica de éstos que sea evidente.

b. Construya e interprete un diagrama de dígitos y líneas para estos datos.

1-45. Los siguientes datos corresponden a las ventas mensuales, en miles de botellas, de champagne, en Francia (1962-1969).

a. Dibuje una gráfica de series de tiempo y comente cualquier característica de los datos revelada por la gráfica.

b. Construya e interprete un diagrama de dígitos y líneas para estos datos.

Año	Mes	Ventas	Año	Mes	Ventas	Año	Mes	Ventas
1962	Ene.	2.851	1963	Ene.	2.541	1964	Ene.	3.113
	Feb.	2.672		Feb.	2.475		Feb.	3.006
	Mar.	2.755		Mar.	3.031		Mar.	4.047
	Abr.	2.721		Abr.	3.266		Abr.	3.523
	May.	2.946		May.	3.776		May.	3.937
	Jun.	3.036		Jun.	3.230		Jun.	3.986
	Jul.	2.282		Jul.	3.028		Jul.	3.260
	Ago.	2.212		Ago.	1.759		Ago.	1.573
	Sep.	2.922		Sep.	3.595		Sep.	3.528
	Oct.	4.301		Oct.	4.474		Oct.	5.211
	Nov.	5.764		Nov.	6.838		Nov.	7.614
	Dic.	7.132		Dic.	8.357		Dic.	9.254
1965	Ene.	5.375	1966	Ene.	3.633	1967	Ene.	4.016
	Feb.	3.088		Feb.	4.292		Feb.	3.957
	Mar.	3.718		Mar.	4.154		Mar.	4.510
	Abr.	4.514		Abr.	4.121		Abr.	4.276
	May.	4.520		May.	4.647		May.	4.968
	Jun.	4.539		Jun.	4.753		Jun.	4.677
	Jul.	3.663		Jul.	3.965		Jul.	3.523
	Ago.	1.643		Ago.	1.723		Ago.	1.821
	Sep.	4.739		Sep.	5.048		Sep.	5.222
	Oct.	5.428		Oct.	6.922		Oct.	6.873
	Nov.	8.314		Nov.	9.858		Nov.	10.803
	Dic.	10.651		Dic.	11.331		Dic.	13.916
1968	Ene.	2.639	1969	Ene.	3.934			
	Feb.	2.899		Feb.	3.162			
	Mar.	3.370		Mar.	4.286			
	Abr.	3.740		Abr.	4.676			
	May.	2.927		May.	5.010			
	Jun.	3.986		Jun.	4.874			
	Jul.	4.217		Jul.	4.633			
	Ago.	1.738		Ago.	1.659			
	Sep.	5.221		Sep.	5.591			
	Oct.	6.424		Oct.	6.981			
	Nov.	9.842		Nov.	9.851			
	Dic.	13.076		Dic.	12.670			

Ejercicios complementarios

1-46. Un artículo publicado en *Quality Engineering* (Vol. 4, 1992, págs. 487-495) presenta datos de viscosidad de un lote de cierto proceso químico. La siguiente es una muestra de estos datos.

13.3	14.9	15.8	16.0
14.5	13.7	13.7	14.9
15.3	15.2	15.1	13.6
15.3	14.5	13.4	15.3
14.3	15.3	14.1	14.3
14.8	15.6	14.8	15.6
15.2	15.8	14.3	16.1
14.5	13.3	14.3	13.9
14.6	14.1	16.4	15.2
14.1	15.4	16.9	14.4
14.3	15.2	14.2	14.0
16.1	15.2	16.9	14.4
13.1	15.9	14.9	13.7
15.5	16.5	15.2	13.8
12.6	14.8	14.4	15.6
14.6	15.1	15.2	14.5
14.3	17.0	14.6	12.8
15.4	14.9	16.4	16.1
15.2	14.8	14.2	16.6
16.8	14.0	15.7	15.6

a. Construya un diagrama de tallo y hoja para los datos de viscosidad.

b. Construya una distribución de frecuencias y un histograma.

c. Convierta el diagrama de tallo y hoja del inciso a) en un diagrama de tallo y hoja ordenado. Utilice este diagrama como ayuda para localizar la mediana y los cuartiles inferior y superior de los datos de viscosidad.

d. ¿Cuáles son los cuartiles 90 y 10 de la viscosidad?

1-47. Convierta el diagrama de tallo y hoja del ejercicio 1-7 en un diagrama de tallo y hoja ordenado.

a. Encuentre los cuartiles inferior y superior y la mediana muestral.

b. Prepare un diagrama de caja de estos datos.

1-48. La prevención de fisuras por fatiga en la estructura de las aeronaves en un elemento muy importante de la seguridad de estos medios de transporte. Un estudio de ingeniería para investigar las fisuras por fatiga en $n = 9$ alas con carga arrojó las siguientes longitudes para las fisuras (en mm): 2.13, 2.96, 3.02, 1.82, 1.15, 1.37, 2.04, 2.47, 2.60.

- **a.** Calcule la mediana muestral.
- **b.** Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.
- **c.** Prepare un diagrama de caja para estos datos.

1-49. Considere los datos de intensidad solar del ejercicio 1-6.

- **a.** Calcule la media muestral.
- **b.** Calcule la mediana muestral.
- **c.** Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.
- **d.** Prepare un diagrama de caja para estos datos.

1-50. El ejercicio 1-5 describe datos de un artículo de *Human Factors* sobre acomodamiento visual, tomados de un experimento donde se utilizó la pantalla de un tubo de rayos catódicos de alta resolución.

- **a.** Construya un diagrama de caja para estos datos.
- **b.** En el artículo también aparecen datos provenientes de un segundo experimento, donde se utilizó una pantalla de baja resolución. Los datos son 8.85, 35.80, 26.53, 64.63, 9.00, 15.38, 8.14 y 8.24. Prepare un diagrama de caja para esta segunda muestra y compárela con la primera. ¿Qué puede concluir con respecto a la resolución del TRC en esta situación?

1-51. Un operador mide ocho veces el pH de una solución utilizando el mismo instrumento. Los datos que obtiene son los siguientes: 7.15, 7.20, 7.18, 7.19, 7.21, 7.20, 7.16 y 7.18.

- **a.** Calcule la media muestral.
- **b.** Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.
- **c.** En este experimento, ¿cuáles son las fuentes más importantes de variabilidad?

1-52. Convierta el diagrama de tallo y hoja del ejercicio 1-8 en un diagrama de tallo y hoja ordenado.

- **a.** Encuentre los cuartiles inferior y superior así como la mediana muestral.
- **b.** Encuentre el percentil 95.
- **c.** Prepare un diagrama de caja para estos datos.

1-53. Construya un diagrama de tallo y hoja ordenado para los datos de rendimiento del ejercicio 1-10. Encuentre la mediana, los cuartiles inferior y superior, y los percentiles 5 y 95 de estos datos.

1-54. Los datos siguientes representan la temperatura del fluido de descarga de una planta para el tratamiento de aguas negras durante varios días consecutivos:

43	47	51	48	52	50	46	49	45	52	46	51
44	49	46	51	49	45	44	50	48	50	49	50

a. Calcule la media muestral y la mediana.

b. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

c. Construya un diagrama de caja con estos datos, y discuta la información que éste ofrece.

d. Encuentre los percentiles 5 y 95 de la temperatura.

1-55. Los pesos (en onzas) de diez bolsas de caramelo son los siguientes:

1.69 1.69 1.68 1.68 1.67 1.70 1.71 1.69 1.70 1.68

a. ¿Cuál es la moda?

b. Calcule la media muestral y la mediana muestral.

c. Calcule la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

1-56. Considere el siguiente par de muestras:

Muestra 1: 10, 9, 8, 7, 8, 6, 10, 6

Muestra 2: 10, 6, 10, 6, 8, 10, 8, 6

a. Calcule el rango de ambas muestras. ¿Es posible concluir que las dos muestras exhiben la misma variabilidad?

b. Calcule la desviación estándar de cada una de las muestras. ¿Estas cantidades indican que las dos muestras tienen la misma variabilidad?

c. Escriba un planteamiento breve para contrastar el rango de la muestra y la desviación estándar muestral como una medida de variabilidad.

1-57. **Transformaciones.** En algunos conjuntos de datos se aplica una transformación matemática a los datos originales, tal como $\sqrt{y}$ o $\log y$, que puede dar como resultado datos con los que es más fácil trabajar desde el punto de vista estadístico. Para ilustrar el efecto de una transformación, considere los siguientes datos, los cuales representan el número de vueltas transcurridas antes de una falla para un producto de hilo: 675, 3650, 175, 1150, 290, 2000, 100, 375.

a. Construya un diagrama de caja y comente la forma que tiene la distribución.

b. Transforme los datos utilizando logaritmos; esto es, sea y^* (nuevo valor) = $\log y$ (valor original). Construya un diagrama de caja para los datos transformados y comente el efecto de la transformación.

1-58. Considere los datos de viscosidad de un proceso químico que aparecen en el ejercicio 1-46. Suponga que las observaciones se registraron en orden (de arriba abajo y de izquierda a derecha).

a. Construya una gráfica de series de tiempo.

b. Construya e interprete un diagrama de dígitos y líneas para estos datos.

EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

1-59. Considere los datos de resistencia dados en el ejercicio 1-30. Reste 30 de cada valor y luego multiplique las diferencias por 10. Ahora calcule s^2 para el nuevo conjunto de datos. ¿Qué relación existe entre esta s^2 y la de los datos *originales*? Explique.

1-60. Un experimento para investigar el tiempo de duración en horas de un componente electrónico consiste en colocar las partes en una celda de prueba y utilizarlas durante 100 horas bajo condiciones de temperatura elevada. (Este proceso recibe el nombre de prueba de duración "acelerada".) Se prueban ocho componentes y se obtienen los siguientes tiempos de falla:

$$75, 63, 100^+, 36, 51, 45, 80, 90$$

La observación "100^+" indica que la unidad continúa funcionando después de 100 horas. ¿Existe alguna medida significativa de la localización de estos datos que pueda calcularse a partir de ellos? ¿Cuál es su valor numérico?

1-61. Considere la cantidad $\sum_{i=1}^{n} (x_1 - a)^2$. ¿Para qué valor de a esta cantidad es mínima?

1-62. Utilizando los resultados del ejercicio 1-61, ¿cuál de las dos cantidades $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ y $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$ será más pequeña, siempre que $\overline{x} \neq \mu$?

1-63. **Codificación de datos.** Sea $y_i = a + bx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, donde a y b son constantes distintas de cero. Encuentre la relación entre $\overline{x}$ e $\overline{y}$, y entre s_x y s_y.

1-64. El promedio de temperatura (en °F) de un conjunto de mediciones de temperatura de un horno es de 835.00, y la desviación estándar de la muestra es 10.5. Utilizando los resultados del ejercicio 1-63, ¿qué valor tienen la media y la desviación estándar muestral, si la temperatura se expresa en °C?

1-65. Considere la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con una media muestral $\overline{x}$ y una desviación estándar muestral s. Sea $z_i = (x_i - \overline{x})/s$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Cuáles son los valores de la media y la desviación estándar muestral de las z_i?

1-66. Suponga que se tiene una muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y que se ha calculado $\overline{x}_n$ y s_n^2. Después se tiene disponible una observación más, $(n + 1)^{\text{-ésima}}$. Sean $\overline{x}_{n+1}$ y s_{n+1}^2 la media y la varianza muestral cuando se emplean en el cálculo las $n + 1$ observaciones.

a. Indique cómo puede calcularse $\overline{x}_{n+1}$ utilizando $\overline{x}_n$ y x_{n+1}.

b. Demuestre que $ns_{n+1}^2 = (n-1)s_n^2 + \dfrac{n}{n+1}(x_{n+1} - \overline{x}_n)^2$.

c. Utilice los resultados de los incisos **a)** y **b)** para calcular el promedio y la desviación estándar nuevos para los datos del ejercicio 1-30, cuando la nueva observación es $x_7 = 46$.

1-67. **Media ajustada.** Suponga que los datos se acomodan en orden creciente, se elimina un porcentaje T de las observaciones en cada extremo y luego se calcula la media muestral con las observaciones que quedan. La cantidad resultante se conoce como *media ajustada*. Este valor generalmente se encuentra entre la media muestral $\bar{x}$ y la mediana muestral $\tilde{x}$. ¿Por qué?

a. Calcule la media ajustada al 10% de los datos de rendimiento del ejercicio 1-10.

b. Calcule la media ajustada al 20% de los datos de rendimiento del ejercicio 1-10, y compárela con el valor obtenido en el inciso **a**).

c. Compare los valores calculados en los incisos **a**) y **b**) con la media muestral y la mediana de los datos del ejercicio 1-10. ¿Existe mucha diferencia entre estas cantidades? ¿Por qué?

1-68. **Media ajustada.** Suponga que el tamaño de la muestra n es tal, que la cantidad $nT/100$ no es un entero. Desarrolle un procedimiento para obtener en este caso la media ajustada.

2 Probabilidad

2-1 ESPACIOS MUESTRALES Y EVENTOS

2-1.1 Introducción

Si se mide la corriente que circula por un alambre de cobre delgado, lo que se está haciendo es un **experimento**. Sin embargo, al repetir la medición durante varios días los resultados que se obtienen son un poco diferentes debido a pequeñas variaciones en las variables que no están controladas en el experimento, como son los cambios en la temperatura ambiente, ligeras variaciones en el instrumento de medición y pequeñas impurezas en la composición química del alambre en distintas partes, además de las variaciones en la fuente de corriente. En consecuencia, se dice que este experimento (así como muchos otros) tiene un componente **aleatorio**. En algunos casos, las variaciones aleatorias observadas son tan pequeñas en relación con las metas del experimento, que pueden ignorarse. Sin embargo, la variación

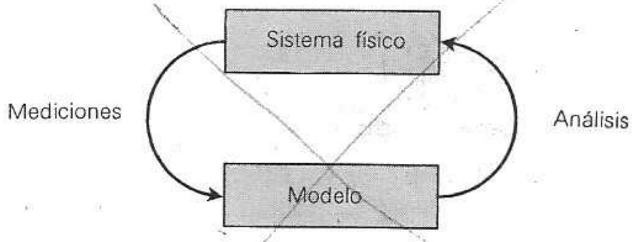


Figura 2-1 Iteración continua entre el modelo y el sistema físico.

casi siempre está presente y su magnitud puede llegar a ser tan importante a tal grado, que las conclusiones del experimento no sean muy evidentes. En estos casos, son muy valiosos los métodos presentados en este libro para el modelado y análisis de datos experimentales.

Sin importar con cuánto cuidado se diseñe y se realice un experimento, siempre se tendrán variaciones. La meta es comprender, cuantificar y modelar el tipo de variaciones que a menudo se encuentran en la práctica. Cuando se incorpora la variación en el análisis, siempre pueden obtenerse conclusiones fundamentales de los resultados que no se invaliden por la variación.

Los modelos y análisis que incluyen variación no son muy diferentes de los modelos utilizados en otras áreas de la ingeniería y la ciencia. La figura 2-1 presenta los componentes importantes. Primero se desarrolla un modelo matemático (o abstracción) del sistema físico. El modelo no necesita ser una abstracción perfecta. Por ejemplo, las leyes de Newton no son descripciones perfectas del universo físico, pero son modelos útiles que pueden estudiarse y analizarse para cuantificar de manera aproximada el desempeño de una amplia gama de productos de la ingeniería. Dada una abstracción matemática validada por mediciones tomadas del sistema, el modelo puede emplearse para comprender, describir y cuantificar aspectos importantes del sistema físico, y predecir la respuesta del sistema a diversas entradas.

En el presente texto se estudian modelos que permiten variaciones en las salidas de un sistema, aun cuando las variables que se controlan no cambien a propósito durante el estudio. La figura 2-2 ilustra de manera gráfica un modelo que incorpora entradas no controlables (ruido), combinadas con las entradas controlables para producir la salida del sistema. Debido a la presencia de entradas no controlables, el empleo de las mismas especificaciones para las entradas controlables no siempre dará como resultado las mismas salidas cada vez que se haga una medición sobre el sistema.

Para el ejemplo de la medición de corriente en un alambre de cobre, el modelo del sistema puede ser bastante sencillo: la ley de Ohm,

$$\text{Corriente} = \text{Voltaje/Resistencia}$$

Tal como ya se indicó, la presencia de entradas no controlables traerá variaciones en las mediciones de corriente. La ley de Ohm puede ser una aproximación adecuada. Sin embargo, si las variaciones son grandes en relación con el empleo que se pretende dar al dispositivo que se estudia, tal vez sea necesario extender el modelo para incluir las variaciones. A menudo es difícil especular sobre la magnitud de las variaciones sin tener a la mano mediciones empíricas. No obstante, con un número suficiente de éstas, es posible aproximar la magnitud de la variación y considerar el efecto que tiene ésta sobre el desempeño de otros dispositivos (como los amplificadores) en el circuito. Por tanto, se confirma que el modelo de la figura 2-2 es una descripción más útil del proceso de medición de la corriente. En

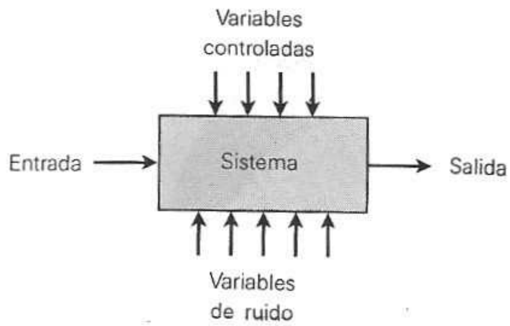


Figura 2-2 Las variables de ruido afectan la transformación de entradas en salidas.

consecuencia, las técnicas presentadas en este libro para el análisis de modelos que incluyen variaciones son, a menudo, muy provechosas. (Véase también la figura 2-3.)

Como otro ejemplo, considérese el diseño de un sistema de comunicación, tal como una red de computadoras o una red de comunicación por voz, donde la capacidad de información disponible para quienes hacen uso de la red es un aspecto importante de diseño. Para la comunicación por voz, es necesario adquirir un número suficiente de líneas telefónicas externas para satisfacer la demanda de la compañía. Si se supone que cada línea puede soportar sólo una conversación, ¿cuántas líneas es necesario adquirir? Si se adquieren pocas líneas, las llamadas se retrasarán o incluso llegarán a perderse. La compra de demasiadas líneas incrementa los costos. Cada vez más, se requiere que el diseño y el desarrollo del producto satisfagan los requerimientos del cliente a un *costo competitivo*.

En el diseño del sistema de comunicación por voz, se necesita un modelo para el número de llamadas y la duración de éstas. No es suficiente saber que, en promedio, se recibe una llamada cada cinco minutos y que su duración es de cinco minutos. Si las llamadas llegan precisamente cada cinco minutos y duran exactamente cinco minutos, entonces una línea telefónica será suficiente. Sin embargo, la más pequeña variación en el número de llamadas o en la duración de éstas traerá como resultado que algunas llamadas sean bloqueadas por otras. Véase la figura 2-4. Un sistema diseñado sin considerar la variación será, de manera lamentable, inadecuado para un uso práctico. Por tanto, lo que se necesita es un modelo para el número y la duración de las llamadas que incluya la variación como una parte importante del mismo. En consecuencia, para el diseño del sistema telefónico es importante efectuar un análisis de varios modelos que incluyan la variación.

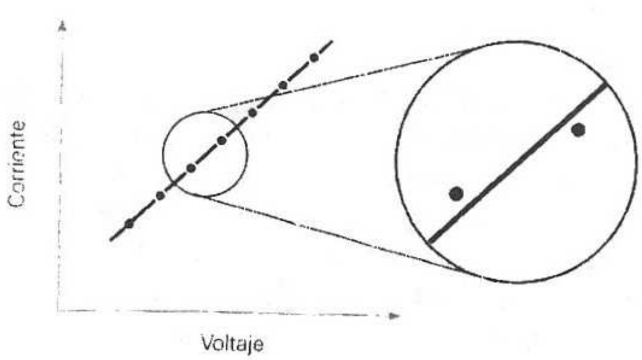


Figura 2-3 Un examen más cercano del sistema identifica desviaciones con respecto al modelo.

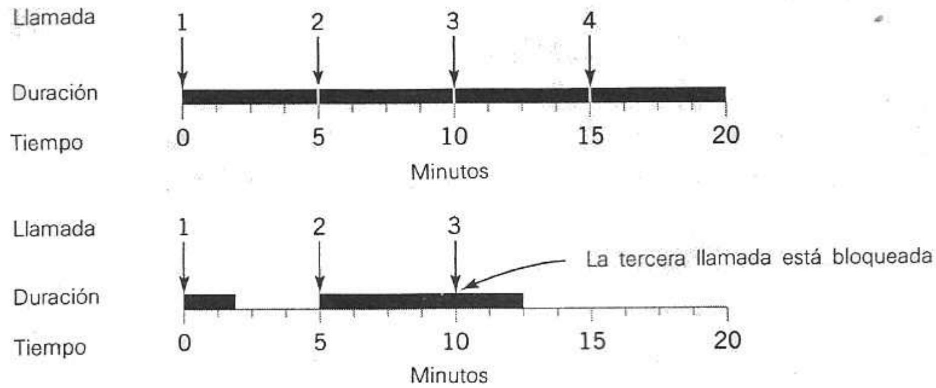


Figura 2-4 La variación causa interrupciones en el sistema.

2-1.2 Experimentos aleatorios

Definición

Un **experimento aleatorio** es aquel que proporciona diferentes resultados aun cuando se repita siempre de la misma manera.

Supóngase que se toma una muestra de aire de un tanque de almacenamiento, para analizar la presencia de una molécula rara. Los resultados de este experimento pueden reasumirse de una manera muy sencilla: la muestra contiene o no la molécula. Esta situación puede considerarse como un experimento aleatorio con sólo dos resultados posibles.

La energía que consume una reacción química puede cambiar cuando el experimento se repite en distintos momentos o en laboratorios diferentes. Éste es un experimento aleatorio con muchos resultados. Supóngase que algunos de los componentes electrónicos de la producción diaria no cumplen con los requisitos de temporización de un sistema altamente acabado. Si se seleccionan dos partes de la producción del día de manera arbitraria y se anota si cada parte cumple con los requisitos de temporización, entonces lo que se tiene es un experimento aleatorio. Los resultados dependen de lo que se suceda con las dos partes seleccionadas. Si este experimento se repite, entonces pueden elegirse dos partes diferentes, lo que dará como resultado dos valores de temporización diferentes.

Para modelar y analizar un experimento aleatorio, primero debe comprenderse el conjunto de resultados posibles del experimento. En esta introducción a la probabilidad se usarán los conceptos básicos de conjuntos y las operaciones entre conjuntos. Se supone que el lector está familiarizado con estos cenceptos.

Definición

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de **espacio muestral** del experimento. El espacio muestral se denota con la letra S.

EJEMPLO 2-1

Supóngase que se analiza un cilindro de aire, para detectar la presencia de una molécula rara. Los resultados posibles de este experimento pueden resumirse simplemente como {sí} o {no}, lo que depende de si el cilindro seleccionado contiene o no la molécula. Es así como en este ejemplo el espacio muestral sólo contiene dos resultados posibles, $S = \{\text{sí, no}\}$.

EJEMPLO 2-2

Considérese un experimento donde se seleccionan dos componentes y se clasifican conforme cumplen o no los requerimientos de temporización eléctrica del producto. Un resultado de este experimento es que la primera parte sea aceptable, y la segunda, no; esto se denotará como AN. Si se emplea esta notación, entonces puede representarse el espacio muestral del experimento como el conjunto

$$S = \{AA, AN, NA, NN\},$$

donde la primera letra de cada par indica la clasificación de la primera parte, mientras que la segunda señala la clasificación de la segunda parte.

La mejor representación de un espacio muestral depende de los objetivos que se persiguen. Si sólo se tiene interés en el número de artículos aceptables obtenidos en la muestra, entonces el espacio muestral puede resumirse así: $S = \{2, 1, 0\}$. En esta representación, se pierden los detalles sobre qué selección es la que no cumple con los requisitos.

En experimentos aleatorios que implican la selección de artículos de un lote, es necesario indicar si el artículo seleccionado será colocado de nuevo, o no, en el lote antes de seleccionar el siguiente. Por ejemplo, si el lote contiene tres artículos $\{a, b, c\}$ y el experimento consiste en seleccionar dos de ellos **sin remplazo**, entonces el espacio muestral puede representarse como $S = \{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}$. Sin embargo, si los artículos se devuelven al lote antes de seleccionar el siguiente, el muestreo se denomina **con remplazo**. En este caso, los resultados posibles son $S = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.

EJEMPLO 2-3

En un experimento donde cada hora se selecciona una parte moldeada por inyección, y se mide con exactitud la longitud, el espacio muestral es mucho más difícil de describir. En este caso, el espacio muestral es un subconjunto del conjunto de todos los números reales. El estudio de este tipo de experimentos se pospondrá hasta el capítulo 4.

EJEMPLO 2-4

Considérese un experimento en el que, cada diez minutos, se verifica el volumen de llenado de las latas de refresco de una máquina llenadora automática, con la finalidad de determinar si las latas cumplen con las especificaciones de volumen que deben contener. La evaluación continúa hasta encontrar una lata que no cumpla con las especificaciones.

Si s denota el hecho de que la lata cumple con las especificaciones, y n, de que no cumple con ellas, entonces cada resultado del espacio muestral puede representarse como una secuencia de estas letras. Dado que el experimento termina cuando una lata no cumple con las especificaciones, la secuencia de letras está formada por una cadena de *eses* seguida por una n.

Con esto, el espacio muestral puede representarse como

$$S = \{n, sn, ssn, sssn, ssssn, \text{ y así sucesivamente}\}$$

Este espacio muestral tiene un número infinito de resultados posibles.

En algunos experimentos, el resultado final puede depender de los resultados intermedios.

EJEMPLO 2-5

Considérese el experimento que consiste en seleccionar un componente electrónico y clasificarlo según cumple o no los requerimientos de temporización del producto. Si el componente es aceptable

, entonces sólo se asienta este hecho. Si no es aceptable, se registra el hecho y luego se clasifica el resultado de la temporización en una de cuatro categorías, las cuales se indican con los códigos a, b, c o d. De este modo, el conjunto de todos los resultados posibles de este experimento puede describirse como

$$S = \{A, Na, Nb, Nc, Nd\}$$

En este capítulo se introduce la probabilidad para espacios muestrales que tienen sólo un conjunto finito (o infinito contable) de resultados. La restricción sobre estos espacios muestrales permite simplificar los conceptos y la presentación sin hacer uso de muchas matemáticas.

Definición

Un espacio muestral es **discreto** si está formado por un conjunto finito (o infinito contable) de resultados.

2-1.3 Eventos

A menudo, el interés recae en una colección de resultados relacionados entre sí de un experimento aleatorio.

Definición

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio.

EJEMPLO 2-6

En el ejemplo 2-2, supóngase que se denota por E_1 al conjunto de todos los resultados para los que al menos una de las partes no es aceptable. Entonces,

$$E_1 = \{AN, NA, NN\}$$

El evento en el que ambas partes no son aceptables, denotado por E_2, sólo contiene un resultado: $E_2 = \{NN\}$. Otros ejemplos de eventos son $E_3 = \varnothing$, el conjunto vacío, y $E_4 = S$, el espacio muestral.

Frecuentemente, el interés recae en describir eventos nuevos a partir de combinaciones de eventos existentes. Ya que los eventos son subconjuntos, entonces es posible utilizar las operaciones básicas de conjuntos, tales como uniones, intersecciones y complementos, para formar otros eventos de interés. A continuación se proporciona un resumen de algunas operaciones básicas de conjuntos, en términos de eventos:

La **unión** de dos eventos es el evento que está formado por todos los resultados contenidos en cualquiera de los dos eventos. La unión se denota por $E_1 \cup E_2$.

La **intersección** de dos eventos es el evento que está formado por los resultados contenidos en ambos eventos. La intersección se denota por $E_1 \cap E_2$.

El **complemento** de un evento en un espacio muestral es el conjunto de resultados en el espacio muestral que no están en el evento. Este componente del evento E se denota por E'.

EJEMPLO 2-7

El espacio muestral del experimento aleatorio del ejemplo 2-2 es $S = \{AA, AN, NA, NN\}$. Si $E_1 = \{AA, AN, NA\}$ y $E_2 = \{AN, NA, NN\}$; entonces

$$E_1 \cup E_2 = \{AA, AN, NA, NN\} = S$$

$$E_1 \cap E_2 = \{AN, NA\}$$

$$E_1' = \{NN\}, E_2' = \{AA\}$$

EJEMPLO 2-8

Las mediciones del tiempo (redondeadas al minuto más próximo) necesario para completar una reacción química pueden modelarse utilizando el espacio muestral $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Sean

$$E_1 = \{x \mid 1 \leq x < 10\} = [1, 2, \ldots, 9]$$

y

$$E_2 = \{x \mid 3 < x < 118\} = [4, 5, \ldots, 117]$$

Entonces,

$$E_1 \cup E_2 = \{x \mid 1 \leq x < 118\} = [1, 2, \ldots, 117] \quad \text{y} \quad E_1 \cap E_2 = \{x \mid 3 < x < 10\} = [4, 5, \ldots, 9]$$

Por otra parte,

$$E_1' = \{x \mid x \geq 10\} = [10, 11, \ldots]$$

y

$$E_1' \cap E_2 = \{x \mid 10 \leq x < 118\} = [10, 11, \ldots 117]$$

Los diagramas se utilizan con frecuencia para representar relaciones entre conjuntos, y también son muy útiles para describir relaciones entre eventos. Los **diagramas de Venn** pueden emplearse para representar un espacio muestral y los eventos contenidos en éste. Por ejemplo, en la figura 2-5*a*, el espacio muestral del experimento aleatorio está representado por puntos dentro del rectángulo S. Los eventos E_1 y E_2 son los subconjuntos de puntos de las regiones indicadas en la figura. La figura 2-5*b* ilustra dos eventos que no tienen resultados en común; las figuras 2-5*c* a 2-5*e* ilustran varios eventos combinados.

EJEMPLO 2-9

Se analizan muestras de policarbonato plástico para determinar su resistencia a las rayaduras y a los golpes. A continuación se presenta el resumen de los resultados obtenidos con 49 muestras.

		resistencia a los golpes	
		alta	baja
resistencia a las rayaduras	alta	40	4
	baja	2	3

Seas A: el evento "la muestra tiene una alta resistencia a los golpes", y B: el evento "la muestra tiene una alta resistencia a las rayaduras". Determine el número de muestras en $A \cap B$, A' y $A \cup B$. Represente con diagramas de Venn este espacio muestral y los eventos A y B. Indique el número de resultados en cada región del diagrama.

El evento $A \cap B$ está formado por 40 muestras para las que la resistencia a las rayaduras y a los golpes son altas. El evento A$'$ contiene siete muestras para las que la resistencia a los

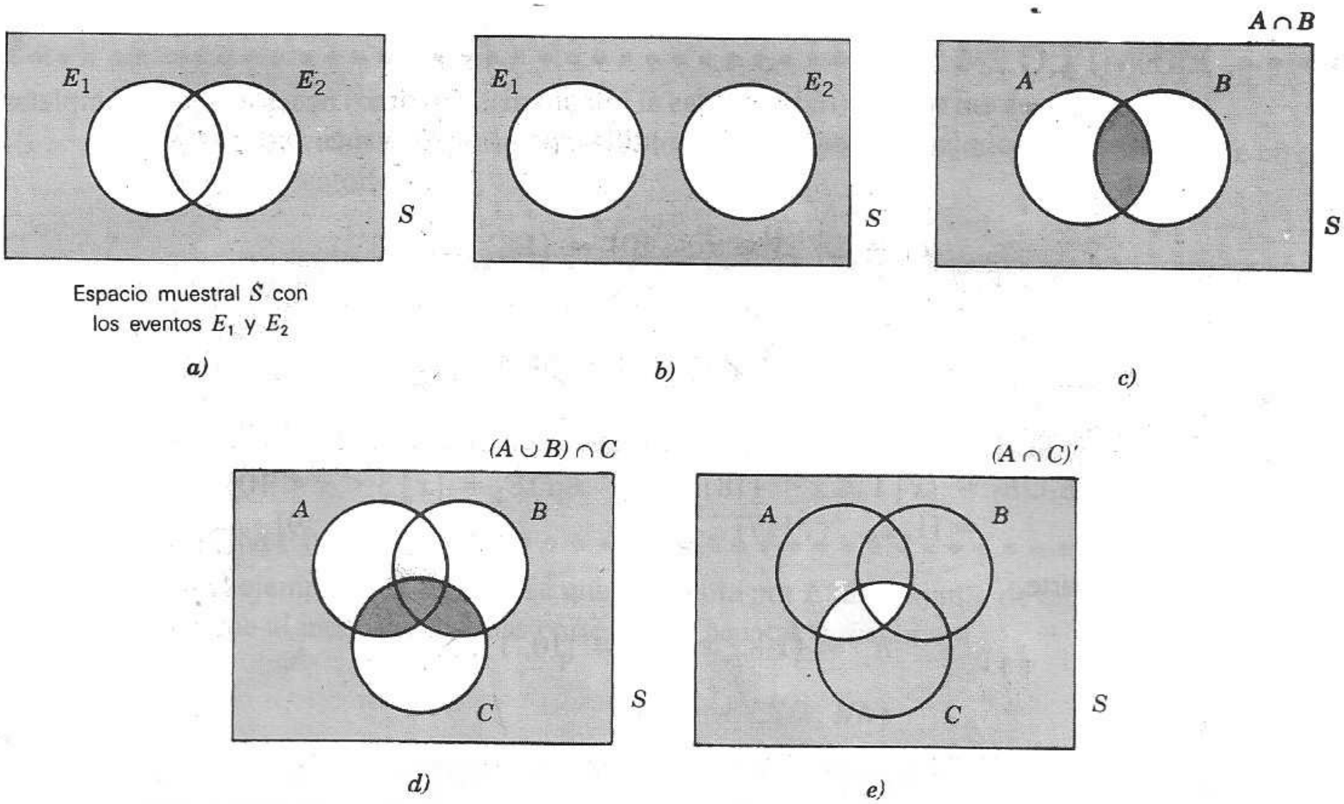
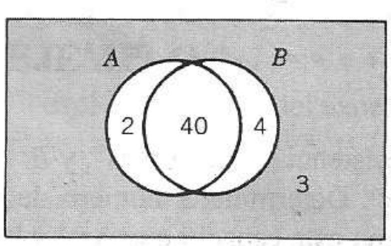


Figura 2-5 Diagramas de Venn.

golpes es baja. El evento $A \cup B$ está formado por las 46 muestras en las que la resistencia a las rayaduras o a los golpes (o a ambos) es alta.

La figura 2-6 ilustra la representación con diagramas de Venn de este espacio muestral y los dos eventos A y B. Los números que aparecen en la figura indican el número de resultados en cada región del diagrama.

Los espacios muestrales pueden describirse gráficamente en términos de un **diagrama de árbol**. Cuando un espacio muestral puede construirse en varios pasos o etapas, entonces cada una de las n_1 maneras de completar el primer paso puede representarse como una rama



A = resistencia alta a los golpes
B = resistencia alta a las rayaduras

Figura 2-6 Diagrama de Venn del ejemplo 2-9.

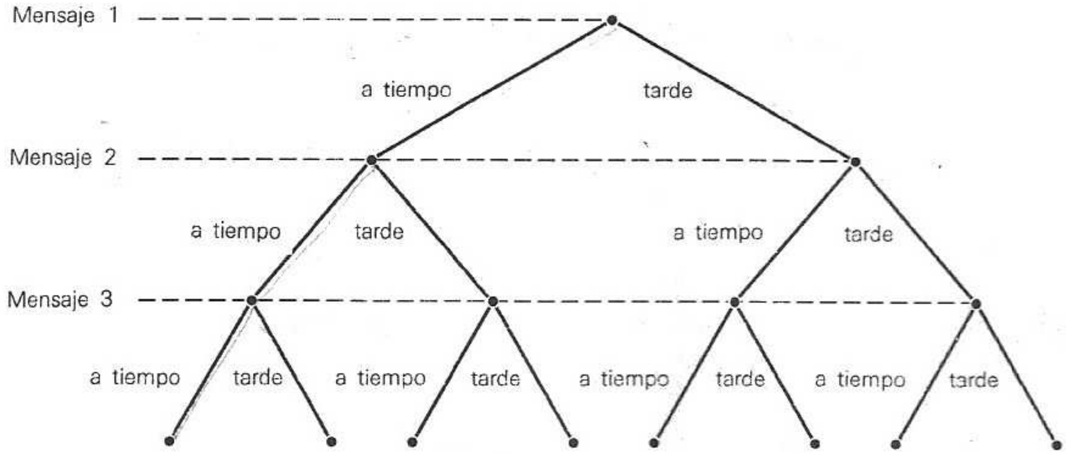


Figura 2-7 Diagrama de árbol del ejemplo 2-10.

del árbol. Cada una de las maneras de completar el segundo paso puede representarse con n_2 ramas que comienzan donde terminan las ramas originales, y así sucesivamente.

EJEMPLO 2-10

En un sistema de comunicación digital, cada mensaje se clasifica según llega o no dentro del tiempo establecido por el diseño del sistema. Si se clasifican tres mensajes, utilice un diagrama de árbol para representar el espacio muestral de los posibles resultados.

De acuerdo con la clasificación, cada mensaje puede recibirse a tiempo o tarde. La figura 2-7 presenta el diagrama de árbol con ocho ramas para todos los resultados posibles de tres mensajes.

EJEMPLO 2-11

El fabricante de un automóvil proporciona vehículos equipados con distintas opciones que el cliente selecciona. Cada vehículo se solicita

Con o sin trasmisión automática

Con o sin aire acondicionado

Con una de tres opciones posibles en cuanto a un sistema de sonido estéreo

En uno de cuatro colores exteriores

Si el espacio muestral está formado por el conjunto de todos los tipos posibles de vehículos, ¿cuál es el número de resultados en el espacio muestral?

El espacio muestral contiene 48 resultados. La figura 2-8 presenta el diagrama de árbol para los diferentes tipos de vehículos.

EJEMPLO 2-12

Supóngase que el fabricante de vehículos del ejemplo anterior ofrece una opción más: el color de los interiores. Existen cuatro posibilidades: rojo, negro, azul o café. Sin embargo,

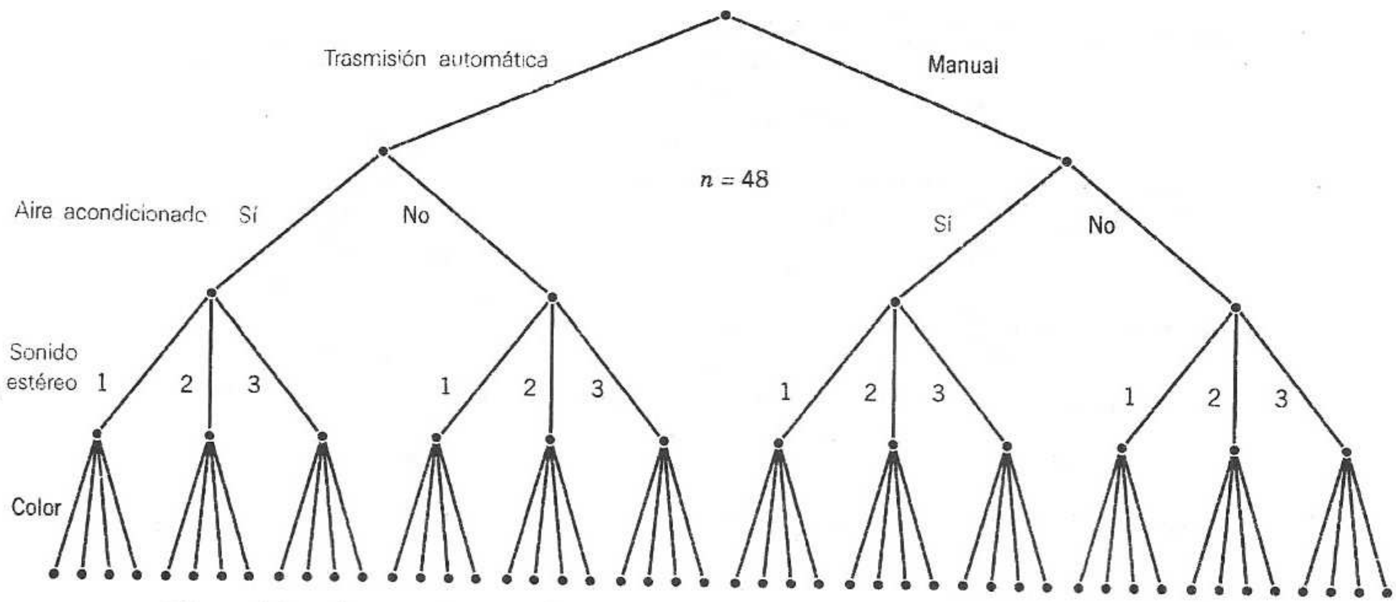


Figura 2-8 Diagrama de árbol del ejemplo 2-11.

Con exteriores rojos, sólo es posible elegir un interior negro o rojo.

Con exteriores blancos, puede seleccionarse cualquier color interior.

Con exteriores azules, sólo se puede escoger un interior negro, rojo o azul.

Con exteriores café, sólo puede elegirse un interior café.

En este ejemplo, el número de maneras en que puede completarse la etapa de selección del color interior depende de la elección del color exterior. Tal como se indica en la figura 2-9, el diagrama de árbol puede extenderse para demostrar que existen 120 tipos diferentes de vehículos en el espacio muestral.

Dos eventos que no tienen resultados en común tienen una relación importante.

Definición

Dos eventos, E_1 y E_2, tales que $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, se dice que son **mutuamente excluyentes.**

En el ejemplo 2-6, los eventos E_1 y E_2 no son mutuamente excluyentes. Sin embargo, los eventos $E_1 = \{AA, AN, NA\}$ y $E_3 = \{NN\}$ son mutuamente excluyentes. Un evento E y su complemento, E', siempre son mutuamente excluyentes. Los dos eventos de la figura 2-3b son mutuamente excluyentes.

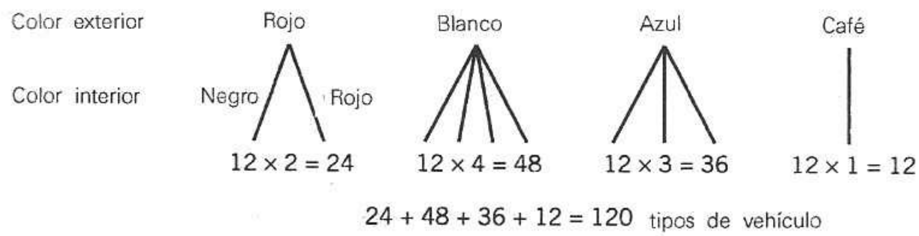


Figura 2-9 Diagrama de árbol del ejemplo 2-12.

A continuación se presenta un resumen de resultados útiles relacionados con eventos. La definición del complemento de un evento implica que

$$(E')' = E$$

La propiedad distributiva para operaciones entre conjuntos implica que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

y

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

De las leyes de DeMorgan se desprende que

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{y} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Asimismo, recuérdese que

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{y} \quad A \cup B = B \cup A$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2-1

Proporcione una descripción razonable del espacio muestral de cada uno de los experimentos aleatorios de los ejercicios 2-1 a 2-15. Para cada experimento puede haber más de una interpretación aceptable. Describa todas las hipótesis que plantee.

2-1. Se clasifica cada una de tres partes maquinadas ya sea por encima o por debajo de la especificación establecida para cada una de ellas.

2-2. Se trasmiten cuatro bits y cada uno se clasifica como erróneo o no erróneo.

2-3. En la inspección final de fuentes de alimentación electrónicas, pueden presentarse tres tipos de problemas: funcionales, menores y estéticos. Las fuentes defectuosas se clasifican adicionalmente con uno de estos tipos de problemas.

2-4. En la fabricación de una cinta de grabación digital, se utiliza una prueba electrónica para grabar el número de bits erróneos en un rollo de 350 pies.

2-5. En la fabricación de una cinta de grabación digital, cada una de las 24 pistas se clasifica de acuerdo con el número de bits erróneos que contiene: ningún bit, o uno o más bits erróneos.

2-6. Se utiliza un amperímetro con tres dígitos para medir corriente en miliamperes.

2-7. Se utiliza una escala con dos decimales para medir, en toneladas, la cantidad de material que ingresa en una planta química.

2-8. El siguiente par de preguntas aparece en una encuesta para empleados. La respuesta a cada una de ellas se elige de una escala que ofrece cinco posibilidades: 1 (nunca), 2, 3, 4, 5 (siempre).

"¿La compañía está dispuesta a escuchar y evaluar nuevas ideas?"

"¿Con cuánta frecuencia mis colaboradores afectan mi rendimiento global en el trabajo?"

2-9. Los poros de una varilla de fierro se clasifican como pequeños, medianos o grandes. El número de poros de cada categoría se mide mediante la inspección visual de la muestra.

2-10. Un proceso de manufactura puede producir algunas partes que son inaceptables. Se toma una muestra de tres partes y cada una de ellas se clasifica como aceptable o no aceptable.

2-11. La orden de pedido de un automóvil puede especificar trasmisión automática o estándar, con o sin aire acondicionado, y uno de cuatro colores: rojo, azul, negro o blanco. Describa el conjunto de todos los pedidos posibles para este experimento.

2-12. Se toma una muestra de una parte que se fabrica en una máquina de moldeo por inyección. La parte puede producirse en una de dos máquinas, y cada una de éstas tiene ocho cavidades.

2-13. La orden de compra de un sistema de cómputo puede especificar memoria de 4, 8 o 12 megabytes, y una capacidad en disco duro de 200, 300 o 400 megabytes. Describa el conjunto de todas las posibles órdenes de compra.

2-14. Una y otra vez, se hace una llamada telefónica a una línea ocupada, hasta que se logra la comunicación.

2-15. En un dispositivo de almacenamiento magnético, se hacen tres intentos para leer datos antes de invocar el procedimiento de recuperación de error, el cual se encarga de volver a posicionar la cabeza de lectura/escritura. El procedimiento de recuperación de error intenta posicionar la cabeza tres veces antes de enviar un mensaje de "operación abortada" al operador. Se definen los siguientes eventos

s: éxito en la operación de lectura

f: falla en la operación de lectura

F: falla en el procedimiento de recuperación de error

S: éxito en el procedimiento de recuperación de error

A: mensaje de operación abortada enviado al operador

Describa el espacio muestral de este experimento.

2-16. El diagrama de Venn de la figura 2-10 contiene tres eventos. Reproduzca la figura y sombree la región que corresponde a cada uno de los siguientes eventos.

a. A'

b. $A \cap B$

c. $(A \cap B) \cup C$

d. $(B \cup C)'$

e. $(A \cap B)' \cup C$

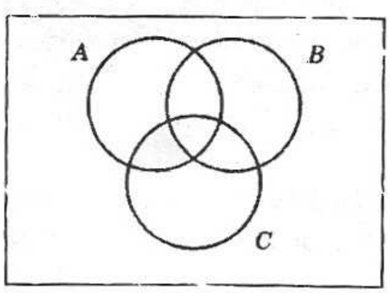


Figura 2-10 Diagrama de Venn del ejercicio 2-16.

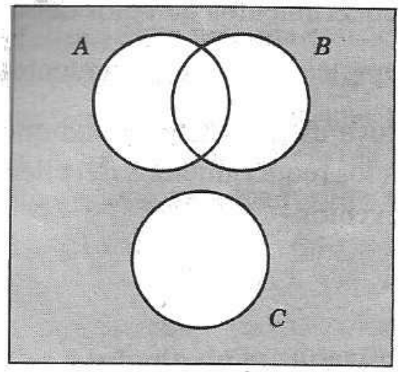


Figura 2-11 Diagrama de Venn del ejercicio 2-17.

2-17. El diagrama de Venn de la figura 2-11 contiene tres eventos. Reproduzca la figura y sombree la región que corresponde a cada uno de los eventos siguientes.

- **a.** A'
- **b.** $(A \cap B) \cup (A \cap B')$
- **c.** $(A \cap B) \cup C$
- **d.** $(B \cup C)'$
- **e.** $(A \cap B)' \cup C$

2-18. Se utiliza una escala digital que redondea el peso hasta el gramo más cercano:

- **a.** ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

Sea A: el evento en que el peso es mayor que 11 gramos

B: el evento en que el peso es menor o igual que 15 gramos

C: el evento en que el peso es mayor o igual que ocho gramos y menor que 12 gramos.

Dibuje un diagrama de Venn de los siguientes eventos.

- **b.** $A \cup B$
- **c.** $A \cap B$
- **d.** A'
- **e.** $A \cup B \cup C$
- **f.** $(A \cup C)'$
- **g.** $A \cap B \cap C$
- **h.** $B' \cap C$
- **i.** $A \cup (B \cap C)$

2-19. En una operación de moldeo por inyección se evalúan varias características de cada parte moldeada.

Sean A: el evento donde una parte cumple con los requerimientos de ajuste del cliente

B: el evento donde una parte satisface los requerimientos de color del cliente

C: el evento donde cierta longitud crítica cumple con los requerimientos del cliente

a. Construya un diagrama de Venn que incluya estos eventos, e indique en él la región en la que una parte cumple con todos los requerimientos del cliente. Sombree las áreas que representan los siguientes eventos

b. $B \cap C$

c. $A' \cup B$

d. $A \cup B$

e. Si dos de estos eventos fuesen mutuamente excluyentes, ¿cuán existosa sería esta operación de manufactura?

2-20. Se trasmiten cuatro bits sobre un canal de comunicación digital. Cada bit se recibe con o sin distorsión.

a. Describa el espacio muestral de este experimento.

b. Sea A_i: el evento donde el i-ésimo bit está distorsionado, $i = 1, \ldots, 4$. ¿Los A_i' son mutuamente excluyentes?

c. Describa los resultados de cada uno de los siguientes eventos:

A_1
A_1'
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$
$(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$

2-21. Se selecciona una muestra de tres calculadoras de una línea de fabricación y se clasifica cada calculadora como defectuosa o aceptable. Sean A, B y C: eventos en los que, respectivamente, la primera, segunda y tercera calculadora es defectuosa.

a. Describa el espacio muestral de este experimento.

Describa cada uno de los siguientes eventos.

b. A

c. B

d. $A \cap B$

e. $B \cup C$

2-22. Se analizan los discos de policarbonato plástico de un proveedor para determinar su resistencia a las rayaduras y a los golpes. A continuación se resumen los resultados obtenidos al analizar 100 muestras.

		resistencia a los golpes		
		alta	baja	
resistencia a las rayaduras	alta	80	9	B
	baja	6	5	
		A		

Sean A: el evento donde el disco tiene una alta resistencia a los golpes, y B: el evento donde el disco tiene una alta resistencia a las rayaduras. Determine el número de discos en $A \cap B$, A' y $A \cup B$. Dibuje un diagrama de Venn que represente estos datos.

2-23. Se toman muestras de una pieza fundida de aluminio y se clasifican de acuerdo con el acabado de la superficie (en micropulgadas) y con las mediciones de longitud. A continuación se resumen los resultados obtenidos con 100 muestras.

		longitud	
		excelente	bueno
acabado de la superficie	excelente	75	7
	bueno	10	8

A

B

Sean A: el evento donde la muestra tiene un acabado excelente, y B: el evento donde la muestra tiene una longitud excelente. Determine el número de muestras en $A' \cap B$, B', y $A \cup B$. Dibuje un diagrama de Venn que represente estos datos.

2-24. Se toman muestras de la espuma proporcionada por dos proveedores y se clasifican de acuerdo con la forma en que se adecúan a las especificaciones. A continuación se resumen los resultados obtenidos con 40 muestras.

		cumple con las especificaciones	
		sí	no
proveedor	1	18	2
	2	17	3

Sean A: el evento donde la muestra es del proveedor 1, y B: el evento donde la muestra cumple con las especificaciones. Determine el número de muestras en $A' \cap B$, B', y $A \cup B$. Dibuje un diagrama de Venn que represente estos datos.

2-25. **Continuación del ejercicio 2-15.** Utilice un diagrama de árbol para visualizar el espacio muestral.

2-26. **Continuación del ejercicio 2-20.** Utilice un diagrama de árbol para visualizar el espacio muestral.

2-27. **Continuación del ejercicio 2-21.** Utilice un diagrama de árbol para visualizar el espacio muestral.

2-28. **Continuación del ejercicio 2-23.** Suponga que cada una de las dos muestras se clasifica con base en el acabado de la superficie, ya sea excelente o buena, y en la longitud, ya sea excelente o buena. Utilice un diagrama de árbol para representar los resultados posibles de este experimento.

2-2 INTERPRETACIONES DE LA PROBABILIDAD

2-2.1 Introducción

Con frecuencia es útil cuantificar la posibilidad de que se presente un resultado de un experimento aleatorio. "La posibilidad de que llueva hoy es de 30%" es una afirmación que refleja una creencia sobre la posibilidad de que llueva. La posibilidad de un resultado se cuantifica asignándole un número del intervalo [0, 1], o un porcentaje del 0 al 100%. Entre más grande sea el número, mayor es la probabilidad del resultado. Un cero indica que el resultado no se presentará; un uno indica un resultado seguro.

La probabilidad de un resultado puede interpretarse como la probabilidad subjetiva, o **grado de creencia**, de que ocurra el resultado. Personas distintas no dudan en asignar probabilidades diferentes a los mismos resultados. Otra interpretación de la probabilidad se basa en el modelo conceptual de la repetición del experimento aleatorio. La probabilidad del resultado se interpreta como el valor límite de la proporción de veces que el resultado aparece en n repeticiones del experimento aleatorio, a medida que n crece sin cota alguna. Por ejemplo, si se asigna una probabilidad de 0.25 al resultado "existe una molécula rara en una muestra de aire", esto puede interpretarse como una implicación de que, si se analizan muchas muestras de aire, aproximadamente el 25% de ellas contendrán la molécula rara. Este ejemplo proporciona una interpretación de **frecuencia relativa** para la probabilidad. La proporción, o frecuencia relativa, de las repeticiones del experimento que dan como resultado una molécula rara, es 0.25. Las probabilidades se eligen de modo que la suma de las probabilidades de todos los resultados de un experimento sea uno. Esta convención facilita la interpretación de frecuencia relativa para la probabilidad. La figura 2-12 ilustra el concepto de frecuencia relativa.

Las probabilidades de un experimento aleatorio a menudo se asignan sobre la base de un modelo razonable del sistema que se estudia. Un enfoque es asignar las probabilidades con base en el concepto de resultados igualmente probables. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2-13

Se escoge un diodo láser, *al azar*, de un lote de 100. El espacio muestral es el conjunto formado por los 100 diodos. La frase "al azar" implica que es razonable suponer que cada diodo del lote tiene la misma posibilidad de ser seleccionado. Dado que la suma de la probabilidad tiene que ser uno, el modelo de probabilidad de este experimento asigna a cada uno de los 100 resultados posibles una probabilidad de 0.01. Esta probabilidad puede interpretarse al imaginar muchas repeticiones del experimento. Cada vez el experimento inicia con los 100 diodos y se escoge uno al azar. La probabilidad 0.01 asignada a un diodo en particular representa la proporción de repeticiones en las que se toma dicho diodo.

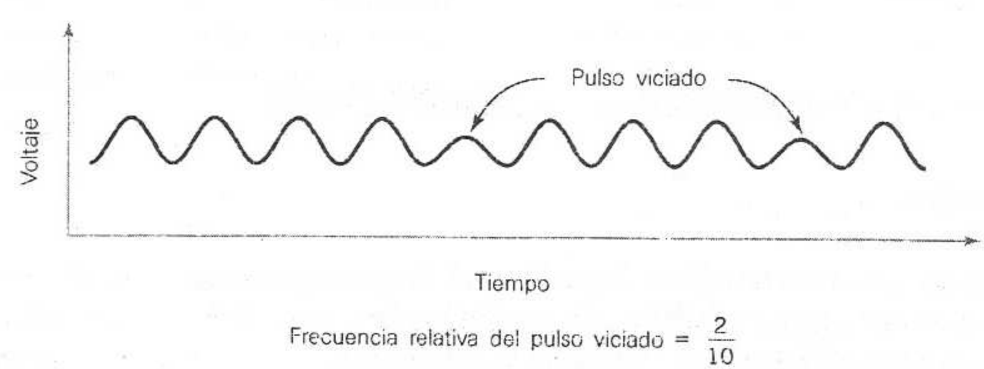
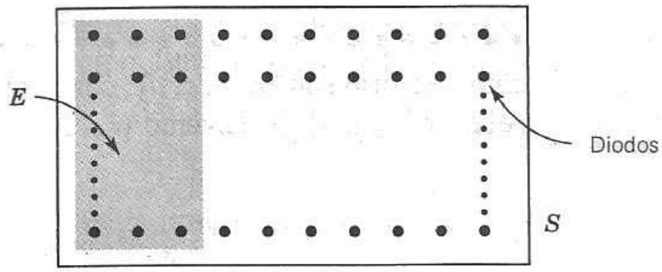


Figura 2-12 Frecuencia relativa de pulsos viciados enviados por un canal de comunicación.



$P(E) = 30(0.01) = 0.30$

Figura 2-13 La probabilidad del evento E es la suma de las probabilidades de los resultados de E.

En general, el siguiente resultado es útil.

> Cada vez que un espacio muestral esté formado por N posibles resultados igualmente probables, la probabilidad de cada uno de ellos será $1/N$.

A menudo es necesario asignar probabilidades a eventos que están compuestos de varios resultados del mismo espacio muestral.

EJEMPLO 2-14

Suponga que el 30% de los diodos láser del lote de 100 cumple con los requerimientos mínimos de potencia de un cliente específico. Si se toma un diodo láser al azar, donde cada uno tiene la misma oportunidad de ser seleccionado, la intuición indica que la probabilidad de que el diodo cumpla con los requerimientos del cliente es 0.30.

Sea E: el evento "el diodo seleccionado cumple con los requerimientos del cliente". Entonces E es el subconjunto de 30 diodos que satisfacen los requerimientos del cliente. Dado que E contiene 30 resultados y cada uno de éstos tiene una probabilidad de 0.01, entonces puede concluirse que la probabilidad de E es 0.3. La conclusión coincide con lo que se intuyó. La figura 2-13 ilustra este ejemplo.

Para un espacio muestral discreto, la probabilidad de un evento puede definirse con el razonamiento utilizado en el ejemplo anterior. La siguiente definición proporciona un método sencillo para obtener probabilidades de eventos en espacios muestrales discretos.

> **Definición**
>
> Para un espacio muestral discreto, la *probabilidad de un evento E*, denotada como $P(E)$, es igual a la suma de las probabilidades de los resultados en E.

EJEMPLO 2-15

Los resultados posibles de un experimento aleatorio son $\{a, b, c, d\}$, con probabilidad 0.1, 0.3, 0.5 y 0.1, respectivamente. Sean A: el evento $\{a, b\}$, B el evento $\{b, c, d\}$, y C: el evento $\{d\}$.

Entonces,

$$P(A) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$
$$P(B) = 0.3 + 0.5 + 0.1 = 0.9$$
$$P(C) = 0.1$$

Asimismo, $P(A') = 0.6$, $P(B') = 0.1$ y $P(C') = 0.9$. Por otra parte, dado que $A \cap B = \{b\}$, $P(A \cap B) = 0.3$. Ya que $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $P(A \cup B) = 0.1 + 0.3 + 0.5 + 0.1 = 1$. Como $A \cap C$ es el conjunto vacío, $P(A \cap C) = 0$.

EJEMPLO 2-16

La inspección visual de las obleas de un proceso de fabricación de semiconductores, arrojó los resultados de la tabla siguiente.

Número de partículas contaminantes	Proporción de obleas
0	0.40
1	0.20
2	0.15
3	0.10
4	0.05
5 o más	0.10

Si se elige al azar una oblea de este proceso y se hace una inspección de ella, ¿cuál es la probabilidad de que la oblea no contenga partículas?

La probabilidad pedida depende sólo del número de partículas contaminantes en la oblea. Por consiguiente, puede considerarse que el espacio muestral está formado por las seis categorías que resumen el número de partículas contaminantes en la oblea. Por tanto, el evento en que no hay una partícula en el sitio inspeccionado sobre la oblea, denotado por E, puede considerarse como formado por un solo resultado: $E = \{0\}$. En consecuencia,

$$P(E) = 0.4$$

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea contenga tres o más partículas en el sitio de inspección?

Sea E: el evento en el que la oblea contiene tres o más partículas en el sitio de la inspección. Entonces, E está formado por los resultados {3, 4, 5 o más}. Por consiguiente,

$$P(E) = 0.10 + 0.05 + 0.10 = 0.25$$

¿Cuál es la probabilidad de que la oblea contenga 0 o más de tres partículas en el sitio inspeccionado?

Sea E: el evento donde la oblea contiene 0 o más de tres partículas en el sitio inspeccionado. Entonces, E está formado por los resultados {0, 4, 5 o más}. Por tanto,

$$P(E) = 0.40 + 0.05 + 0.10 = 0.55$$

EJEMPLO 2-17

Un fabricante necesita que los diseños de un nuevo producto sean evaluados por clientes en potencia, con la finalidad de tener los comentarios de éstos en etapas muy tempranas del ciclo de diseño. Con base en datos históricos, si dos clientes evalúan el producto y deciden, de manera independiente, que les gusta, entonces el espacio muestral y las probabilidades pueden modelarse de la siguiente forma.

Cliente 1	**Cliente 2**	**Probabilidad**
(aprobado,	aprobado)	0.04
(aprobado,	modificar)	0.16
(modificar,	aprobado)	0.16
(modificar,	modificar)	0.64

Sea E: el evento en que ambos clientes aprueban el diseño. Este evento está formado por un solo resultado (aprobado, aprobado), y $P(E) = 0.04$.

Sea G: el evento en que al menos un cliente aprueba el diseño. Entonces G está formado por los siguientes resultados: (aprobado, modificar), (modificar, aprobado) y (aprobado, aprobado). Por tanto,

$$P(G) = 0.16 + 0.16 + 0.04 = 0.36$$

Sea H: el evento donde el segundo cliente aprueba el diseño. Este evento está formado por dos resultados: (aprobado, aprobado) y (modificar, aprobado). La probabilidad de H es la suma de las probabilidades de los resultados de H; esto es,

$$P(H) = 0.04 + 0.16 = 0.20$$

2-2.2 Axiomas de probabilidad

Ahora que se ha definido la probabilidad de un evento, es posible reunir las hipótesis realizadas hasta el momento con respecto a las probabilidades en un conjunto de axiomas que deben satisfacer las probabilidades de cualquier experimento aleatorio. Los axiomas aseguran que las probabilidades asignadas en un experimento pueden interpretarse como frecuencias relativas, y que son consistentes con el conocimiento intuitivo de las relaciones entre frecuencias relativas. Por ejemplo, si el evento A está contenido en el evento B, entonces debe tenerse que $P(A) \leq P(B)$. Los *axiomas no determinan las probabilidades*; éstas se asignan con base en el conocimiento que se tiene del sistema estudiado. Sin embargo, los axiomas facilitan el cálculo de las probabilidades de algunos eventos a partir del conocimiento de las probabilidades de otros.

Axiomas de probabilidad

La probabilidad es un número que se asigna a cada miembro de una colección de eventos de un experimento aleatorio y que satisface las siguientes propiedades.

Si S es el espacio muestral y E es cualquier evento del experimento aleatorio,

(1) $P(S) = 1$

(2) $0 \leq P(E) \leq 1$

(3) Para dos eventos E_1 y E_2 con $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Los axiomas y sus consecuencias restringen las asignaciones de probabilidades de una manera que permite interpretar éstas como frecuencias relativas sin inconsistencias. La propiedad $0 \leq P(E) \leq 1$ equivale al requisito de que la frecuencia relativa debe ser un número entre cero y uno. La propiedad $P(S) = 1$ es una consecuencia del hecho de que un resultado del espacio muestral ocurre en cada prueba de un experimento. En consecuencia, la frecuencia relativa de S es uno. La propiedad (3) implica que si los eventos E_1 y E_2 no tienen resultados en común, entonces la frecuencia relativa de los resultados en $E_1 \cup E_2$ es la suma de las frecuencias relativas de los resultados en E_1 y E_2.

Los axiomas anteriores implican los siguientes resultados. Las deducciones se dejan como ejercicios al término de esta sección. Ahora,

$$P(\varnothing) = 0$$

y para cualquier evento E,

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Si la frecuencia relativa del evento E es 0.4, la interpretación de la frecuencia relativa implica que la frecuencia relativa de E' es 0.6. Por otra parte, si el evento E_1 está contenido en el evento E_2, entonces

$$P(E_1) \leq P(E_2)$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2-2

2-29. Cada uno de los cinco posibles resultados de un experimento aleatorio es igualmente probable. El espacio muestral es $\{a, b, c, d, e\}$. Sean A: el evento $\{a, b\}$, y B: el evento $\{c, d, e\}$. Determine lo s[illegible]

- **a.** $P(A)$
- **b.** $P(B)$
- **c.** $P(A')$
- **d.** $P(A \cup B)$
- **e.** $P(A \cap B)$

2-30. El espacio muestral de un experimento aleatorio es $\{a, b, c, d, e\}$ con probabilidades 0.1, 0.1, 0.2, 0.4 y 0.2, respectivamente. Sean A: el evento $\{a, b\}$, y B: el evento $\{c, d, e\}$. Determine lo siguiente.

- **a.** $P(A)$
- **b.** $P(B)$
- **c.** $P(A')$
- **d.** $P(A \cup B)$
- **e.** $P(A \cap B)$

2-31. Al seleccionar una parte para probarla, la posibilidad de que ésta haya sido producida por una de entre seis herramientas de corte es la misma.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que la parte provenga de la herramienta 1?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que la parte provenga de las herramientas 3 o 5?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de que la parte no provenga de la herramienta 4?

2-32. Al seleccionar una parte moldeada por inyección, la posibilidad de que ésta provenga de una de las ocho cavidades del molde es la misma.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que la parte provenga de la cavidad 1 o 2?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que la parte no provenga de la cavidad 3 ni 4?

2-33. Un espacio muestral contiene 20 eventos igualmente probables. Si la probabilidad del evento A es 0.3, ¿cuántos resultados contiene el evento A?

2-34. A continuación se ofrece un resumen de varias órdenes de compra de dispositivos de alumbrado, de acuerdo con las características opcionales solicitadas para éstos.

	proporción de órdenes de compra
sin características opcionales	0.3
una característica opcional	0.5
más de una característica opcional	0.2

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una orden se solicite al menos una característica opcional?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que en una orden no se pida más de una característica opcional?

2-35. El último dígito de una medición de peso puede ser cualquier número de 0 a 9, todos ellos con la misma probabilidad.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito sea cero? 1/10

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito sea mayor o igual que cinco? 5/10

2-36. El 25% de los técnicos de un laboratorio completan correctamente la preparación de una muestra para una medición química, el 70% la termina con errores pequeños, y el 5% restante, con errores grandes.

a. Si se elige un técnico al azar para completar la preparación, ¿cuál es la probabilidad de terminarla sin error?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra sea terminada con errores pequeños o grandes?

2-37. **Continuación del ejercicio 2-22.** Determine las siguientes probabilidades.

a. $P(A)$ = 0,86

b. $P(B)$ = 0,80

c. $P(A')$ = 0,14

2-38. **Continuación del ejercicio 2-22.** Determine las siguientes probabilidades.

a. $P(A \cap B)$ = 0,86

b. $P(A \cup B)$ = 0,8

c. $P(A' \cup B)$ =

2-39. **Continuación del ejercicio 2-23.** Determine las siguientes probabilidades.

a. $P(A)$ =

b. $P(B)$ =

c. $P(A')$ =

2-40. **Continuación del ejercicio 2-23.** Determine las siguientes probabilidades.

a. $P(A \cap B)$

b. $P(A \cup B)$

c. $P(A' \cup B)$

2-41. **Continuación del ejercicio 2-24.** Determine las siguientes probabilidades.

a. $P(A)$

b. $P(B)$

c. $P(A')$

2-42. **Continuación del ejercicio 2-24.** Determine las siguientes probabilidades.

a. $P(A \cap B)$

b. $P(A \cup B)$

c. $P(A' \cup B)$

2-43. Utilice los axiomas de probabilidad para demostrar lo siguiente:

a. Para cualquier evento E, $P(E') = 1 - P(E)$

b. $P(\varnothing) = 0$

c. Si A está contenido en B, entonces $P(A) \leq P(B)$

2-3 REGLAS DE ADICIÓN

Los eventos compuestos se generan al aplicar las operaciones básicas de los conjuntos a los eventos individuales. Las uniones de eventos (como $A \cup B$), las intersecciones de eventos (como $A \cap B$) y los complementos de eventos (como A') son de interés frecuente. La probabilidad de un evento compuesto a menudo puede obtenerse a partir de las probabilidades de cada uno de los eventos que lo forman. En ocasiones, las operaciones básicas de los conjuntos también son útiles para determinar la probabilidad de un evento compuesto.

EJEMPLO 2-18

La tabla 2-1 presenta la historia de 940 obleas de un proceso de fabricación de semiconductores. Supóngase que se elige al azar una oblea de la tabla 2-1. Sea A: el evento en que la oblea tiene altos niveles de contaminación. Entonces,

$$P(A) = 358/940$$

Sea B: el evento en que la oblea está en el centro de un instrumento de deposición electrónica. Entonces,

$$P(B) = 314/940$$

Por otra parte, $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que la oblea esté en el centro del instrumento de deposición electrónica y al mismo tiempo contenga un alto nivel de contaminación. De la tabla 2-1,

$$P(A \cap B) = 246/940$$

El evento $A \cup B$ es aquel donde la oblea está en el centro del instrumento de deposición electrónica o contiene un alto nivel de contaminación (o ambos). De la tabla, $P(A \cup B) = 426/940$. Otra manera de calcular $P(A \cup B)$ es la siguiente. Las 246 obleas que comprenden

Tabla 2-1 Obleas en un proceso de fabricación

		En el centro del instrumento de deposición electrónica	
		no	sí
Contaminación	no	514	68
alta	sí	112	246

el evento $A \cap B$ están incluidas una vez en el cálculo de $P(A)$, y una vez más en el de $P(B)$. Por tanto, $P(A \cup B)$ puede obtenerse como:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 358/940 + 314/940 - 246/940 \\ &= 426/940 \end{aligned}$$

Sea E: el evento donde la oblea no está en el centro del instrumento de deposición electrónica y tampoco contiene altos niveles de contaminación. De la tabla 2-1,

$$P(E) = 514/940$$

Para ilustrar algunas operaciones entre conjuntos, puede emplearse como alternativa otro cálculo para determinar $P(E)$. Se tiene que

$$E = (A \cup B)'$$

Por tanto,

$$P(E) = 1 - P(A \cup B) = 514/940$$

El ejemplo anterior determina el siguiente resultado general.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (2\text{-}1)$$

EJEMPLO 2-19

El ejemplo 2-18 también puede analizarse con ayuda del diagrama de Venn de la figura 2-14. El rectángulo representa el espacio muestral de 940 obleas. Los eventos A y B se intersectan en un subconjunto del espacio muestral. El número de obleas de la intersección es 246. Ya que el número total de obleas de A es 358, el número de obleas de A que no están en B es 112 y el número de obleas de B que no están en A es 68. El número de obleas del espacio muestral que no están ni en A ni en B (ni en ambos) es 514.

En el diagrama de Venn de este ejemplo, $P(A \cup B)$ se halla fácilmente de la siguiente manera:

$$P(A \cup B) = (112 + 246 + 68)/940 = 426/940$$

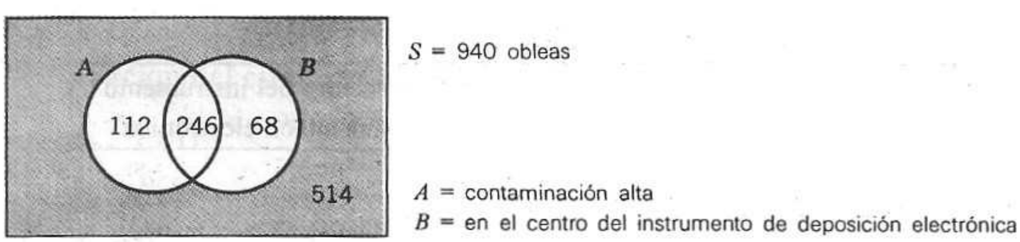


Figura 2-14 Diagrama de Venn del ejemplo 2-19.

Tabla 2-2 Clasificación de obleas por contaminación y posición.

Número de partículas contaminantes	Centradas	En la orilla	Totales
0	0.30	0.10	0.40
1	0.15	0.05	0.20
2	0.10	0.05	0.15
3	0.06	0.04	0.10
4	0.04	0.01	0.05
5 o más	0.07	0.03	0.10
Total	0.72	0.28	1.00

EJEMPLO 2-20

Las obleas como las descritas en el ejemplo 2-18 se clasifican además como “centradas” o “en la orilla” del instrumento de deposición electrónica que fue utilizada en el proceso de fabricación, y por grado de contaminación. La tabla 2-2 contiene la proporción de obleas de cada categoría. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una oblea de este lote, ésta haya estado en el centro del instrumento de deposición? Dado que 0.72 de las obleas estaban casi en el centro, la probabilidad es 0.72.

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea que contiene cuatro o más partículas se haya encontrado en la orilla del instrumento de deposición?

Sean E_1: el evento donde la oblea contiene cuatro o más partículas, y E_2: el evento donde la oblea se encontraba en la orilla. La probabilidad pedida es $P(E_1 \cap E_2)$. La proporción de obleas que contienen cuatro o más partículas y que estaban en la orilla es 0.01 + 0.03. Por tanto, la probabilidad pedida es 0.04.

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea se haya encontrado en la orilla de la herramienta o que contenga cuatro o más partículas?

Si se emplean las definiciones originales de la pregunta anterior, la probabilidad pedida es $P(E_1 \cup E_2)$. Entonces, $P(E_1) = 0.15$ y $P(E_2) = 0.28$. De la pregunta anterior, $P(E_1 \cap E_2) = 0.04$. Por tanto, utilizando la ecuación (2-1), se tiene que

$$P(E_1 \cup E_2) = 0.15 + 0.28 - 0.04 = 0.39$$

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea contenga menos de dos partículas o de que se haya encontrado en la orilla y contenga más de cuatro partículas? 0,6

Sean E_1: el evento donde la oblea contiene menos de dos partículas, y E_2: el evento donde la oblea se encontró en la orilla y tiene más de cuatro partículas. La probabilidad pedida es $P(E_1 \cup E_2)$. Entonces, $P(E_1) = 0.60$ y $P(E_2) = 0.03$. Además, E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes. En consecuencia, no existen obleas en la intersección y $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Por tanto,

$$P(E_1 \cup E_2) = 0.60 + 0.03 = 0.63$$

Debe recordarse que se dice que dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \varnothing$, con lo que $P(A \cap B) = 0$. Esto permite simplificar el resultado general para la probabilidad de $A \cup B$, con lo que se obtiene el tercer axioma de probabilidad.

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2-2}$$

Tres o más eventos

Pueden obtenerse probabilidades más complicadas, como $P(A \cup B \cup C)$, mediante el uso repetido de la ecuación 2-1 y con el empleo de algunas operaciones básicas entre conjuntos. Por ejemplo,

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$$

Después de desarrollar $P(A \cup B)$ de acuerdo con la ecuación 2-1 y de utilizar la propiedad distributiva para operaciones entre conjuntos con la finalidad de simplificar $P[(A \cup B) \cap C]$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Con esto se tiene una fórmula para calcular la probabilidad de la unión de tres eventos. Puede desarrollarse una fórmula para calcular la probabilidad de la unión de cualquier número de eventos, aunque las fórmulas se compliquen. Como resumen, para el caso de tres eventos

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{2-3}$$

Puede emplearse un diagrama de Venn para describir las relaciones que existen entre tres o más eventos. La construcción del diagrama puede ser algo tediosa, pero constituye una representación útil del espacio muestral para determinar la probabilidad de eventos compuestos.

En general, se dice que una colección de eventos, $E_1, E_2, \ldots, E_k$, es mutuamente excluyente si ninguno de ellos se traslapa con algún otro.

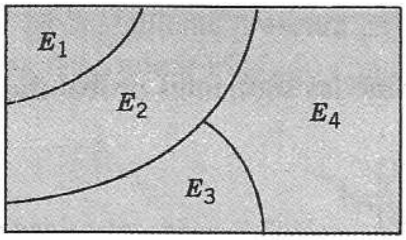


Figura 2-15 Diagrama de Venn para cuatro eventos mutuamente excluyentes.

Definición

Se dice que una colección de eventos, $E_1, E_2, \ldots, E_k$, es **mutuamente excluyente** si, para todos los pares,

$$E_i \cap E_j = \varnothing$$

La figura 2-15 presenta el diagrama de Venn para varios eventos mutuamente excluyentes. Si se generaliza el razonamiento empleado para la unión de dos eventos, entonces puede obtenerse el siguiente resultado.

Para una colección de eventos mutuamente excluyentes,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots P(E_k) \qquad (2\text{-}4)$$

EJEMPLO 2-21

En una operación de maquinado, sea x la longitud de una parte, y supóngase que para

el 10% de las partes, $x \leq 7.55$ milímetros

el 15% de las partes, $7.55 < x \leq 7.57$ milímetros

el 25% de las partes, $7.57 < x \leq 7.59$ milímetros

Si se escoge una parte de esta operación, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud sea menor o igual que 7.59 milímetros?

Sean E_1: el evento donde $x \leq 7.55$ milímetros, E_2: el evento donde $7.55 < x \leq 7.57$ milímetros, y E_3: el evento donde $7.57 < x \leq 7.59$ milímetros. Entonces, dado que estos eventos son mutuamente excluyentes,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 0.10 + 0.15 + 0.25 = 0.50$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2-3

2-44. Si $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ y $P(A \cap B) = 0.1$, determine las siguientes probabilidades.

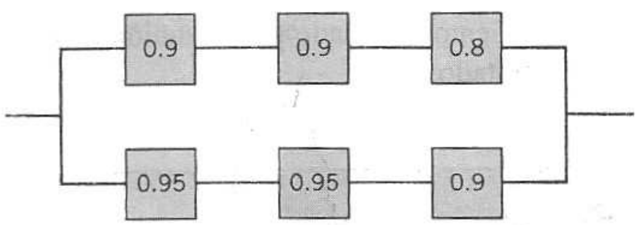
a. $P(A')$
b. $P(A \cup B)$
c. $P(A' \cap B)$
d. $P(A \cap B')$
e. $P[(A \cup B)']$
f. $P(A' \cup B)$

2-45. Si A, B y C son eventos mutuamente excluyentes, con $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$ y $P(C) = 0.4$, determine las siguientes probabilidades.

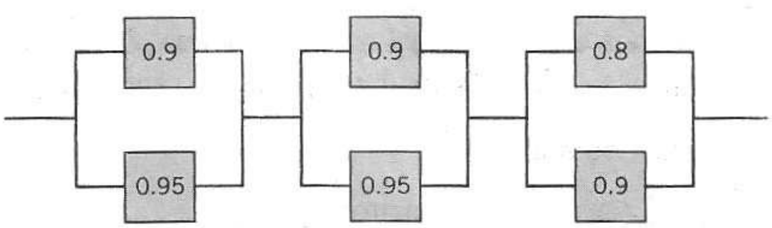
a. $P(A \cup B \cup C)$
b. $P(A \cap B \cap C)$
c. $P(A \cap B)$
d. $P[(A \cup B) \cap C]$

2-46. Si A, B y C son eventos mutuamente excluyentes, ¿es posible que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(C) = 0.5$? ¿Por qué?

2-47. El circuito siguiente trabaja si, y sólo si, existe una trayectoria en funcionamiento, de izquierda a derecha. El dibujo indica la probabilidad de que cada dispositivo funcione. Suponga que la probabilidad de que un dispositivo funcione no depende del funcionamiento de los demás dispositivos. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito funcione?



2-48. El siguiente circuito trabaja si, y sólo si, existe una trayectoria en funcionamiento, de izquierda a derecha. En el dibujo se indica la probabilidad de que cada dispositivo funcione. Suponga que la probabilidad de que un dispositivo trabaje no depende del funcionamiento de los demás dispositivos. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito funcione?



2-49. **Continuación del ejercicio 2-22.**

a. Si se escoge un disco al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su resistencia a las rayaduras sea alta al igual que su resistencia a los golpes?

b. Si se escoge un disco al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su resistencia a las rayaduras o a los golpes sea alta?

c. Considere el evento donde el disco tiene una alta resistencia a las rayaduras y el evento donde el disco tiene una alta resistencia a los golpes. ¿Estos eventos son mutuamente excluyentes?

2-50. La tabla siguiente presenta un resumen del análisis realizado a las flechas de un compresor para determinar el grado con que éstas satisfacen ciertos requerimientos.

		la curvatura cumple con los requerimientos	
		sí	no
el acabado superficial cumple con los requerimientos	sí	345	5
	no	12	8

a. Si se toma una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado superficial?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requisitos de acabado o con los de curvatura?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requisitos de acabado o que no cumpla con los de curvatura?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requisitos de acabado y curvatura? 0.93

2-51. **Continuación del ejercicio 2-50.** Las flechas se clasifican, además, en términos de la máquina herramienta utilizada en su fabricación.

Máquina herramienta 1

		la curvatura cumple con los requerimientos	
		sí	no
el acabado superficial cumple con los requerimientos	sí	200	1
	no	4	2

Máquina herramienta 2

		la curvatura cumple con los requerimientos	
		sí	no
el acabado superficial cumple con los requerimientos	sí	145	4
	no	8	6

a. Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado o con los de curvatura, o que provenga de la máquina herramienta 1? 0.98

b. Si se escoge una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado o que no cumpla con los de curvatura o que provenga de la máquina herramienta 2? 0.99

c. Si se elige una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requisitos de acabado y curvatura o que provenga de la máquina herramienta 2? 0.

. Si se toma una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requisitos de acabado o que provenga de la máquina herramienta 2? 0.98 -

2-4 PROBABILIDAD CONDICIONAL

2-4.1 Introducción

Los ejemplos siguientes ilustran la necesidad de volver a evaluar las probabilidades a medida que se tiene más información disponible.

EJEMPLO 2-22

Un canal de comunicación digital tiene una tasa de error de un bit por cada mil transmitidos. Los errores son raros, pero, cuando se presentan, tienden a ocurrir en rachas que pueden afectar muchos bits consecutivos. Si se transmite un bit, entonces la probabilidad de que sea erróneo es de 1/1000. Sin embargo, si el bit anterior es erróneo, como consecuencia de las rachas, puede pensarse que la probabilidad de que el siguiente bit sea erróneo es mayor que 1/1000.

EJEMPLO 2-23

En un proceso de fabricación de película delgada, la proporción de partes que no son aceptables es de 2%. Sin embargo, si el proceso es sensible a la contaminación, el problema puede aumentar la tasa de partes que no son aceptables. Si fuese posible saber que durante un embarque en particular se tuvieron problemas con los filtros utilizados para controlar la contaminación, entonces sería factible asignar una probabilidad de que la parte inaceptable sea mayor que 2%.

EJEMPLO 2-24

Dos moléculas raras tienden a encontrarse siempre juntas. La probabilidad de que una muestra de aire contenga alguna de las dos moléculas es pequeña. Sin embargo, como éstas tienden a aparecer juntas, el conocimiento de que una de ellas está presente aumenta de manera muy marcada la posibilidad de que la otra también esté presente en la muestra.

EJEMPLO 2-25

En un proceso de manufactura, el 10% de las partes contienen fallas visibles en la superficie, mientras que otro el 25% con fallas en la superficie son funcionalmente defectuosas. Sin embargo, sólo el 5% de las partes sin fallas en la superficie son partes funcionalmente defectuosas. La probabilidad de una parte funcionalmente defectuosa depende del conocimiento que se tenga sobre la presencia o ausencia de fallas en la superficie. Si una parte tiene una falla en la superficie, entonces la probabilidad de que sea defectuosa es 0.25. Si una parte no tiene fallas en la superficie, la probabilidad de que sea defectuosa es 0.05.

Prosiguiendo con el ejemplo 2-25, sean A: el evento donde una parte es funcionalmente defectuosa, y B: el evento donde una parte tiene una falla en la superficie. La probabilidad de A dado (o suponiendo) que la parte tiene una falla en la superficie se denota como

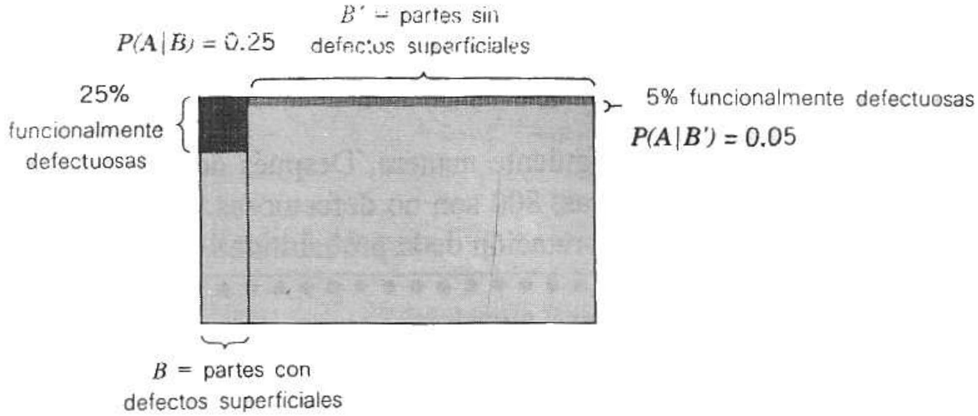


Figura 2-16 Probabilidades condicionales del ejemplo 2-25.

$P(A|B)$. Esta notación se lee como *la probabilidad condicional de A dado B*, y se interpreta como la probabilidad de que una parte sea funcionalmente defectuosa, dado que tiene una falla en la superficie. Ya que el 25% de las partes con fallas en la superficie son funcionalmente defectuosas, la conclusión que puede obtenerse de este hecho es que $P(A|B) = 0.25$. Por otra parte, debido a que B' denota el evento donde una parte no tiene fallas en la superficie y ya que el 5% de las partes sin defectos en la superficie son funcionalmente defectuosas, se tiene que $P(A|B') = 0.05$. Estos resultados aparecen de manera gráfica en la figura 2-16.

En algunos modelos, $P(A|B)$ puede calcularse directamente mediante la interpretación de la definición de probabilidad condicional.

EJEMPLO 2-26

La producción diaria de 850 partes contiene 50 que no satisfacen los requerimientos del cliente. Del lote se eligen *al azar* dos partes, sin remplazo. La frase "al azar" implica que al momento de tomar la primera parte, la posibilidad de escoger alguna es la misma para todas las del lote, y que lo mismo sigue siendo cierto al momento de seleccionar la segunda parte.

¿Cuál es la probabilidad de que la segunda parte sea defectuosa dado que la primera parte es defectuosa?

Sean B: el evento donde la segunda parte seleccionada es defectuosa, y A: el evento donde la primera parte es defectuosa. La probabilidad pedida puede expresarse como $P(B|A)$.

Si la primera parte es defectuosa, entonces antes de tomar la segunda, el lote contiene 849 partes, de las cuales 49 son defectuosas; por tanto,

$$P(B|A) = 49/849$$

EJEMPLO 2-27

Continuando con el ejemplo 2-26, si se escogen tres partes, ¿cuál es la probabilidad de que las dos primeras partes sean defectuosas y la tercera no lo sea? Este evento puede describirse con una notación abreviada tan simple como $P(DDN)$. Entonces,

$$P(DDN) = \frac{50}{850} \cdot \frac{49}{849} \cdot \frac{800}{848} = 0.0032$$

El tercer término se obtiene de la siguiente manera. Después de elegir las dos primeras partes, quedan 848 en el lote. De éstas, 800 son no defectuosas. En este ejemplo es fácil obtener la solución mediante la interpretación de la probabilidad condicional.

2-4.2 Definición de probabilidad condicional

Tal como lo ilustran los ejemplos anteriores, la estimación de la probabilidad de un evento a menudo queda actualizada como consecuencia de información adicional. Las probabilidades condicionales pueden hallarse a partir de la definición formal de probabilidad condicional.

Definición

La **probabilidad condicional** de un evento A dado un evento B, denotada por $P(A|B)$, es

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \tag{2-5}$$

Esta definición puede comprenderse al considerar el caso especial en que todos los resultados de un experimento aleatorio son igualmente probables. Si existe un total de n resultados, entonces

$$P(B) = (\text{número de resultados en } B)/n$$

Por otra parte,

$$P(A \cap B) = (\text{número de resultados en } A \cap B)/n$$

En consecuencia,

$$P(A \cap B)/P(B) = (\text{número de resultados en } A \cap B)/(\text{número de resultados en } B)$$

Por consiguiente, $P(A|B)$ puede interpretarse como la frecuencia relativa del evento A con respecto al número de ensayos que producen un resultado en el evento B.

EJEMPLO 2-28

Los resultados obtenidos de 266 muestras de aire se clasifican de acuerdo con la presencia de dos moléculas raras. Sean A: el evento formado por todas las muestras en las que se encuentra presente la molécula rara 1, y B: el evento formado por todas las muestras de aire donde está presente la molécula 2. Al utilizar los resultados que aparecen en la tabla 2-3, se tiene que

Tabla 2-3 Moléculas de las muestras de aire

		Molécula 1 presente	
		no	sí
	no	212	24
Molécula 2 presente	sí	18	12

$$
\begin{aligned}
&P(\text{molécula 2 presente} \mid \text{molécula 1 presente}) \\
&= P(B|A) \\
&= P(A \cap B)/P(A) \\
&= \frac{12}{266} \div \frac{36}{266}
\end{aligned}
$$

Nótese que, en este ejemplo, las cuatro siguientes probabilidades son diferentes:

$$P(A) = 36/266, \qquad P(A|B) = 12/30$$

$$P(B) = 30/266, \qquad P(B|A) = 12/36$$

En este caso, $P(A)$ y $P(A|B)$ son las probabilidades del mismo evento, pero calculadas bajo dos diferentes estados de conocimiento. De manera similar, $P(B)$ y $P(B|A)$ son las probabilidades del mismo evento, pero calculadas bajo dos estados diferentes de conocimiento.

El diagrama de árbol de la figura 2-17 presenta resultados similares.

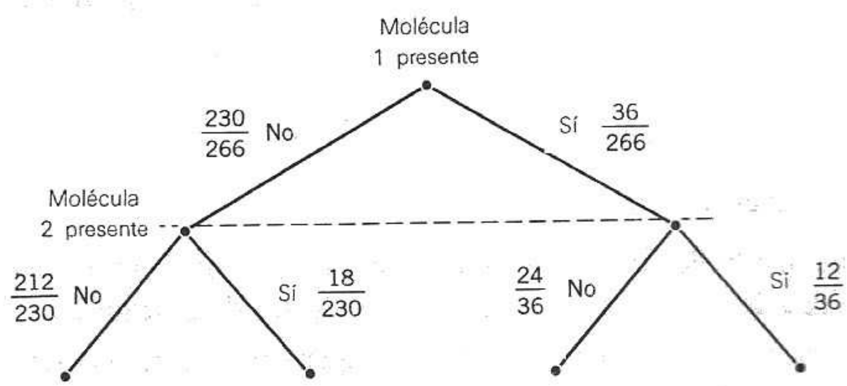


Figura 2-17 Diagrama de árbol del ejemplo 2-28.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2-4

2.52. **Continuación del ejercicio 2-22.** Determine las siguientes probabilidades.

a. $P(A)$
b. $P(B)$
c. $P(A|B)$
d. $P(B|A)$

2-53. **Continuación del ejercicio 2-23.** Calcule las siguientes probabilidades.

a. $P(A)$

b. $P(B)$

c. $P(A|B)$

d. $P(B|A)$

2-54. **Continuación del ejercicio 2-23.**

a. Si la parte seleccionada tiene un acabado superficial excelente, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud también sea excelente?

b. Si la parte seleccionada tiene una longitud adecuada, ¿cuál es la probabilidad de que el acabado superficial sea excelente?

2-55. Un lote contiene 15 piezas de fierro fundido de un proveedor local y 25 de un proveedor de otro estado. Se eligen dos piezas al azar, sin remplazo, del lote de 40. Sean A: el evento donde la primera pieza seleccionada es del proveedor local, y B: el evento donde la segunda pieza seleccionada es del proveedor local.

a. ¿Cuál es el valor de $P(A)$?

b. ¿Cuál es el valor de $P(B|A)$?

c. ¿Cuál es el valor de $P(A \cap B)$?

d. ¿Cuál es el valor de $P(A \cup B)$?

2-56. **Continuación del ejercicio 2-55.** Suponga que ahora se eligen tres piezas al azar, sin remplazo, del lote de 40. Además de los eventos A y B, sea C: el evento donde la tercera pieza seleccionada es del proveedor local.

a. ¿Cuál es el valor de $P(A \cap B \cap C)$?

b. ¿Cuál es el valor de $P(A \cap B \cap C')$?

2-57. **Continuación del ejercicio 2-50.**

a. Si se sabe que la flecha cumple con los requerimientos de curvatura, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado?

b. Si se sabe que la flecha no cumple con los requerimientos de curvatura, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos de acabado?

2-58. La siguiente tabla resume los resultados del análisis de muestras de acero galvanizado en cuanto a peso del recubrimiento y rugosidad de la superficie.

		peso del recubrimiento	
		alta	baja
rugosidad de la superficie	alto	12	16
	bajo	88	34

a. Si el peso del recubrimiento de una muestra es alto, ¿cuál es la probabilidad de que la rugosidad de la superficie sea alta?

b. Si la rugosidad de la superficie de una muestra es alta, ¿cuál es la probabilidad de que el peso del recubrimiento sea alto?

c. Si la rugosidad de la superficie de una muestra es baja, ¿cuál es la probabilidad de que el peso del recubrimiento sea bajo?

2-59. Considere los datos sobre contaminación de obleas y posición en un instrumento de deposición electrónica, dados en el ejemplo 2-20. Suponga que de este conjunto se toma al azar una oblea. Sean A: el evento donde la oblea contiene cuatro o más partículas, y B: el evento donde la oblea está en el centro del instrumento de deposición.

a. ¿Cuál es el valor de $P(A)$?

b. ¿Cuál es el valor de $P(A|B)$?

c. ¿Cuál es el valor de $P(B)$?

d. ¿Cuál es el valor de $P(B|A)$?

e. ¿Cuál es el valor de $P(A \cap B)$?

f. ¿Cuál es el valor de $P(A \cup B)$?

2-60. Un lote de 100 circuitos integrados contiene 20 defectuosos. Se eligen dos al azar, sin remplazo, del lote.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el primero en ser seleccionado sea defectuoso?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo sea defectuoso dado que el primero es defectuoso?

c. ¿Cómo cambia la respuesta del inciso b) si los circuitos se toman con remplazo antes de la siguiente selección?

2-61. Un lote de 500 contenedores para jugo de naranja congelado contiene cinco que están defectuosos. Se toman del lote dos al azar, sin remplazo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo contenedor sea defectuoso si el primero lo fue?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos contenedores sean defectuosos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos contenedores sean aceptables?

2.62. **Continuación del ejercicio 2-61.** Del lote se escogen al azar tres contenedores, sin remplazo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercero sea defectuoso, dado que el primero y el segundo son defectuosos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tercero sea defectuoso dado que el primero es defectuoso y el segundo aceptable?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres contenedores sean defectuosos?

2-63. Si $P(A|B) = 1$, ¿puede concluirse que $A = B$? Dibuje un diagrama de Venn para explicar su respuesta.

2-64. Suponga que A y B son eventos mutuamente excluyentes. Construya un diagrama de Venn que contenga los eventos A, B y C, tales que $P(A|C) = 1$ y $P(B|C) = 0$.

2-5 REGLAS DE MULTIPLICACIÓN

2-5.1 Regla de multiplicación

La definición de probabilidad condicional dada por la ecuación 2-5 puede rescribirse de modo que proporcione una expresión general para la probabilidad de la intersección de dos eventos.

(B)

Regla de multiplicar

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \tag{2-6}$$

La segunda expresión de la ecuación 2-6 se obtiene al intercambiar A y B.

EJEMPLO 2-29

La probabilidad de que la batería de un automóvil sujeta a altas temperaturas dentro del compartimento del motor reciba una corriente de carga mayor que la normal, es 0.7. La probabilidad de que la batería quede expuesta a altas temperaturas es 0.05.

Sean A: el evento donde la batería experimenta una corriente de carga mayor que la normal, y B: el evento donde la batería está expuesta a altas temperaturas. La probabilidad de que la batería experimente tanto una corriente de carga alta como una temperatura alta es

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.7 \times 0.05 = 0.035$$

2-5.2 Regla de probabilidad total

La regla de multiplicación es útil para determinar la probabilidad de un evento que depende de otros. Por ejemplo, supóngase que, durante el proceso de fabricación de semiconductores, la probabilidad de que un circuito integrado que esté sujeto a grandes niveles de contaminación sea causa de una falla en un producto, es 0.10. Por otra parte, la probabilidad de que un circuito que no está sujeto a altos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura sea la causa de una falla es 0.005. En una corrida de producción particular, el 20% de los circuitos están sujetos a altos niveles de contaminación. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto que utilice alguno de estos circuitos integrados falle?

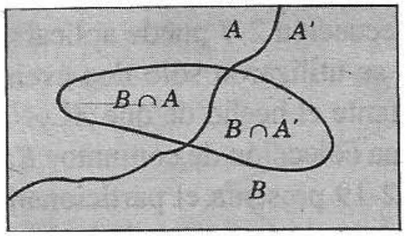


Figura 2-18 Particionamiento de un evento en dos subconjuntos mutuamente excluyentes.

Es evidente que la probabilidad pedida depende de si el circuito estuvo o no expuesto a altos niveles de contaminación. Este problema puede resolverse con el siguiente razonamiento.

Para cualquier evento B, éste puede escribirse como la unión de la parte de B que está en A y la parte de B que está en A'. Esto es,

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

La figura 2-18 presenta el diagrama de Venn que corresponde a este resultado. Dado que A y A' son mutuamente excluyentes, $A \cap B$ y $A' \cap B$ también lo son. Por tanto, después de utilizar el resultado para la probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes dado por la ecuación 2-2, y la regla de multiplicación de la ecuación 2-6, se llega al siguiente resultado.

Regla de probabilidad total (para dos eventos)

Para cualquier par de eventos A y B,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') \quad (2\text{-}7)$$

EJEMPLO 2-30

Considere lo expuesto sobre contaminación al inicio de esta sección. Sean F: el evento donde el producto falla, y A: el evento donde el circuito está expuesto a altos niveles de contaminación. La probabilidad pedida es $P(F)$, y la información proporcionada puede representarse de la siguiente manera:

$$P(F|A) = 0.10$$

$$P(F|A') = 0.005$$

$$P(A) = 0.20$$

Por consiguiente,

$$P(A') = 0.80$$

y, de la ecuación 2-7, se tiene que

$$P(F) = 0.10(0.20) + 0.005(0.80) = 0.024$$

resultado que puede interpretarse como el promedio ponderado de las dos probabilidades de falla.

El razonamiento utilizado para desarrollar la ecuación 2-7 puede aplicarse de manera más general. En el desarrollo de la ecuación 2-7 se utilizaron sólo dos eventos, A y A', mutuamente excluyentes. Sin embargo, fue importante el hecho de que $A \cup A' = S$, esto es todo el espacio muestral. En general, se dice que una colección de conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ es **exhaustiva** si $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = S$. La figura 2-19 presenta el particionamiento de un evento B por una colección de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

Regla de probabilidad total (para varios eventos)

Supóngase que $E_1, E_2, \ldots, E_k$, son k conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivas. Entonces,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \cdots + P(B \cap E_k) \\ &= P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \cdots + P(B|E_k)P(E_k) \qquad (2\text{-}8) \end{aligned}$$

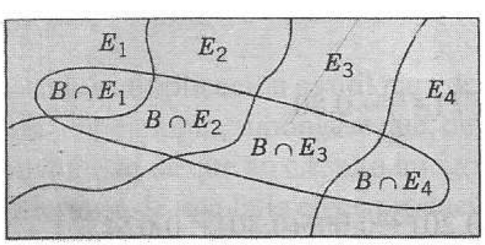
EJEMPLO 2-31

Considérese una vez más el ejemplo del proceso de fabricación de semiconductores; supóngase que 0.10 es la probabilidad de que un circuito integrado expuesto a altos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura sea la causa de falla en un producto; que 0.01 es la probabilidad de que un circuito integrado expuesto a niveles de contaminación medios durante el proceso de manufactura sea el causante de una falla en un producto, y que 0.001 es la probabilidad de que un circuito integrado expuesto a bajos niveles de contaminación durante el proceso de manufactura sea el causante de una falla en un producto. En una corrida de producción particular, el 20% de los circuitos están expuestos a altos niveles de contaminación; el 30% a niveles medios, y el 50% a bajos niveles. ¿Cuál es la probabilidad de que falle un producto que haga uso de uno de estos circuitos? Sean

E_1: el evento donde el circuito integrado está expuesto a altos niveles de contaminación

E_2: el evento donde el circuito integrado está expuesto a niveles medios de contaminación

E_3: el evento donde el circuito integrado está expuesto a bajos niveles de contaminación



$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3) \cup (B \cap E_4)$

$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + P(B \cap E_3) + P(B \cap E_4)$

Figura 2-19 Particionamiento de un evento en varios subconjuntos mutuamente excluyentes.

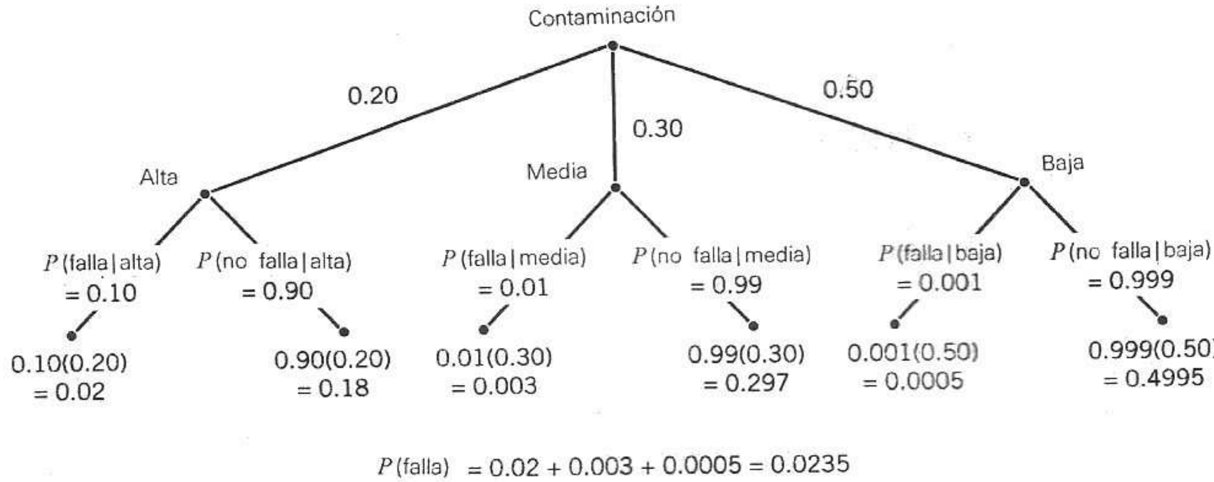


Figura 2-20 Diagrama de árbol del ejemplo 2-31.

Entonces,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|E_1)P(E_1) + P(F|E_2)P(E_2) + P(F|E_3)P(E_3) \\ &= 0.10(0.20) + 0.01(0.30) + 0.001(0.50) \\ &= 0.0235 \end{aligned}$$

La solución de este problema también puede obtenerse, de manera conveniente, con el diagrama de árbol de la figura 2-20.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2-5

2-65. Suponga que $P(A|B) = 0.4$ y $P(B) = 0.5$. Calcule lo siguiente.

a. $P(A \cap B)$

b. $P(A' \cap B)$

2-66. Suponga que $P(A|B) = 0.2$, $P(A|B') = 0.3$ y $P(B) = 0.8$. ¿Cuál es el valor de $P(A)$?

2-67. La probabilidad de que falle un conector eléctrico que se mantiene seco durante el periodo de garantía, es 1%. Si el conector se humedece, la probabilidad de falla durante el periodo de garantía es 5%. Si el 90% de los conectores se mantienen secos, y el 10% se humedece, ¿qué proporción de conectores fallará durante el periodo de garantía?

2-68. Suponga que el 2% de los rollos de tela de algodón son defectuosos, al igual que el 3% de los rollos de tela de nylon. De los rollos utilizados por un fabricante, 70% son de algodón y 30% son de nylon. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar uno de los rollos éste sea defectuoso?

2-69. En la fabricación de un adhesivo químico, el 3% de todos los lotes contienen materia prima que proviene de dos embarques diferentes. Esto sucede cuando los tanques de almacenamiento son rellenados y lo que queda de un lote es insuficiente para llenar otro tanque.

Sólo es necesario volver a procesar el 5% de los lotes con materia prima que proviene de un solo embarque. Sin embargo, la viscosidad de los lotes que contienen material prima de dos o más embarques es más difícil de controlar, y el 40% de estos lotes requieren un procesamiento adicional para alcanzar la viscosidad requerida.

Sean A: el evento en que un lote contiene materia prima de dos embarques diferentes, y B: el evento en que el lote requiere de procesamiento adicional. Determine las probabilidades siguientes.

a. $P(A)$

b. $P(A')$

c. $P(B|A)$

d. $P(B|A')$

e. $P(A \cap B)$

f. $P(A \cap B')$

g. $P(B)$

2-70. La irregularidad del corte de productos de papel aumenta a medida que las hojas de la cuchilla se desgastan. Sólo el 1% de productos cortados con cuchillas nuevas tienen cortes irregulares, el 3% de los cortados con cuchillas de filo promedio exhiben irregularidades y el 5% de los cortados con cuchillas desgastadas presentan irregularidades. Si el 25% de las cuchillas utilizadas en el proceso de corte son nuevas, el 60% tiene un filo promedio y el 15% de las cuchillas están desgastadas, ¿cuál es la proporción de productos que tendrán cortes irregulares?

2-71. Las muestras de vidrio de un laboratorio se colocan en empaques pequeños y ligeros o en empaques pesados y grandes. Suponga que el 2% y el 1% de las muestras enviadas en empaques pequeños y grandes, respectivamente, se rompen durante el trayecto a su destino. Si el 60% de las muestras se envían en empaques grandes, y el 40% en empaques pequeños, ¿cuál es la proporción de muestras que se romperán durante el envío?

2-72. Un lote de 25 partes moldeadas por inyección contiene cinco que sufrieron una merma considerable.

a. Si se escogen dos partes al azar, sin remplazo, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda parte seleccionada sea de las que experimentaron una merma considerable?

b. Si se toman tres partes al azar, sin remplazo, ¿cuál es la probabilidad de que la tercera parte sean de las que experimentaron una merma considerable?

2-73. **Continuación del ejercicio 2-60.** Utilice la regla de probabilidad total para determinar la probabilidad de que el segundo circuito seleccionado sea defectuoso.

2-74. **Continuación del ejercicio 2-61.** Utilice la regla de probabilidad total para calcular la probabilidad de que el segundo contenedor seleccionado sea defectuoso.

2-6 INDEPENDENCIA

En algunos casos, la probabilidad condicional de $P(B|A)$ puede ser igual a $P(B)$. En esta situación especial, el conocimiento de que el resultado del experimento está en A no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de que el resultado se encuentre en el evento B.

EJEMPLO 2-32

Al igual que en el ejemplo 2-26, supóngase que la producción diaria de 850 partes contiene 50 que no cumplen con los requerimientos del cliente. Supóngase que se escogen del lote dos partes al azar, pero la primera se devuelve al lote antes de tomar la segunda.

¿Cuál es la probabilidad de que la segunda parte sea defectuosa dado que la primera lo es?

Tabla 2-4 Moléculas de las muestras de aire

		Molécula 1 presente	
		no	sí
	no	32	24
Molécula 2 presente	sí	16	12
Total = 84 muestras de aire			

Sean B: el evento en que la segunda parte es defectuosa, y A: el evento en que la primera parte es defectuosa. Con esto, la probabilidad pedida puede expresarse como $P(B|A)$.

Dado que la primera parte se devuelve antes de tomar la segunda, el lote aún contiene 850 partes, de las cuales 50 son defectuosas. Por consiguiente, la probabilidad de B no depende de lo que haya pasado con la primera parte. Esto es,

$$P(B|A) = 50/850$$

EJEMPLO 2-33

La tabla 2-4 contiene los resultados obtenidos al analizar 84 muestras de aire con la finalidad de detectar dos moléculas raras.

Sean A: el evento donde todas las muestras de aire contienen la molécula 1, y B: el evento donde todas las muestras contienen la molécula 2. Entonces, $P(B) = 28/84 = 1/3$. Así mismo,

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = (12/84)(36/84) = 1/3$$

En este ejemplo, el conocimiento de que la molécula 1 está presente en la muestra no cambia la probabilidad de que la molécula 2 esté presente. El evento B contiene la misma proporción del total de muestras que de muestras en el evento A.

Por otra parte, $P(A|B) = P(A) = 3/7$ y $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/7$.

El ejemplo anterior ilustra el siguiente resultado general.

Definición

Se dice que dos eventos son **independientes** si, y sólo si, cualquiera de las siguiente proposiciones es verdadera.

(1) $P(A|B) = P(A)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (2-9)

El concepto de independencia es una relación muy importante entre eventos, y se utiliza en todo el texto. Una relación de exclusión mutua entre dos eventos se basa únicamente en los resultados que forman los eventos. Sin embargo, una relación de independencia depende del modelo de probabilidad usado para el experimento aleatorio. Frecuentemente se supone la relación de independencia como parte del experimento aleatorio que describe el sistema físico estudiado.

En el ejemplo 2-17 se hizo la suposición implícita de que cada cliente toma de manera independiente la decisión de aprobar o modificar el diseño del producto. Después se calculó la probabilidad del resultado (aprobado, aprobado) como el producto de las probabilidades de que cada cliente apruebe el diseño. Esto es, $(0.2)(0.2) = 0.04$, de acuerdo con la propiedad (3) dada en la definición de independencia.

EJEMPLO 2-34

Tal como se indicó en el ejemplo 2-26, la producción diaria de partes contiene 50 que no cumplen con los requerimientos del cliente y 800 que sí lo hacen. Se toman del lote dos partes al azar sin remplazo. Sean A: el evento donde la primera parte es defectuosa, y B: el evento donde la segunda parte es defectuosa.

Se sospecha que estos eventos no son independientes, ya que el conocimiento de que la primera parte es defectuosa sugiere que es menos probable que la segunda parte también lo sea. Por otro lado, $P(B|A) = 49/849$. Ahora, ¿cuál es el valor de $P(B)$? Encontrar la probabilidad no condicional de B es algo difícil, debido a que es necesario considerar los posibles valores de la primera selección.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') \\ &= (49/849)(50/850) + (50/849)(800/850) \\ &= 50/850 \end{aligned}$$

Es interesante notar que $P(B)$, la probabilidad no condicional de que la segunda parte sea defectuosa, sin ningún conocimiento de lo que sucede con la primera parte, es igual a $P(A)$. Aun así, la meta es determinar la independencia. Ya que $P(B|A)$ no es igual a $P(B)$, los eventos no son independientes, tal como se sospechaba al principio.

La definición de independencia puede extenderse para considerar tres o más eventos. El siguiente resultado general es una extensión sencilla que a menudo es muy útil.

Definición

Los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son independientes, si, y sólo si, para cualquier subconjunto $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{ik}$,

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \times P(E_{i_2}) \times \cdots \times P(E_{i_k}) \qquad (2\text{-}10)$$

Nótese que, para dos eventos, la ecuación 2-10 es equivalente a la condición (3) que aparece en la ecuación 2-9.

EJEMPLO 2-35

Como ejemplo clásico, al lanzar varias veces una moneda se supone que cada lanzamiento es independiente, y que la probabilidad de que el resultado de éste sea cara es 0.5. Por tanto, la probabilidad de obtener la secuencia [cara, cara, cara, cruz, cruz] en cinco lanzamientos es

$$(1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) \times (1/2) = 1/32$$

EJEMPLO 2-36

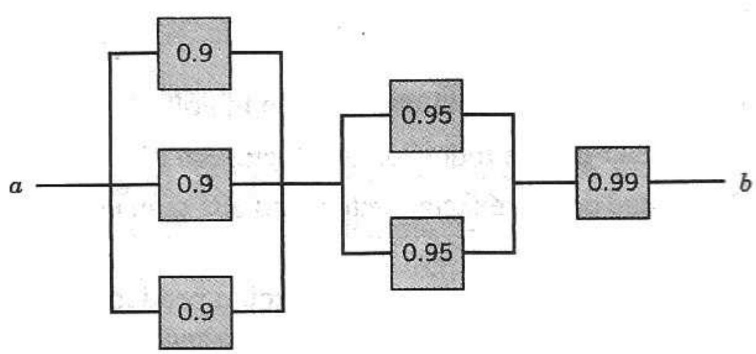
Supóngase que la probabilidad de que una muestra de aire contenga una molécula rara es 0.01 y que las muestras son independientes; esto es, la probabilidad de que una muestra contenga una molécula rara no depende de las características de ninguna de las demás muestras. Si se analizan 15 muestras, ¿cuál es la probabilidad de no encontrar ninguna molécula rara?

Sean E_i: el evento donde la i-ésima muestra de aire no contiene moléculas raras, $i = 1, 2, \ldots, 15$. Entonces, $P(E_i) = 0.99$. La probabilidad pedida puede representarse como $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{15})$. De la hipótesis de independencia y de la ecuación 2-10,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{15}) = P(E_1) \times P(E_2) \times \cdots \times P(E_{15}) = 0.99^{15} = 0.86$$

EJEMPLO 2-37

El circuito siguiente trabaja sólo si existe una trayectoria de dispositivos en funcionamiento, de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione aparece en la figura. Supóngase que los dispositivos fallan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito trabaje?



Con el empleo de la hipótesis de independencia, se tiene que $(1 - 0.1^3)(1 - 0.05^2)(0.99) = 0.987$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2-6

2-75. Si $P(A|B) = 0.4$, $P(B) = 0.8$ y $P(A) = 0.6$, ¿puede decirse que los eventos A y B son independientes?

2-76. Si $P(A|B) = 0.3$, $P(B) = 0.8$ y $P(A) = 0.3$, ¿puede afirmarse que los eventos B y el complemento de A son independientes?

2-77. Si $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.2$, y los eventos A y B son mutuamente excluyentes, ¿puede afirmarse que son independientes?

2-78. **Continuación del ejercicio 2-22.** ¿Los eventos A y B son independientes?

2-79. **Continuación del ejercicio 2-23.** ¿Los eventos A y B son independientes?

2-80. **Continuación del ejercicio 2-24.** ¿Los eventos A y B son independientes?

2-81. Se toman muestras de espuma de dos proveedores y se hace una evaluación a éstas para determinar el grado con el que cumplen ciertas especificaciones. A continuación se resumen los resultados obtenidos con 126 muestras.

		cumple con los requerimientos	
		sí	no
proveedor	1	80	4
	2	40	2

Sean A: el evento en que la muestra es del proveedor 1, y B: el evento donde la muestra cumple con las especificaciones.

a. ¿Los eventos A y B son independientes?

b. ¿Los eventos A' y B son independientes?

2-82. La probabilidad de que una muestra de laboratorio contenga altos niveles de contaminación es 0.10. Se analizan cinco muestras; éstas son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna contenga altos niveles de contaminación?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una tenga altos niveles de contaminación?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una tenga altos niveles de contaminación?

2-83. En la prueba de la tarjeta de un circuito impreso en la que se utiliza un patrón de prueba aleatorio, un arreglo de 10 bits tiene la misma probabilidad de ser uno o cero. Suponga que los bits son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los bits sean uno?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los bits sean cero?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cinco bits sean uno, y los otros cinco, cero?

2-84. Las ocho cavidades de una máquina de moldeo por inyección producen conectores plásticos que caen en una banda de transporte común. Se toma una muestra de conectores cada determinado tiempo. Suponga que las muestras son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que cinco muestras sucesivas hayan sido producidas en la cavidad uno del molde?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que cinco muestras sucesivas hayan sido producidas en la misma cavidad del molde?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de cinco muestras sucesivas hayan sido producidas en la cavidad uno del molde?

2-85. Un dispositivo de almacenamiento óptico utiliza un procedimiento de recuperación de error que requiere la lectura inmediata de cualquier dato escrito en el dispositivo. Si la lectura no tiene éxito después de tres operaciones de escritura, se elimina dicho sector del disco ya que es inaceptable para el almacenamiento de datos. En la parte aceptable del disco, la probabilidad de una lectura exitosa es 0.98. Suponga que las lecturas son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de eliminar una parte aceptable del disco y marcarla como inaceptable para el almacenamiento de datos?

2-86. Un lote de 500 contenedores para jugo de naranja congelado contiene cinco que están defectuosos. Se escogen dos al azar, sin remplazo. Sean A y B los eventos donde el primero y el segundo contenedor son defectuosos, respectivamente.

a. ¿Los eventos A y B son independientes?

b. Si el muestreo se hace con remplazo, ¿los eventos A y B son independientes?

2-7 TEOREMA DE BAYES

En algunos de los ejemplos no se tiene una tabla completa de información, como la del ejemplo 2-33. Tal vez se conozca una probabilidad condicional, pero lo que se desea calcular es una diferente. En el problema de contaminación de semiconductores del ejemplo 2-31, puede preguntarse lo siguiente. Si el circuito del producto falla, ¿cuál es la probabilidad de que el circuito haya sido expuesto a altos niveles de contaminación?

De la definición de probabilidad condicional,

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = P(B\cap A) = P(B|A)P(A)$$

Ahora, si se consideran los términos segundo y último de la expresión anterior, entonces

$$P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B) \qquad (2\text{-}11)$$

Éste es un resultado útil que permite determinar $P(A|B)$ en términos de $P(B|A)$.

EJEMPLO 2-38

Considérese de nuevo el ejemplo 2-31. Ahora puede contestarse la pregunta planteada al inicio de esta sección. La probabilidad pedida puede expresarse como $P(E_1|F)$. Entonces,

$$P(E_1|F) = P(F|E_1)P(E_1)/P(F) = 0.10(0.20)/0.0235 = 0.85$$

El valor de $P(F)$ que aparece en el denominador de la solución anterior fue determinado en el ejemplo 2-31.

En general, si se escribe la $P(B)$ del denominador de la ecuación 2-11 utilizando la regla de la probabilidad total, ecuación 2-8, se obtiene el siguiente resultado general, conocido como teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

Si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son k eventos exhaustivos y mutuamente excluyentes, y B es cualquier evento, entonces

$$P(E_1|B) = \frac{P(B|E_1)P(E_1)}{P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \cdots + P(B|E_k)P(E_k)}$$

EJEMPLO 2-39

Debido a que un nuevo procedimiento médico ha demostrado su eficacia en la detección temprana de cierta enfermedad, se propone realizar un examen médico preventivo a la población. La probabilidad de que la prueba sea positiva e identifique de manera correcta a una persona que tiene la enfermedad, es 0.99, mientras que la probabilidad de que la prueba sea negativa e identifique correctamente a un paciente que no tiene la enfermedad, es 0.95. La incidencia de la enfermedad en la población es 0.0001. Alguien toma la prueba y ésta resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona tenga la enfermedad?

Sean D: el evento en que la persona tiene la enfermedad, y S: el evento en que la prueba es positiva. La probabilidad pedida es entonces $P(D|S)$. La probabilidad de que la prueba sea negativa y detecte de manera positiva a una persona que no tiene la enfermedad, es 0.95. En consecuencia, la probabilidad de que la prueba sea positiva sin que la persona esté enferma es

$$P(S|D') = 0.05$$

Del teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(D|S) &= P(S|D)P(D)/[P(S|D)P(D) + P(S|D')P(D')] \\ &= 0.99(0.0001)/[0.99(0.0001) + 0.05(1 - 0.0001)] \\ &= 1/506 = 0.002 \end{aligned}$$

De manera sorprendente, a pesar de que la prueba es eficaz, en el sentido de que $P(S|D)$ es grande y $P(S|D')$ es baja, dada la baja incidencia de la enfermedad en la población, las posibilidades de que la persona tenga la enfermedad son muy pequeñas, incluso si la prueba es positiva.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 2-7

2-87. Suponga que $P(A|B) = 0.8$, $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.2$. Calcule $P(B|A)$.

2-88. El software para detectar fraudes en las tarjetas telefónicas utilizadas por los consumidores, registra todos los días el número de áreas metropolitanas donde se originan todas las llamadas. Se tiene que el 1% de los usuarios legítimos hacen al día llamadas que se originan en dos o más áreas metropolitanas. Sin embargo, el 30% de los usuarios fraudulentos hacen al día llamadas desde dos o más áreas metropolitanas. La proporción de usuarios fraudulentos es 0.01%. Si el mismo usuario hace en un día dos o más llamadas desde dos o más áreas metropolitanas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un usuario fraudulento?

2-89. Los láseres de semiconductor utilizados en los productos para almacenamiento óptico requieren niveles de potencia mucho mayores para las operaciones de escritura que para las de lectura. Entre más grande es el nivel de potencia menor es la duración del láser.

Los láseres utilizados en productos para el respaldo de discos magnéticos de alta velocidad se utilizan principalmente para escribir, y la probabilidad de que su vida útil sea mayor que cinco años es 0.95. Los láseres que se emplean en productos para almacenamiento, invierten aproximadamente el mismo tiempo en operaciones de lectura y escritura, y la probabilidad de que la vida útil de éstos sea mayor que cinco años es 0.995. El 25% de los productos de cierto fabricante se utilizan para operaciones de respaldo, mientras que el 75% restante se emplea para almacenamiento.

Sean A: el evento donde la vida útil de láser es mayor que cinco años, y B: el evento donde el producto que emplea el láser se utiliza para respaldar información.

Utilice un diagrama de árbol para determinar lo siguiente.

a. $P(B)$

b. $P(B')$

c. $P(A|B)$

d. $P(A|B')$

e. $P(A \cap B)$

f. $P(A \cap B')$

g. $P(A)$

2-90. **Continuación del ejercicio 2-89.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil del láser sea mayor que cinco años?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el láser que falla antes de cinco años provenga de un producto que se emplea para respaldar información?

2-91. Los clientes se encargan de evaluar los diseños preliminares de varios productos. En el pasado, el 95% de los productos que con mayor éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60% de los productos con éxito moderado recibieron buenas evaluaciones, y el 10% de productos de escaso éxito recibieron buenas evaluaciones. Además, el 40% de los productos ha tenido mucho éxito, el 35% un éxito moderado, y el 25% una baja aceptación.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una buena evaluación?

b. Si un nuevo diseño obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

c. Si un producto no obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad de que se convierta en un producto de gran éxito?

Ejercicios complementarios

2-92. En la prueba de tarjetas de circuito impreso, cada tarjeta pasa o no pasa la prueba. En una tarjeta que no pasa la prueba se hace una verificación adicional para determinar cuál, de entre cinco defectos principales, es el causante principal de que la tarjeta no pase la prueba. Represente el espacio muestral de este experimento.

2-93. A continuación se presenta un resumen de la información obtenida de una muestra de 200 partes maquinadas.

	condición de la arista	
	mayor de la necesaria	menor de la necesaria
profundidad de barrenado		
burda	15	10
moderada	25	20
suave	60	70

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la parte seleccionada tenga una condición moderada en la arista y una profundidad de barrenado menor que la requerida?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la parte seleccionada tenga una condición moderadda en la arista o una profundidad de barrenado menor que la requerida?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la parte seleccionada no tenga una condición moderada en la arista o que no tenga una profundidad de barrenado menor que la requerida?

d. Construya un diagrama de Venn que represente los eventos de este espacio muestral.

2-94. La probabilidad de que la orden de un cliente no se envíe a tiempo es 0.05. Un cliente realiza tres pedidos, pero el tiempo que hay entre ellos es tan grande que pueden considerarse como eventos independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los pedidos se envíen a tiempo?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de ellos no se envíe a tiempo?

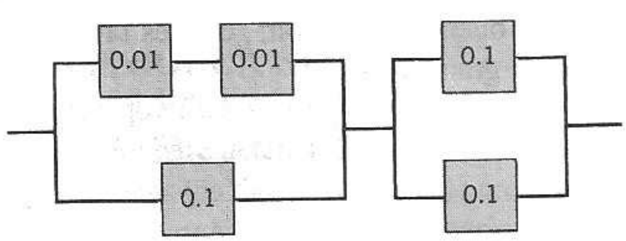
c. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más pedidos no se envíen a tiempo?

2-95. Una placa de metal tiene 20 tornillos. Suponga que cinco de ellos no están bien apretados. Se escogen cuatro de ellos, al azar y sin remplazo, para determinar si están bien apretados.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro tornillos estén bien apretados?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos no esté bien apretado?

2-96. El circuito siguiente trabaja si, y sólo si, existe una trayectoria de dispositivos en funcionamiento, izquierda a derecha. Suponga que los dispositivos fallan de manera independiente. En la figura siguiente se indica la probabilidad de *falla* de cada uno de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito trabaje?



2-97. En una operación de llenado automático, la probabilidad de que el volumen de llenado sea incorrecto es 0.001 cuando el proceso se realiza a baja velocidad. Cuando el proceso se efectúa a alta velocidad, la probabilidad de un llenado incorrecto es 0.01. Suponga que el

30% de los contenedores se llena cuando el proceso se efectúa a alta velocidad, mientras que el resto se ejecuta el proceso se lleva a cabo a baja velocidad.

a. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un contenedor lleno con un volumen incorrecto?

b. Si se encuentra un contenedor lleno con un volumen incorrecto, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido llenado cuando el proceso se realizaba a alta velocidad?

2-98. Una máquina robótica de inserción contiene 10 componentes primarios. La probabilidad de que cualquier componente falle durante el periodo de garantía es 0.01. Suponga que los componentes fallan de manera independiente y que la máquina falla cuando alguno de sus componentes falla. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina falle durante el periodo de garantía?

2-99. Una máquina herramienta está desocupada durante el 15% del tiempo total de uso. Usted le pide al operador que haga uso de la herramienta en cinco ocasiones distintas durante un año. Suponga que las solicitudes de uso son eventos independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la herramienta esté desocupada todas las veces que usted le pide al operador utilizarla?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la herramienta esté desocupada exactamente cuatro de las cinco veces en que usted le pide al operador utilizarla?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la herramienta esté desocupada al menos tres de las cinco veces en que usted le pide al operador utilizarla?

2-100. Un lote de 50 arandelas espaciadoras contiene 30 que son más gruesas que la dimensión requerida. Suponga que del lote se escogen tres arandelas al azar, sin remplazo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres arandelas sean más gruesas que la dimensión requerida?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera arandela sea más gruesa de lo necesario si las dos primeras son más delgadas que la dimensión requerida?

c. ¿Cuál es la probabilidad que la tercera arandela sea más gruesa que la dimensión requerida?

2-101. **Continuación del ejercicio 2-100.** Se escogen arandelas de un lote al azar y sin remplazo.

a. ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que es necesario tomar del lote, para que la probabilidad de que todas ellas sean más delgadas que la dimensión requerida sea menor que 0.10?

b. ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que es necesario tomar del lote, para que la probabilidad de que una o más de ellas sea más gruesas que la dimensión requerida sea al menos 0.90?

2-102. La tabla siguiente presenta un resumen de las características solicitadas en 940 órdenes de compra de computadoras.

		memoria adicional	
		no	sí
	no	514	68
procesador opcional de alta velocidad	sí	112	246

Sean A: el evento donde se pide en una orden un procesador opcional de alta velocidad, y B: el evento donde se pide memoria adicional. Calcule las probabilidades siguientes.

a. $P(A \cup B)$

b. $P(A \cap B)$

c. $P(A' \cup B)$

d. $P(A' \cap B')$

2-103. **Continuación del ejercicio 2-102.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una orden se pida un procesador opcional de alta velocidad teniendo en cuenta que también se solicita memoria adicional?

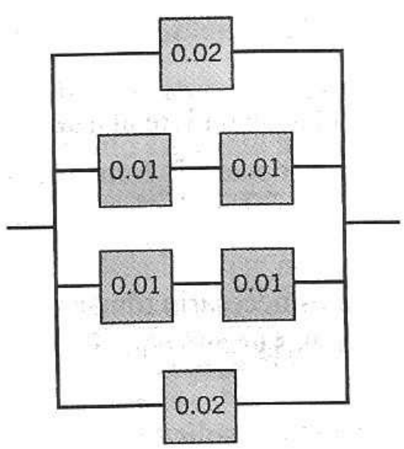
b. ¿Cuál es la probabilidad de que en una orden se pida memoria adicional teniendo en cuenta que también se solicita un procesador opcional de alta velocidad?

2-104. La alineación entre la cinta magnética y la cabeza de un sistema de almacenamiento en cinta magnética, afecta el desempeño del sistema. Suponga que el 10% de las operaciones de lectura se ven atenuadas por una alineación oblicua, el 5% de ellas son atenuadas por una alineación descentrada, y que las demás operaciones de lectura se realizan de manera correcta. La probabilidad de un error en la lectura por una alineación oblicua es 0.01, por una alineación descentrada, 0.02, y 0.001 por una alineación correcta.

a. ¿Cuál es la probabilidad de tener un error en la lectura?

b. Si se presenta un error en la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que se deba a una alineación oblicua?

2-105. El circuito siguiente trabaja si, y sólo si, existe una trayectoria de dispositivos en funcionamiento, de izquierda a derecha. Suponga que los dispositivos fallan de manera independiente y que la probabilidad de *falla* de cada uno de ellos es la que se muestra en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito trabaje?



EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

2-106. La alineación entre la cinta magnética y la cabeza de un sistema de almacenamiento en cinta magnética, afecta el desempeño del sistema. Suponga que el 10% de las operaciones de lectura se ven atenuadas por una alineación oblicua; el 5% de ellas son atenuadas por una alineación descentrada; el 1% por alineación oblicua y descentrada, mientras que las demás operaciones de lectura se realizan de manera correcta. La probabilidad de un error en la lectura por una alineación oblicua es 0.01, por una alineación descentrada, 0.02; 0.06, por ambas condiciones, y 0.001, por una alineación correcta. ¿Cuál es la probabilidad de tener un error en la lectura?

2-107. Un lote de arandelas es tan grande que puede suponerse que el muestreo se hace con remplazo. Suponga que el 60% de las arandelas tienen un espesor mayor que el deseado.

a. ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que es necesario seleccionar, para que la probabilidad de que todas ellas tengan un ancho menor que el deseado sea menor que 0.10?

b. ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que es necesario seleccionar, para que la probabilidad de que una o más de ellas tengan un espesor mayor que el deseado sea al menos de 0.90?

2-108. Una empresa de biotecnología puede producir juegos de pruebas diagnósticas con un costo de 20 dólares. El precio de venta de cada juego para el que existe demanda en una semana producción es de 100 dólares. Sin embargo, debido a la vida media de los componentes que integran el juego, si éste no se vende en la semana en que se produce entonces tiene que desecharse. El costo asociado con el desecho de un juego es de cinco dólares. En la tabla siguiente se resume la demanda semanal.

Demanda semanal				
Número de unidades	0	50	100	200
Probabilidad de la demanda	0.05	0.4	0.3	0.25

¿Cuántos juegos deben producirse cada semana para maximizar las ganancias de la compañía?

2-109. **Continuación del ejercicio 2-95.** Las características de un proceso de inspección son las siguientes. Si un operador examina un tornillo, la probabilidad de identificar un tornillo mal apretado es 0.95. Si el tornillo examinado se encuentra bien apretado, entonces la conclusión del operador siempre es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos, de una muestra de cuatro, se identifique como mal apretado?

2-110. Si los eventos A y B son independientes, demuestre que A' y B' también son independientes.

2-111. **Continuación del ejercicio 2-81.** Suponga que la tabla del ejercicio 2-81 se generaliza de la siguiente manera.

		cumple con los requerimientos	
		sí	no
	1	ka	kb
proveedor	2	a	b

donde a, b y k son enteros positivos. Sean A: el evento donde la muestra de espuma es proporcionada por el proveedor 1, y B: el evento donde la muestra de espuma cumple con las especificaciones. Demuestre que los eventos A y B son independientes.

Este ejercicio ilustra el hecho de que cuando los renglones de una tabla (con r renglones y c columnas) son proporcionales, entonces los eventos definidos por un renglón y por una columna son independientes.

3 Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad discretas

3-1 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Con frecuencia el interés recae en resumir con un número el resultado de un experimento aleatorio. En muchos de los ejemplos de experimentos aleatorios considerados hasta el momento, el espacio muestral sólo es una descripción de los posibles resultados. En algunos casos las descripciones de los resultados son suficientes, pero en otros es útil asociar un número con cada resultado del espacio muestral. Ya que el resultado de un experimento no se conoce con anticipación, sucede lo mismo con el valor de la variable. Por esta razón, la variable que asocia un número con el resultado de un experimento aleatorio se conoce como **variable aleatoria**.

Definición

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada resultado en el espacio muestral de un experimento aleatorio.

Las variables aleatorias se denotan con una letra mayúscula, tal como X, y con una letra minúscula, como x, el valor posible de X. El conjunto de los posibles valores de la variable aleatoria X recibe el nombre de **rango de X**.

EJEMPLO 3-1

El sistema de comunicación por voz de una empresa tiene 48 líneas externas. En un determinado momento, se observa el sistema y algunas líneas están ocupadas. Sea X la variable aleatoria que denota el número de líneas en uso. Entonces X puede tomar cualquier valor entero de cero a 48.

EJEMPLO 3-2

Se evalúa un nuevo proceso para la fabricación de partes moldeadas en plástico en términos de la coloración y reducción del tamaño. Una de las primeras corridas del proceso proporciona la información para el espacio muestral y las probabilidades que aparecen en la tabla 3-1.

Supóngase que el interés recae en resumir los resultados de este experimento aleatorio con el número de características (de coloración y reducción del tamaño) que son aprobadas. Por lo cual, se define una variable aleatoria, X, para ser igual al número de características aprobadas.

La cuarta columna de la tabla contiene los valores de X asignados a cada resultado del experimento. Por ejemplo, al resultado (aprobado, aprobado) se le asigna $x = 2$.

Tabla 3-1 Características del plástico moldeado

Coloración	Reducción del tamaño	Probabilidad	x
aprobado	aprobado	0.64	2
aprobado	inaceptable	0.16	1
inaceptable	aprobado	0.16	1
inaceptable	inaceptable	0.04	0

Tabla 3-2 Rugosidad de la superficie de una pieza de hierro fundido

		rugosidad parte superior	
		no	sí
rugosidad parte inferior	no	0	1
	sí	1	2

EJEMPLO 3-3

Se inspeccionan las superficies superior e inferior de una parte de hierro fundido. Se define el número de superficies rugosas como la variable aleatoria X. Los valores posibles de X son $x = 0$, $x = 1$ o $x = 2$. La tabla 3-2 presenta el valor de X para cada resultado posible del experimento.

EJEMPLO 3-4

El análisis de una muestra de aire puede resumirse en términos de un número de variables y descripciones. Un resumen particular es el conteo de moléculas raras presentes en la muestra. Sea X la variable aleatoria que denota el número de moléculas raras en la muestra. Si bien la muestra tiene varias características, como volumen, densidad y claridad, la variable aleatoria X resume la muestra sólo en términos del número de moléculas raras que ésta contiene.

Los valores posibles de X son enteros desde cero hasta algún número grande, el cual representa el número máximo de moléculas raras que pueden encontrarse en una de las muestras de aire. Si este número máximo es muy grande, entonces puede suponerse que el rango de X es el conjunto de los enteros desde cero hasta infinito.

Nótese que sobre un espacio muestral puede definirse más de una variable aleatoria.

EJEMPLO 3-5

En el ejemplo 3-3 se define una nueva variable aleatoria Y igual al costo, en dólares, de volver a maquinar cada pieza. La tabla 3-3 presenta los valores de la variable aleatoria Y.

Tabla 3-3 Costo asociado con el remaquinado de la superficie

		rugosidad parte superior	
		no	sí
rugosidad parte inferior	no	\$0	\$40
	sí	\$40	\$80

En los ejemplos 3-1 a 3-5 el conjunto de valores posibles (rango) de cada variable aleatoria es finito (o infinito contable). Este tipo de variable aleatoria es particularmente fácil de analizar. De manera análoga al caso de un espacio muestral discreto, se utiliza la siguiente definición:

Definición

Una **variable aleatoria discreta** es una variable aleatoria con un rango finito (o infinito contable).

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-1

En cada uno de los ejercicios siguientes, determine el rango (valores posibles) de la variable aleatoria.

3-1. La variable aleatoria es el número de conexiones soldadas, de las 1000 que tiene un circuito impreso, que no cumplen con ciertos estándares de calidad.

3-2. En un sistema de comunicación por voz con 50 líneas, la variable aleatoria es el número de líneas ocupadas en un momento en particular.

3-3. Se utiliza un instrumento electrónico para medir pesos de empaques, hasta la libra más cercana. El instrumento de medición sólo tiene cinco dígitos. Cualquier peso mayor del que puede mostrarse aparece como "99999". La variable aleatoria es el peso que aparece en el instrumento.

3-4. Un lote de 500 partes maquinadas contiene 10 que no se ajustan a los requerimientos del cliente. La variable aleatoria es el número de partes en una muestra de cinco que no cumplen con los requerimientos del cliente.

3-5. Un lote de 500 partes maquinadas contiene 10 que no se ajustan a los requerimientos del cliente. Del lote se van tomando partes, sin remplazo, hasta que se obtiene una que no cumple con los requerimientos. La variable aleatoria es el número de partes seleccionadas.

3-6. La variable aleatoria es el contenido de humedad de un lote de materia prima, medido hasta el porcentaje entero más cercano.

3-7. La variable aleatoria es el número de problemas en la superficie de una bobina grande de acero galvanizado.

3-8. La variable aleatoria es el número de ciclos de reloj de una computadora necesarios para finalizar un determinado cálculo aritmético.

3-9. En la orden de pedido de un automóvil puede seleccionarse el modelo base o añadir cualquier número de opciones, hasta 15. La variable aleatoria es el número de opciones seleccionadas en un pedido.

3-10. Un entablado de madera puede pedirse en espesores de 1/8, 1/4 o 3/8 de pulgada. La variable aleatoria es el espesor total del entablado de dos pedidos.

3-2 DISTRIBUCIONES Y FUNCIONES DE PROBABILIDAD

A menudo el interés recae en la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor particular.

EJEMPLO 3-6

En el ejemplo 3-2, el interés puede centrarse en la probabilidad de que ambas características sean aprobadas, esto es, en la probabilidad de que $X = 2$. El conjunto de todos los resultados para los que $\{X = 2\}$ es un evento formado por un solo resultado (aprobado, aprobado). Por consiguiente, la probabilidad del evento $\{X = 2\}$ es 0.64. Esta conclusión puede escribirse como $P(X = 2) = 0.64$.

De manera similar, el conjunto de todos los resultados para los que $\{X = 1\}$ es un evento compuesto por los resultados (aprobado, inaceptable) e (inaceptable, aprobado). Para el espacio muestral discreto de este ejemplo, la probabilidad de un evento es la suma de las probabilidades de los resultados contenidos en el evento,

$$P(X = 1) = 0.16 + 0.16 = 0.32$$

Asimismo,

$$P(X = 0) = 0.04$$

La tabla 3-4 presenta un resumen de los valores posibles de la variable aleatoria X del ejemplo 3-2, junto con la probabilidad de cada valor (donde los valores $\{0, 1, 2\}$ son los valores posibles de X). Dado que X debe tomar uno de estos valores, la suma de todas las probabilidades es uno.

Nótese que en estos ejemplos la variable aleatoria está claramente definida. A menudo éste es un paso inicial importante en el proceso de determinar una probabilidad.

Definición

El evento que está formado por todos los resultados para los que $X = x$ se denota como $\{X = x\}$, y la probabilidad de este evento como $P(X = x)$.

La **distribución de probabilidad** o **distribución** de una variable aleatoria X es una descripción del conjunto de valores posibles de X (rango de X), junto con la probabilidad asociada con cada uno de estos valores. A menudo la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es el resumen más útil de un experimento aleatorio. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria puede darse de muchas maneras. Para una variable

Tabla 3-4 Probabilidades del ejemplo 3-2

x	0	1	2
$P(X = x)$	0.04	0.32	0.64

aleatoria que puede tomar un número pequeño de valores, lo más simple es proceder como en el ejemplo 3-6, y listar los valores posibles junto con las probabilidades respectivas. En otros casos, es conveniente expresar en términos de una fórmula la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor x.

EJEMPLO 3-7

En el ejemplo 3-6 puede utilizarse una fórmula para describir la distribución de probabilidad de X, de la siguiente manera:

$$P(X = x) = [2!/(x!(2 - x)!)]0.8^x 0.2^{2-x}, \quad x = 0, 1, 2$$

La notación $x!$ está descrita en el apéndice I. Para un entero positivo x, $x!$ es el producto de todos los enteros, desde x hasta uno. Esto es, $x! = x(x-1)(x-2)\ldots 1$. Por ejemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Por otra parte, por definición, $0! = 1$. El lector debe comprobar que las probabilidades obtenidas con el empleo de esta fórmula concuerdan con los resultados que aparecen en la tabla 3-4. En este ejemplo, es más complejo hacer uso de una fórmula que de una tabla; en otros casos, la fórmula es más fácil de emplear. Este tipo de fórmula se desarrolla posteriormente en este capítulo.

EJEMPLO 3-8

Considérese una vez más el ejemplo 3-4. Sea X una variable aleatoria que denota el número de muestras de aire que es necesario analizar para detectar una molécula rara. Supóngase que la probabilidad de que una muestra de aire contenga una molécula rara es 0.01, y que las muestras son independientes. Determínese la distribución de probabilidad de X.

Sean p: una muestra donde está presente la molécula rara, y a: una muestra donde la molécula está ausente. El espacio muestral de este experimento es infinito, y puede ser representado por todas las secuencias posibles que comienzan con una cadena de *aes* y terminan con p. Esto es,

$$s = \{p,\ ap,\ aap,\ aaap,\ aaaap,\ aaaaap, \text{ y así sucesivamente}\}$$

Considérense unos cuantos casos especiales. Se tiene que $P(X = 1) = P(p) = 0.01$. Por otro lado, si se emplea la hipótesis de independencia,

$$P(X = 2) = P(ap) = 0.99(0.01) = 0.0099$$

Una fórmula general es

$$P(X = x) = P(\underbrace{aa\ldots a}_{(x-1)\ aes}p) = 0.99^{x-1}(0.01), \quad \text{para } x = 1, 2, 3, \ldots.$$

La descripción de probabilidades asociadas con X en términos de esta fórmula es el método más sencillo para describir la distribución de X en este ejemplo.

En los ejemplos 3-7 y 3-8, la distribución de X está descrita por una fórmula que expresa la probabilidad como una función de x. Esto es, la distribución de X está especificada por la función $f_X(x) = P(X = x)$. El subíndice de $f_X(x)$ denota la variable aleatoria de interés. El subíndice se omitirá cuando no exista ninguna confusión sobre la probabilidad del resultado. Dado que $f_X(x)$ está definida como una probabilidad, $f_X(x)$ es una función que va del conjunto de valores posibles de la variable aleatoria al intervalo [0, 1].

Definición

La función $f_X(x) = P(X = x)$ que va del conjunto de los valores posibles de la variable aleatoria discreta X al intervalo [0, 1] recibe el nombre de **función de probabilidad**.

Para una variable aleatoria X, $f_X(x)$ satisface las propiedades siguientes:

(1) $f_X(x) = P(X = x)$

(2) $f_X(x) \geq 0$ para toda x

(3) $\sum_x f_X(x) = 1$ (3-1)

En la figura 3-1 se muestra de manera gráfica la función de probabilidad del ejemplo 3-6. La suma de la propiedad (3) se realiza sobre todos los valores del rango de x.

EJEMPLO 3-9

En el ejemplo 3-7, $f_X(x) = [2!/(x!(2-x)!)]0.8^x 0.2^{2-x}$, $x = 0, 1, 2$. Verifíquese que $f_X(x)$ satisface las propiedades de una función de probabilidad.

Es evidente que $f_X(x) \geq 0$. Por otra parte, por sustitución en la fórmula para $f_X(x)$, puede concluirse que

$$f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = 1$$

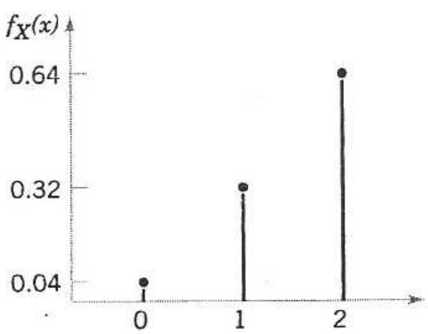


Figura 3-1 Función de probabilidad del ejemplo 3-6.

EJEMPLO 3-10

En el ejemplo 3-8, $f_X(x) = 0.99^{x-1}(0.01)$, $x = 1, 2, \ldots$ Es evidente que $f_X(x) \geq 0$. El hecho de que $f_X(x)$ satisface la propiedad (3) de una función de probabilidad se deja como ejercicio para el lector al final de esta sección.

Las variables aleatorias son tan importantes en los experimentos aleatorios que, en ocasiones, se ignora el espacio muestral original del experimento y el interés se dirige hacia la distribución de probabilidad de la variable aleatoria. Por ejemplo, en el ejemplo 3-1, el análisis efectuado podría haberse centrado exclusivamente en los enteros $\{0, 1, \ldots, 48\}$ en el rango de X. En el ejemplo 3-2, el experimento aleatorio bien puede resumirse en términos de los tres valores posibles de X, los cuales son $\{0, 1, 2\}$. De esta manera, una variable aleatoria puede simplificar la descripción y el análisis de un experimento aleatorio.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-2

3-11. El espacio muestral de un experimento aleatorio es $\{a, b, c, d, e, f\}$, y cada resultado es igualmente probable. Se define una variable aleatoria de la siguiente manera:

resultado	a	b	c	d	e	f
x	0	0	1.5	1.5	2	3

Determine la función de probabilidad de X.

3-12. **Continuación del ejercicio 3-11.** Determine las probabilidades siguientes.

a. $P(X = 1.5)$

b. $P(0.5 < X < 2.7)$

c. $P(X > 3)$

d. $P(0 \leq X < 2)$

e. $P(X = 0 \quad \text{o} \quad X = 2)$

3-13. Un grupo de partes moldeadas se clasifica de acuerdo con su longitud, de la siguiente manera.

longitud redondeada a la décima de milímetro más cercana	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
número de partes	0	3	10	25	40	18	16	2

a. Si la variable aleatoria X es la longitud (redondeada a la décima de milímetro más cercana) de una parte moldeada seleccionada al azar, determine la función de probabilidad de X.

b. ¿Cuál es el valor de $P(X \leq 5.1)$?

c. ¿Cuál es el valor de $P(4.95 < X < 5.35)$?

3-14. Un operador registra el tiempo (redondeado al segundo más cercano) requerido para terminar un ensamble mecánico. Los resultados que obtiene son los siguientes:

segundos	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
número de ensambles	3	5	6	9	12	25	32	15	9	6

Sea la variable aleatoria X el tiempo necesario para terminar un ensamble.

a. Determine la función de probabilidad de X.

b. Determine $P(33 \leq X < 38)$.

c. ¿Qué proporción de los ensambles se terminan de armar en 35 segundos o menos?

3-15. **Continuación del ejercicio 3-14.** Suponga que se registran los tiempos necesarios para armar dos piezas. Determine el rango de cada una de las siguientes variables aleatorias.

a. El tiempo total de armado de dos piezas.

b. El tiempo promedio de armado de dos piezas.

c. La diferencia en el tiempo de armado de dos piezas.

d. El mayor tiempo de armando de las dos piezas.

3-16. Un estudio de mercadotecnia estima que un nuevo instrumento para el análisis de muestras de suelo tendrá mucho, poco o ningún éxito, con probabilidades 0.3, 0.6 y 0.1, respectivamente. Las ganancias anuales asociadas con un producto muy exitoso, poco exitoso o no exitoso son 10 millones, cinco millones y un millón de dólares, respectivamente. Defínase la variable aleatoria X como la ganancia anual del producto. Determine la función de probabilidad de X.

3-17. **Continuación del ejercicio 3-16.** Suponga que el interés se centra en las ganancias de tres años. Determine el rango de cada una de las siguientes variables aleatorias.

a. Total de tres años de ganancias.

b. Promedio de tres años de ganancias.

c. Máximo de tres años de ganancias

d. Diferencia entre las ganancias anuales más grande y más pequeña.

Verifique que las funciones siguientes son funciones de probabilidad, y calculelasprobabilidades pedidas.

3-18.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

a. $P(X \leq 2)$

b. $P(X > -2)$

c. $P(-1 \leq X \leq 1)$

d. $P(X \leq -1 \quad \text{o} \quad X = 2)$

3-19. $f(x) = (8/7)(1/2)^x, \quad x = 1, 2, 3$

a. $P(X \leq 1)$

b. $P(X > 1)$

3-20. $f(x) = (3/4)(1/4)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

a. $P(X = 2)$

b. $P(X \leq 2)$

c. $P(X > 2)$

d. $P(X \geq 1)$

3-21. En el ejemplo 3-8, suponga que la probabilidad de que una muestra de aire contenga una molécula rara es 0.001. Calcule la probabilidad de que $X = 3$.

3-22. Una persona pide prestado un llavero con cinco llaves, y no sabe cuál es la que abre un candado. Por tanto, intenta con cada llave hasta que consigue abrirlo. Sea la variable aleatoria X el número de intentos necesarios para abrir el candado. Determine la función de probabilidad de X.

a. ¿Cuál es el valor de $P(X \leq 1)$?

b. ¿Cuál es el valor de $P(X = 5)$?

c. ¿Cuál es el valor de $P(X \leq 3)$?

3-23. Un sistema de inspección óptica es capaz de distinguir cuatro partes distintas. La probabilidad de clasificar de manera correcta cualquier parte es 0.98. Suponga que se inspeccionan tres partes y que la clasificación de éstas es independiente. Sea la variable aleatoria X el número de partes clasificadas correctamente. Determine la función de probabilidad de X.

3-24. Demuestre, mediante el empleo de una serie infinita, que la función $f_X(x)$ del ejemplo 3-10 satisface las propiedades de una función de probabilidad.

3-3 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

EJEMPLO 3-11

Supóngase que en el ejemplo 3-8 el interés recae en la probabilidad de encontrar una molécula rara en tres muestras o menos. Esta pregunta puede expresarse como $P(X \leq 3)$.

El evento en que $\{X \leq 3\}$ es la unión de los eventos $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$ y $\{X = 3\}$. Al utilizar la notación del ejemplo 3-8, el evento en que $\{X = 1\}$ está formado por un solo resultado p, el evento en que $\{X = 2\}$ está formado sólo por el resultado ap, y el evento en que $\{X = 3\}$ por el resultado aap. Es claro que estos eventos son mutuamente excluyentes. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0.01 + 0.99(0.01) + 0.99^2(0.01) \\ &= 0.0297 \end{aligned}$$

Para este ejemplo, existe una fórmula general,

$$P(X \leq x) = 1 - 0.99^x$$

Esta expresión también puede emplearse para determinar

$$\begin{aligned}P(X = 14) &= P(X \leq 14) - P(X \leq 13)\\ &= (1 - 0.99^{14}) - (1 - 0,99^{13})\\ &= 0.99^{13} - 0.99^{14}\\ &= 0.99^{13}(0.01)\end{aligned}$$

El ejemplo 3-11 ilustra el hecho de que en ocasiones es útil poder expresar probabilidades acumuladas, tales como $P(X \leq x)$, en términos de una fórmula. Por otra parte, el mismo ejemplo muestra que una fórmula para probabilidades acumuladas puede emplearse para encontrar la función de probabilidad de una variable aleatoria. En consecuencia, el uso de probabilidades acumuladas es una alternativa para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Una función que proporciona probabilidades acumuladas tiene un gran valor.

En general, para cualquier variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, los eventos $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots, \{X = x_n\}$ son mutuamente excluyentes. Por consiguiente, $P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$.

Definición

La **función de distribución acumulada** de una variable aleatoria discreta X, denotada por $F_X(x)$, es

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Para una variable aleatoria discreta X, $F_X(x)$ satisface las propiedades siguientes.

(1) $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$

(2) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

(3) Si $x \leq y$, entonces $F_X(x) \leq F_X(y)$ (3-2)

Al igual que la función de probabilidad, la función de distribución acumulada proporciona probabilidades. Nótese que incluso si la variable aleatoria X puede tomar sólo valores enteros, la función de distribución acumulada puede definirse para valores que no son enteros. En el ejemplo 3-11, $F(1.5) = P(X \leq 1.5) = P(X = 1) = 0.01$. Las propiedades (1) y (2) de una función de distribución acumulada se desprenden de inmediato de la definición. La propiedad (3) es consecuencia del hecho de que si $x \leq y$, entonces el evento $\{X \leq x\}$ está contenido en el evento $\{X \leq y\}$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo emplear la función de distribución acumulada para determinar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

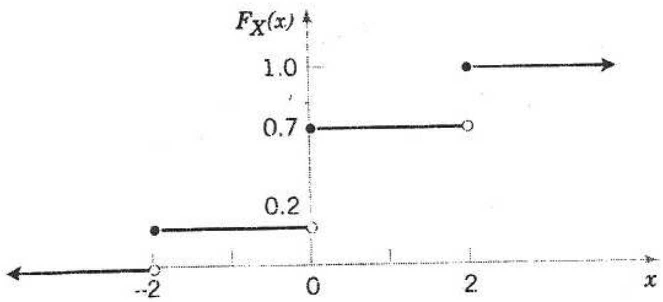


Figura 3-2 Función de distribución acumulada del ejemplo 3-12.

EJEMPLO 3-12

Supóngase que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.2 & -2 \leq x < 0 \\ 0.7 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Determine la función de probabilidad de X.

La figura 3-2 presenta una gráfica de $F_X(x)$. De la gráfica, los únicos puntos que tienen una probabilidad distinta de cero son -2, 0 y 2. Ya que $P(X \leq x) = 0$ para cualquier valor de x menor que -2, $f_X(-2) = 0.2$. De manera similar,

$$f_X(0) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$

y

$$f_X(2) = 1.0 - 0.7 = 0.3$$

EJEMPLO 3-13

En el ejemplo 2-26 la producción diaria de 850 partes manufacturadas contiene 50 que no cumplen con los requerimientos del cliente. Del lote se escogen dos partes al azar, sin remplazo. Sea la variable aleatoria X el número de partes de la muestra que no cumplen con los requerimientos. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

La pregunta puede contestarse al determinar primero la función de probabilidad de X.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= (800/850)(799/849) = 0.886 \\ P(X = 1) &= 2(800/850)(50/849) = 0.111 \\ P(X = 2) &= (50/850)(49/849) = 0.003 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} F_X(0) &= P(X \leq 0) = 0.886 \\ F_X(1) &= P(X \leq 1) = 0.886 + 0.111 = 0.997 \\ F_X(2) &= P(X \leq 2) = 1 \end{aligned}$$

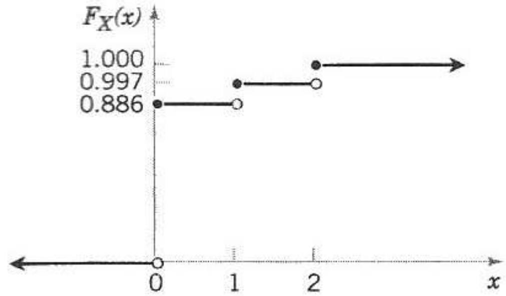


Figura 3-3 Función de distribución acumulada del ejemplo 3-13.

La figura 3-3 muestra la gráfica de la función de distribución acumulada de este ejemplo. Nótese que $F_X(x)$ está definida para toda x, desde $-\infty < x < \infty$, y no sólo para 0, 1 y 2.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-3

3-25. **Continuación del ejercicio 3-11.** Determine la función de distribución acumulada de la variable aleatoria del ejercicio 3-11.

3-26. **Continuación del ejercicio 3-13.** Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria del ejercicio 3-13; asimismo, calcule las probabilidades siguientes:

a. $P(X \leq 5.25)$
b. $P(X \leq 5.2)$
c. $P(5.1 < X \leq 5.5)$
d. $P(X > 4.9)$

3-27. **Continuación del ejercicio 3-14.** Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria del ejercicio 3-14; también calcule las probabilidades siguientes:

a. $P(X < 32.5)$
b. $P(X \leq 32)$
c. $P(X > 32)$
d. $P(33 < X \leq 38)$

3-28. **Continuación del ejercicio 3-18.** Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria del ejercicio 3-18.

3-29. **Continuación del ejercicio 3-19.** Determine la función de distribución acumulada para la variable aleatoria del ejercicio 3-19.

Compruebe que las siguientes funciones son funciones de distribución acumulada, y calcule la función de probabilidad y las probabilidades pedidas.

3-30.
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.5 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

a. $P(X \leq 3)$

b. $P(X \leq 2)$

c. $P(1 \leq X \leq 2)$

d. $P(X > 2)$

3-31.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -0.1 \\ 0.25 & -0.1 \leq x < 0.3 \\ 0.75 & 0.3 \leq x < 0.5 \\ 1 & 0.5 \leq x \end{cases}$$

a. $P(X \leq 0.5)$

b. $P(X \leq 0.4)$

c. $P(0.4 \leq X \leq 0.6)$

d. $P(X < 0)$

e. $P(0 \leq X < 0.1)$

f. $P(-0.1 < X < 0.1)$

3-32. El espesor de un entablado de madera (en pulgadas) que algún cliente ordena, es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de distribución acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1/8 \\ 0.2 & 1/8 \leq x < 1/4 \\ 0.9 & 1/4 \leq x < 3/8 \\ 1 & 3/8 \leq x \end{cases}$$

Determine las probabilidades siguientes:

a. $P(X \leq 1/8)$

b. $P(X \leq 1/4)$

c. $P(X \leq 5/16)$

d. $P(X > 1/4)$

e. $P(X \leq 1/2)$

3-4 VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Si X es una variable aleatoria, y el experimento aleatorio que determina el valor de X se repite muchas veces, entonces se obtiene una secuencia de valores para X. Puede emplearse un resumen de estos valores, tal como el promedio (media), para identificar el valor central de la variable aleatoria.

La función de probabilidad de X puede interpretarse como la proporción de ensayos en los que $X = x$. En consecuencia, en realidad no es necesario realizar el experimento muchas veces con la finalidad de determinar el valor medio de X. La media de X puede calcularse

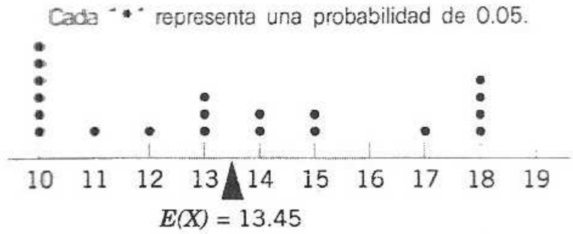


Figura 3-4 La media de X del ejemplo 3-14 como centro de masa.

como el promedio ponderado de los valores posibles de X, asignando al resultado x un factor de ponderación $f_X(x) = P(X = x)$.

Definición

La **media** o **valor esperado** de una variable aleatoria discreta X, denotada por μ_X o $E(X)$, es

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x f_X(x) \qquad (3\text{-}3)$$

La media de X puede interpretarse como el centro de la masa del rango de los valores de X. Esto es, si se coloca una masa igual a $f_X(x)$ en cada punto x de la recta real, entonces $E(X)$ es el punto donde la recta queda en equilibrio. Por consiguiente, el término *función de probabilidad* puede interpretarse mediante esta analogía con la mecánica.

EJEMPLO 3-14

Considérese la siguiente distribución de una variable aleatoria X.

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f_X(x)$	0.3	0.05	0.05	0.15	0.1	0.1	0	0.05	0.2	0

El rango de X aparece en la figura 3-4, y la función de probabilidad aparece como masas sobre la recta de los reales. La media, $\mu_X = E(X)$, está indicada como el punto de equilibrio de la recta.

EJEMPLO 3-15

En los ejemplos 2-26 y 3-13, la producción diaria de 850 partes manufacturadas contiene 50 que no cumplen con los requerimientos del cliente. Del lote se toman dos al azar, sin remplazo. Sea la variable aleatoria X el número de partes en la muestra que no cumplen con los requerimientos. La función de probabilidad de X aparece en el ejemplo 3-13.

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.886	0.111	0.003

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mu_X = E(X) &= 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) \\ &= 0(0.886) + 1(0.111) + 2(0.003) \\ &= 0.117\end{aligned}$$

Nótese que X nunca toma el valor 0.117, pero el promedio ponderado de los valores posibles de X es 0.117.

EJEMPLO 3-16

En los ejemplos 3-7 y 3-9, $f_x(x) = \frac{2!}{x!(2-x)!}0.8^x 0.2^{2-x}$, para $x = 0, 1, 2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mu_X = E(X) &= 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) \\ &= 0 + 1(0.32) + 2(0.64) \\ &= 1.6\end{aligned}$$

Nótese que X nunca toma el valor 1.60, pero el promedio ponderado de los valores posibles de X es 1.60.

EJEMPLO 3-17

Se supone que la cobertura de una prueba en el proceso de verificación de un semiconductor tiene una eficacia del 80%. Esto es, la probabilidad de que un chip defectuoso no pase la prueba es 0.8. Se someten a prueba tres chip. Supóngase que la falla en cada chip defectuoso es independiente de las que aparezcan en otras pruebas. Sea la variable aleatoria X el número de chips defectuosos que no pasan la prueba. ¿Cuál es el valor esperado de X?

Para hallar $E(X)$ primero es necesario encontrar la función de probabilidad de X. La tabla siguiente presenta los resultados posibles de este experimento junto con los valores correspondientes de X. La probabilidad de cada resultado se obtiene con ayuda de la hipótesis de independencia. En la tabla, p indica que el chip pasa la prueba, y f, que el chip no pasa la prueba. Por tanto, el resultado donde el primer chip pasa la prueba y los demás no, se denota por pff. Por otra parte, $P(pff) = 0.2 \times 0.8 \times 0.8 = 0.128$.

Resultados	x	**Probabilidad**
(fff)	3	0.512
(ffp)	2	0.128
(fpf)	2	0.128
(fpp)	1	0.032
(pff)	2	0.128
(pfp)	1	0.032
(ppf)	1	0.032
(ppp)	0	0.008

La función de probabilidad de X se encuentra a partir de estos resultados.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

Por tanto,

$$E(X) = 0(0.008) + 1(0.096) + 2(0.384) + 3(0.512) = 2.40$$

EJEMPLO 3-18

Se compara el diseño de dos nuevos productos sobre la base de las ganancias esperadas para cada uno de ellos. El departamento de mercadotecnia considera que la ganancia del diseño A puede estimarse, con bastante exactitud, en tres millones de dólares. La ganancia del diseño B es más difícil de evaluar. El departamento de mercadotecnia concluye que existe una probabilidad de 0.3 de que la ganancia del diseño B sea de siete millones de dólares, pero existe una probabilidad de 0.7 de que ésta sea sólo de dos millones. ¿Qué diseño es el que debe preferirse?

Sea X la ganancia del diseño A. Ya que no hay ninguna incertidumbre sobre ésta, entonces puede modelarse la distribución de la variable aleatoria X como tres millones con probabilidad uno. Por consiguiente, $E(X) = 3$ millones.

Sea Y la ganancia del diseño B. El valor esperado de Y en millones de dólares es

$$E(Y) = \$7(0.3) + \$2(0.7) = \$3.5$$

Dado que $E(Y)$ es mayor que $E(X)$, debe preferirse el diseño B. Sin embargo, la variabilidad del resultado del diseño B es mucho mayor, y la probabilidad de que A genere más ganancias es 0.7. Con este argumento, quizá otras personas prefieran el diseño A.

El ejemplo 3.18 ilustra que, además de la media de X, a menudo el interés también recae en considerar la variabilidad en el proceso de decisión. En consecuencia, es útil resumir la magnitud de la **dispersión** o **variabilidad** en los valores de X obtenidos a partir de ensayos repetidos de un experimento aleatorio.

Considérese la variable aleatoria X con la siguiente distribución:

x	18	20	22
$f(x)$	0.2	0.6	0.2

$$E(X) = 18(0.2) + 20(0.6) + 22(0.2) = 20$$

Ahora considérese la distribución de la variable aleatoria Y.

y	0	15	25	40
$f(y)$	0.2	0.3	0.3	0.2

$$E(Y) = 0(0.2) + 15(0.3) + 25(0.3) + 40(0.2) = 20$$

Aunque X e Y tienen los mismos valores esperados, la distribución de Y es más variable. Los valores de Y difieren de $E(Y)$ mucho más que los de X con respecto a $E(X)$. Estas diferencias en las distribuciones de las dos variables aleatorias pueden resumirse al considerar una medida de variabilidad.

Para X, el cuadrado de la diferencia de cada valor posible con respecto a $E(X)$ es

$(x - 20)^2$	4	0	4
probabilidad	0.2	0.6	0.2

Para Y, el cuadrado de la diferencia de cada valor posible con respecto a $E(Y)$ es

$(y - 20)^2$	400	25	25	400
probabilidad	0.2	0.3	0.3	0.2

Puede calcularse un promedio ponderado de los cuadrados de las diferencias con respecto a la media, si se emplea la probabilidad asignada a cada valor como factor de ponderación. De la tabla anterior, el promedio ponderado de los cuadrados de las diferencias con respecto a la media es

$$E(X - 20)^2 = 4(0.2) + 0(0.6) + 4(0.2) = 1.6$$

y

$$E(Y - 20)^2 = 400(0.2) + 25(0.3) + 25(0.3) + 400(0.2) = 175$$

El promedio de los cuadrados de las diferencias con respecto a la media es mucho mayor para Y que para X. Este resultado concuerda con el hecho de que la distribución de Y está más dispersa que la distribución de X.

Definición

Supóngase que la media de X es μ_X y que la función de probabilidad de X es $f_X(x)$. La **varianza de una variable aleatoria** X, denotada por σ_X^2 o $V(X)$, es

$$\sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x) \tag{3-4}$$

La varianza de una variable aleatoria es similar a la varianza muestral utilizada en el capítulo 1 para describir la dispersión en los datos de una muestra. La varianza de una variable aleatoria se calcula ponderando el cuadrado de cada desviación con respecto a la media, con la probabilidad asociada con la desviación. La probabilidad asociada con una desviación representa la proporción de un número grande de repeticiones del experimento aleatorio en los que se obtiene dicha desviación. La pregunta que puede surgir en este momento es por qué utilizar los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media en el cálculo de σ_X^2 y no $E(X - \mu_X)$. Resulta que, para cualquier variable aleatoria, $E(X - \mu_X) = 0$. El lector puede verificar este hecho en cualquiera de las variables aleatorias del ejemplo 3-18.

Una medida de variabilidad que siempre es cero no proporciona información alguna. Por esta razón, la varianza de X se define en términos del cuadrado de la diferencia $(X - \mu_X)^2$.

Nótese que como la desviación de cada valor de X con respecto a μ_X se eleva al cuadrado, para cualquier variable aleatoria X se tiene que

$$V(X) \geq 0$$

¿Para qué tipo de variable aleatoria $V(X)$ es cero? Si X toma sólo un valor constante, por ejemplo c, con probabilidad uno, entonces $E(X) = c$ y $\sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = (c - c)^2 = 0$.

EJEMPLO 3-19

En el ejemplo 3-18,

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= (7 - 3.5)^2(0.3) + (2 - 3.5)^2(0.7)\\ &= 5.25 \text{ millones de dólares cuadrados}\end{aligned}$$

Ya que las unidades de las variables de este ejemplo son millones de dólares, y dado que la varianza de una variable aleatoria eleva al cuadrado las desviaciones con respecto a la media, las unidades de $\sigma_Y{}^2$ son millones de dólares al cuadrado. La interpretación de estas unidades es difícil.

Otra alternativa para medir la variabilidad, que con frecuencia es más fácil de interpretar, es la siguiente.

Definición

La **desviación estándar de una variable aleatoria** X, denotada por σ_X, es la raíz cuadrada positiva de σ_X^2.

Las unidades de la desviación estándar son idénticas a las de la variable aleatoria X. Asimismo, la desviación estándar de una variable aleatoria difiere de la desviación estándar de una muestra de datos debido al promedio ponderado utilizado para calcular la primera.

EJEMPLO 3-20

En los ejemplos 3-18 y 3-19, $\sigma_Y = 2.29$. Ya que las unidades de la desviación estándar son iguales a las de la variable aleatoria, la desviación estándar es más fácil de interpretar. En este ejemplo, los resultados pueden resumirse como "la desviación promedio de Y con respecto a su media es 2.29 millones de dólares".

EJEMPLO 3-21

En la comunicación digital de bits, la tasa de error es una importante consideración de diseño. Esto es, los bits cero que deben ser uno y viceversa, son bits recibidos con error.

Sea la variable aleatoria X el número de bits recibidos correctamente entre errores. Un valor razonable para la media de X, sin hacer uso de códigos de corrección de error, es 10^6. ¿Qué implicación tiene el hecho de que σ_X sea tan grande como 10^6?

Una desviación estándar grande implica que los errores pueden presentarse en rachas que afectan a varios bits consecutivos. Si varios de estos bits son erróneos, entonces existen cero bits correctos entre ellos. Entonces una desviación estándar grande puede obtenerse a partir de varios bits erróneos consecutivos, seguidos por intervalos grandes de transmisión libre de errores.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-4

3-33. Se evalúa el acabado superficial de 40 muestras de cinta magnética, y se obtienen los resultados siguientes:

número de defectos	0	1	2	3	4	5
número de muestras	18	12	7	2	1	0

Determine la media y la varianza del número de defectos por muestra de cinta.

3-34. En un proceso manufactura, se mide (en milímetros) el diámetro interno de 100 anillos para pistón. Los resultados son los siguientes.

diámetro interno	69.85	69.90	69.95	70.00	70.05	70.10	70.15
número de anillos	4	13	19	30	24	5	5

Sea X el diámetro interno de los anillos para pistón de este proceso. Determine la media y la varianza de X.

3-35. Se mide la longitud de las terminales de varios componentes electrónicos (a la décima de milímetro más cercana), y se obtienen los resultados siguientes:

longitud	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
número de terminales	5	8	10	22	28	16	9

Determine la media y la varianza de la longitud de las terminales.

3-36. Si el rango de X es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $P(X = x) = 0.2$, determine la media y la varianza de la variable aleatoria.

3-37. **Continuación del ejercicio 3-11.** Determine la media y la varianza de la variable aleatoria del ejercicio 3-11.

3-38. **Continuación del ejercicio 3-13.** Determine la media y la varianza de la variable aleatoria del ejercicio 3-13.

3-39. **Continuación del ejercicio 3-14.** Determine la media y la varianza de la variable aleatoria del ejercicio 3-14.

3-40. **Continuación del ejercicio 3-16.** Determine la media y la varianza de la variable aleatoria del ejercicio 3-16.

3-41. **Continuación del ejercicio 3-18.** Determine la media y la varianza de la variable aleatoria del ejercicio 3-18.

3-42. **Continuación del ejercicio 3-19.** Determine la media y la varianza de la variable aleatoria del ejercicio 3-19.

3-43. Las muestras de cierta materia prima se clasifican de acuerdo con su contenido de humedad e impurezas, redondeado éste al porcentaje más cercano. A continuación se presentan los resultados obtenidos con 80 muestras.

		contenido de humedad	
		3%	4%
impurezas	1%	5	14
	2%	57	4

a. Determine la media y la varianza del contenido de humedad de estas muestras.

b. Calcule la media y la varianza del contenido de impurezas de estas muestras.

3-44. **Continuación del ejercicio 3-43.** Las muestras que tienen un 4% de humedad necesitan un calentamiento adicional durante su procesamiento, y las que tienen niveles de impureza de 2% requieren un filtrado adicional. La tabla siguiente contiene los costos adicionales asociados con estas operaciones extras.

		contenido de humedad	
		3%	4%
impurezas	1%	\$0	\$10
	2%	\$70	\$100

Determine la media y la varianza de los costos adicionales para las 80 muestras.

3-45. El rango de la variable aleatoria X es $[0, 1, 2, 3, x]$, donde x es una incógnita. Si cada valor es igualmente probable y la media de X es 6, calcule x.

3-5 DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

Es posible modelar los resultados de muchos sistemas físicos con experimentos aleatorios y con variables aleatorias idénticos o similares. Puede analizarse la distribución de las variables aleatorias que aparecen en cada uno de estos sistemas comunes, y es factible utilizar los resultados del análisis en aplicaciones y ejemplos diferentes. El tema de este capítulo es el análisis de varios experimentos aleatorios y variables aleatorias discretas que aparecen con frecuencia en las aplicaciones. A menudo se omitirá un estudio del espacio muestral del experimento aleatorio, y se describirá directamente la distribución de una variable aleatoria en particular.

La variable aleatoria discreta más sencilla es aquella que toma sólo un número finito de valores posibles, cada uno con la misma probabilidad. Con frecuencia, el interés recae en una variable aleatoria X que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con la misma probabilidad $1/n$.

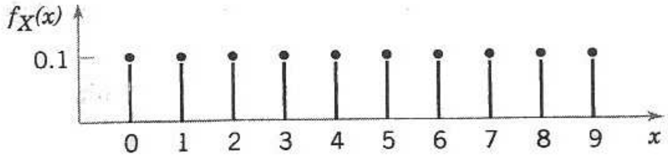


Figura 3-5 Función de probabilidad para la variable aleatoria discreta uniforme del ejemplo 3-22.

Definición

Una variable aleatoria X es una **variable aleatoria discreta uniforme** si cada uno de los n valores que están en el rango de ésta, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tiene la misma probabilidad. Entonces,

$$f_X(x_i) = 1/n$$

EJEMPLO 3-22

La probabilidad de que el primer dígito del número de serie de una pieza sea uno de los números desde 0 hasta 9, es la misma. Si se toma una pieza al azar de un lote muy grande, y X es el primer dígito del número de serie, entonces X tiene una distribución discreta uniforme con una probabilidad 0.1 para cada valor de $R = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Esto es,

$$f_X(x) = 0.1$$

para cada valor de R. La figura 3-5 presenta la función de probabilidad de X.

Supóngase que el rango de una variable aleatoria discreta X está compuesto por los enteros consecutivos $a, a+1, a+2, \ldots, b$, con $a \leq b$. El rango de X contiene $b - a + 1$ valores, cada uno con probabilidad $1/(b - a + 1)$. Entonces,

$$\mu_X = \sum_{k=a}^{b} k\left(\frac{1}{b-a+1}\right) = \frac{b(b+1)-(a-1)a}{2}\left(\frac{1}{b-a+1}\right) = \frac{b+a}{2}$$

Supóngase que X es una variable aleatoria discreta uniforme sobre los enteros consecutivos $a, a+1, a+2, \ldots, b$, con $a \leq b$. La media de X es

$$\mu_X = E(X) = (b+a)/2$$

La desviación estándar de X es

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}} \tag{3-5}$$

La deducción de la expresión anterior se deja como ejercicio para el lector.

EJEMPLO 3-23

En el ejemplo 3-1, supóngase que el número de líneas de voz que están ocupadas en un determinado momento, es una variable aleatoria discreta uniforme X. Entonces,

$$E(X) = (0 + 48)/2 = 24$$

y

$$\sigma_X = \{[(48 - 0 + 1)^2 - 1]/12\}^{1/2} = 14.14$$

Las fórmulas de la ecuación 3-5 son mucho más útiles de lo que parecen. Si todos los valores del rango de la variable aleatoria X se multiplican por una constante (sin cambiar ninguna de las probabilidades), entonces la media y la desviación estándar de X quedan multiplicadas por la misma constante. (Como ejercicio, se deja al lector verificar este resultado.) Dado que la varianza de una variable aleatoria es el cuadrado de la desviación estándar, la varianza de X queda multiplicada por el cuadrado de la constante. En el capítulo 5 se presentan más resultados generales de este tipo.

EJEMPLO 3-24

En el ejemplo 3-1, sea la variable aleatoria Y la proporción de las 48 líneas de voz que están ocupadas en un determinado momento. Recuérdese que pueden estar en uso desde 0 hasta 48 líneas. Sea X el número de líneas que están ocupadas en un momento en particular. Entonces, $Y = X/48$. Por consiguiente,

$$E(Y) = E(X)/48 = 0.5$$

y

$$V(Y) = V(X)/48^2 = 0.087$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-5

3-46. La variable aleatoria X tiene una distribución discreta uniforme sobre los enteros $91 \leq x \leq 100$. Determine la media y la varianza de X.

3-47. La variable aleatoria X tiene una distribución discreta uniforme sobre los enteros $1 \leq x \leq 4$. Calcule la media y la varianza de X.

3-48. Sea X una variable aleatoria discreta; los valores que puede tomar son 1/8, 1/4 o 3/8, cada uno con la misma probabilidad. Determine la media y la varianza de X.

3-49. En un proceso de recubrimiento se toman varias mediciones del espesor, hasta la centésima de milímetro más cercana. Las mediciones están distribuidas de manera uniforme, con valores 0.15, 0.16, 0.17, 0.18 y 0.19. Para este proceso, calcule la media y la varianza del espesor del recubrimiento.

3-50. Se mide la longitud de varias placas de vidrio, hasta la décima de milímetro más cercana. Las longitudes están distribuidas de manera uniforme, con valores que están espaciados una décima de milímetro comenzando en 590.0 y continuando hasta 590.9. Calcule la media y la varianza de las longitudes.

3-51. Suponga que X tiene una distribución discreta uniforme sobre los enteros desde 0 hasta 9. Determine la media, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria $Y = 5X$, y compare los resultados con los que se obtienen para X.

3-52. Demuestre que para una variable aleatoria discreta X, si cada uno de los valores del rango de X se multiplica por una constante c, entonces el efecto es multiplicar la media de X por c y la varianza de X por c^2. Esto es, demuestre que $E(cX) = cE(X)$ y $V(cX) = c^2V(X)$.

3-6 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Considérense los siguientes experimentos y variables aleatorias.

1. Lanzar una moneda diez veces. Sea X = número de caras obtenidas.
2. Una máquina herramienta desgastada produce 1% de partes defectuosas. Sea X = número de partes defectuosas en las siguientes 25 que se produzcan.
3. La posibilidad de que cada muestra de aire contenga una molécula rara es 10%. Sea X = número de muestras de aire que contienen la molécula rara en las siguientes 18 muestras por analizar.
4. De todos los bits transmitidos por un canal de transmisión digital, el 10% se reciben con error. Sea X = número de bits con error en los siguientes cinco por transmitir.
5. Un examen de opción múltiple contiene diez preguntas, cada una con cuatro opciones, y se pide a una persona que adivine las respuestas. Sea X = número de respuestas contestadas de manera correcta.
6. De los siguientes 20 nacimientos en un hospital, sea X = número de niñas.
7. De todos los pacientes que padecen una enfermedad en particular, el 35% experimenta una mejora con cierto medicamento. Para los siguientes 30 pacientes a los que se les administrará el medicamento, sea X = número de pacientes que experimentan mejoría.

Estos ejemplos dejan entrever la utilidad de un modelo de probabilidad general que incluya estos experimentos como casos particulares.

Cada uno de estos experimentos aleatorios puede considerarse como formado por una serie de ensayos repetidos; 10 lanzamientos de la moneda en el experimento (1), la producción de 25 partes en el experimento (2) y así sucesivamente. En cada caso, la variable aleatoria es el conteo del número de ensayos que cumplen con un criterio específico. Con esto, el resultado de cada ensayo coincide o no con el criterio y X cuenta o no; en consecuencia, cada ensayo puede resumirse como un éxito o un fracaso, respectivamente. Por ejemplo, en el experimento de opción múltiple, para cada una de las preguntas, sólo la opción que es correcta es la que se considera como un éxito. La selección de cualquiera de las otras tres opciones incorrectas da como resultado un ensayo que puede resumirse como un fracaso.

Los términos *éxito* y *fracaso* son sólo etiquetas. También pueden utilizarse para este fin "A" y "B" o "0" y "1". Por desgracia, en ocasiones las etiquetas usuales pueden ser engañosas. En el experimento (2), dado que X es el número de partes defectuosas, la producción de éstas es un éxito.

Un ensayo con sólo dos resultados posibles se emplea tantas veces como bloque básico de un experimento aleatorio, que conviene darle un nombre.

Definición

Un **ensayo de Bernoulli** es un experimento aleatorio que tiene sólo dos resultados posibles, denotados por "éxito" y "fracaso". La probabilidad de un éxito se denota por p.

El espacio muestral de un **ensayo de Bernoulli** puede representarse, de manera conveniente, como {éxito, fracaso}.

A menudo es razonable suponer que los ensayos que forman el experimento aleatorio son *independientes*. Esto implica que el resultado de uno de los ensayos no tiene ningún efecto sobre el resultado que se obtenga en cualquier otro ensayo. En el experimento (2), la hipótesis de ensayos independientes implica que saber que la parte número 5 es defectuosa, no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de que cualquiera de las demás partes sea defectuosa. Asimismo, a menudo es razonable suponer que *la probabilidad de éxito en cada ensayo es constante*. En el experimento de opción múltiple [experimento (5)], si se supone que el sujeto que lleva a cabo la prueba no tiene ningún conocimiento del tema y sólo adivina la respuesta de cada pregunta, entonces puede considerarse que la probabilidad de una respuesta correcta *para cada pregunta* es 1/4.

EJEMPLO 3-25

La posibilidad de recibir de manera errónea un bit transmitido por un canal de transmisión digital, es 0.1. Además, supóngase que los ensayos de transmisión son independientes. Sea X = número de bits recibidos con error en los próximos cuatro que serán transmitidos. Descríbase el espacio muestral de este experimento e indíquese el valor de X en cada resultado. Calcúlese $P(X = 2)$.

En este experimento se indica con E un bit erróneo, y con C un bit sin error, esto es, recibido correctamente. Con esto, el espacio muestral de este experimento puede describirse como una lista de cuatro letras que indican qué bits fueron recibidos con y sin error. Por ejemplo, el resultado *CECE* indica que el segundo y el cuarto bit son erróneos, y los otros dos se recibieron correctamente. Por consiguiente, el espacio muestral es

Resultado	x	**Resultado**	x
CCCC	0	*ECCC*	1
CCCE	1	*ECCE*	2
CCEC	1	*ECEC*	2
CCEE	2	*ECEE*	3
CECC	1	*EECC*	2
CECE	2	*EECE*	3
CEEC	2	*EEEC*	3
CEEE	3	*EEEE*	4

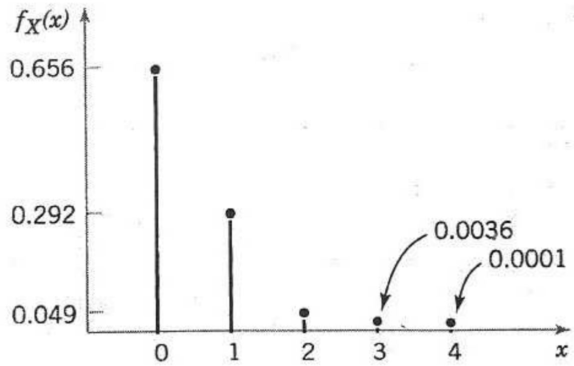


Figura 3-6 Función de probabilidad para la variable aleatoria binomial del ejemplo 3-25.

El evento en que $X = 2$ está formado por seis resultados:

$$\{EECC, ECEC, ECCE, CEEC, CECE, CCEE\}$$

Si se hace uso de la hipótesis de que los ensayos son independientes, entonces la probabilidad de $\{EECC\}$ es

$$P(EECC) = P(E)P(E)P(C)P(C) = (0.1)^2(0.9)^2 = 0.0081$$

Por otra parte, la probabilidad de que se presente cualquiera de los seis resultados mutuamente excluyentes para los que $X = 2$, es la misma. Por consiguiente

$$P(X = 2) = 6(0.0081) = 0.0486$$

En general,

$$P(X = x) = (\text{número de resultados con } x \text{ errores}) \text{ multiplicados por } (0.1)^x(0.9)^{4-x}$$

Para completar una fórmula general de probabilidad, sólo es necesario una expresión para el número de resultados que contienen x errores. Puede construirse un resultado que contiene x errores separando los cuatro ensayos en dos grupos. El tamaño de uno de los grupos es x y contiene los errores, mientras que el tamaño del otro grupo es $n - x$ y está formado por los ensayos donde no hay errores. De la ecuación (I-4) del apéndice I, el número de maneras de separar cuatro objetos en dos grupos, uno de los cuales tiene tamaño x, es $\binom{4}{x} = 4!/[x!(4-x)!]$. Por tanto, en este ejemplo,

$$P(X = x) = \binom{4}{x}(0.1)^x(0.9)^{4-x}$$

Nótese que $\binom{4}{2} = 4!/[2!\,2!] = 6$, resultado que ya se había obtenido con anterioridad. La figura 3-6 presenta la función de probabilidad de X.

El ejemplo 3-25 motiva el resultado siguiente.

Definición

Un experimento aleatorio que consiste de n ensayos repetidos tales que

(1) Los ensayos son independientes,
(2) cada ensayo tiene sólo dos resultados posibles, denominados "éxito" y "fracaso", y
(3) la probabilidad de éxito en cada ensayo, denotada por p, permanece constante

recibe el nombre de *experimento binomial.*

La variable aleatoria X que es igual al número de ensayos donde el resultado es un éxito, tiene una **distribución binomial** con parámetros p y $n = 1, 2, \ldots$

La función de probabilidad de X es

$$f_X(x; p, n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n \qquad (3\text{-}6)$$

La notación $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ está desarrollada en el apéndice I. Al igual que en el ejemplo 3-25, $\binom{n}{x}$ es igual al número de secuencias de diferentes ensayos que contienen x éxitos y $n - x$ fracasos. El número total de secuencias diferentes que contienen x éxitos y $n - x$ fracasos multiplicado por la probabilidad de cada secuencia es igual a $P(X = x)$.

La expresión anterior para la probabilidad es una fórmula muy útil que puede aplicarse en muchos ejemplos. El nombre de la distribución se tomó del *desarrollo binomial.* Para las constantes a y b, el desarrollo binomial es

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Sea p la probabilidad de un éxito en un solo ensayo. Entonces, al emplear el desarrollo binomial con $a = p$ y $b = 1 - p$, se observa que la suma de las probabilidades para una variable aleatoria binomial es uno. Por otra parte, como cada ensayo del experimento se clasifica en dos resultados, {éxito, fracaso}, la distribución se conoce como "bi"-nomial. Una distribución más general, que incluye a la binomial como caso especial, es la distribución multinomial, la cual se estudia en el capítulo 5. En ocasiones, una variable aleatoria binomial con $n = 1$ también recibe el nombre de **variable aleatoria Bernoulli**.

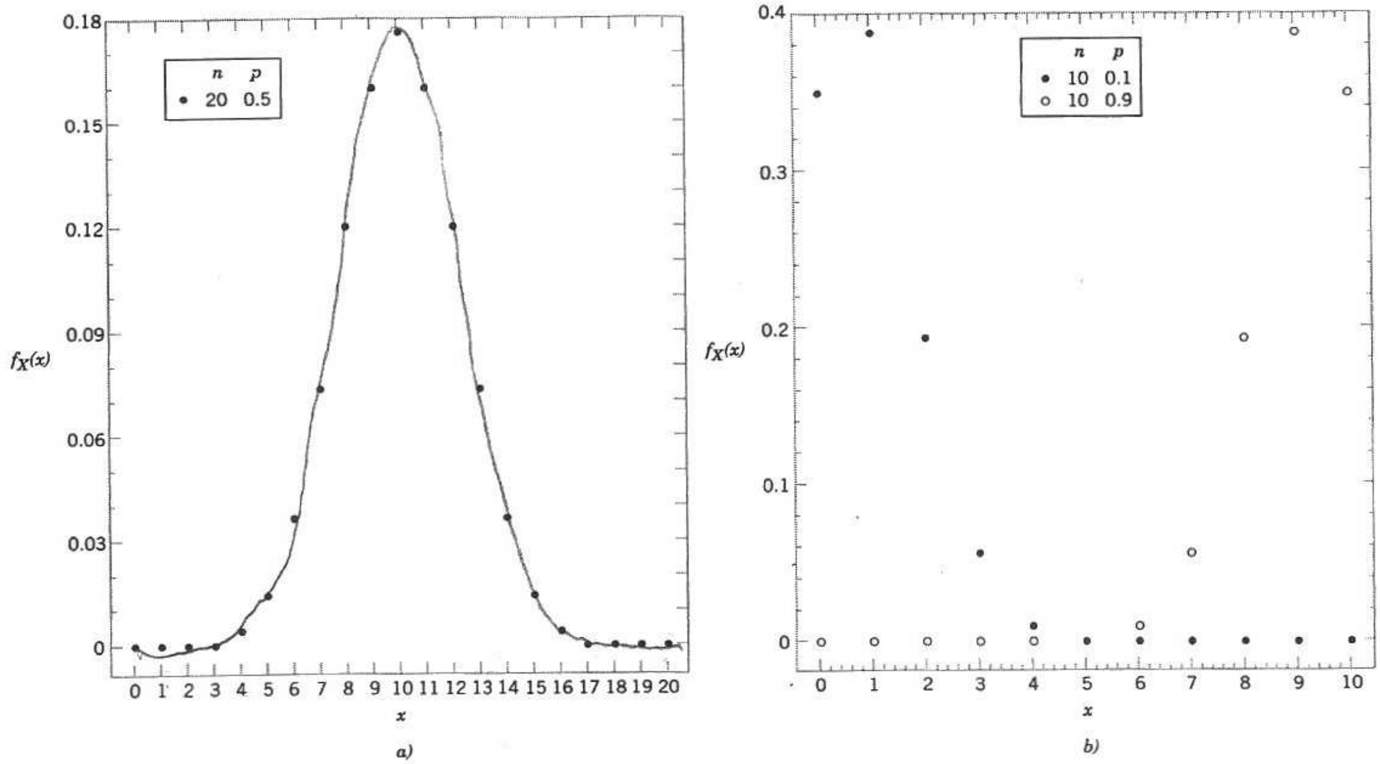


Figura 3-7 Distribuciones binomiales para valores seleccionados de n y p.

La figura 3-7 presenta algunos ejemplos de distribuciones binomiales. Para un valor fijo de n, la distribución se vuelve más simétrica a medida que p aumenta desde 0 hasta 0.5, o disminuye desde 1 hasta 0.5. Para un valor fijo de p, la distribución se vuelve más simétrica a medida que n aumenta.

EJEMPLO 3-26

A continuación se presentan varios ejemplos sobre el coeficiente binomial $\binom{n}{x}$.

$$\binom{10}{3} = 10!/[3!\,7!] = (10 \cdot 9 \cdot 8)/(3 \cdot 2) = 120$$

$$\binom{15}{10} = 15!/[10!\,5!] = (15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11)/(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) = 3003$$

$$\binom{100}{4} = 100!/[4!\,96!] = (100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97)/(4 \cdot 3 \cdot 2) = 3\,921\,225$$

EJEMPLO 3-27

La posibilidad de que cada muestra de aire contenga una molécula rara particular es de 10%. Supóngase que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula. Encuéntrese la probabilidad de que en las 18 muestras siguientes, exactamente dos contengan la molécula rara.

Sea X = el número de muestras de aire que contienen la molécula rara en las 18 muestras siguientes analizadas. Entonces X es una variable aleatoria binomial con $p = 0.1$ y $n = 18$. Por consiguiente,

$$P(X = 2) = \binom{18}{2}(0.1)^2(0.9)^{16}$$

Ahora $\binom{18}{2}$ = (18!/[2! 16!]) = (18(17)/2) = 153. Por tanto,

$$P(X = 2) = 153(0.1)^2(0.9)^{16} = 0.284$$

Encuéntrese la probabilidad de que al menos cuatro muestras contengan la molécula rara.

La probabilidad pedida es

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{18} \binom{18}{x}(0.1)^x(0.9)^{18-x}$$

Sin embargo, es más fácil utilizar el evento complementario,

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{18}{x}(0.1)^x(0.9)^{18-x} \\ &= 1 - [0.150 + 0.300 + 0.284 + 0.168] \\ &= 0.098 \end{aligned}$$

Por otra parte, la probabilidad de que $3 \leq X < 7$ es

$$\begin{aligned} P(3 \leq X < 7) &= \sum_{x=3}^{6} \binom{18}{x}(0.1)^x(0.9)^{18-x} \\ &= 0.168 + 0.070 + 0.022 + 0.005 \\ &= 0.265 \end{aligned}$$

La media y la varianza de una variable aleatoria binomial dependen sólo de los parámetros p y n. Considérese el ejemplo de la máquina herramienta desgastada donde la probabilidad de una parte defectuosa es p, y supóngase que las partes son independientes. Sea X = número de partes defectuosas en la producción de las próximas n partes. La media de X puede obtenerse al considerar los n ensayos Bernoulli del experimento. Para ello, se definen n nuevas variables aleatorias nuevas, $X_1, \ldots, X_n$, tales que

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si el } k\text{-ésimo ensayo es un éxito} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces,

$$X = \sum_{k=1}^{25} X_k$$

Es fácil obtener la media de cada X_k, siendo ésta

$$E(X_k) = 1p + 0(1 - p) = p$$

Con esto, la varianza de cada X_k es

$$\begin{aligned} V(X_k) &= (1 - p)^2 p + (0 - p)^2(1 - p) \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

Puede demostrarse que

$$E\left(\sum_{k=1}^{25} X_k\right) = \sum_{k=1}^{25} E(X_k) = \sum_{k=1}^{25} p = 25p$$

y (como las X_k son independientes)

$$V\left(\sum_{k=1}^{25} X_k\right) = \sum_{k=1}^{25} V(X_k) = \sum_{k=1}^{25} p(1 - p) = 25p(1 - p)$$

Este ejemplo específico puede generalizarse para dar el resultado siguiente.

> Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros p y n, entonces
>
> $$\mu_X = E(X) = np \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = np(1 - p)$$

EJEMPLO 3-28

Si una máquina herramienta desgastada produce 1% de partes defectuosas y las partes producidas son independientes, entonces el número promedio de partes defectuosas en una muestra de 25 es

$$E(X) = 25(0.01) = 0.25$$

La varianza del número de partes defectuosas es

$$V(X) = 25(0.01)(0.99) = 0.2475$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-6

3-53. Para cada uno de los escenarios siguientes, establezca si es razonable o no, utilizar la distribución binomial como modelo de variable aleatoria y por qué. Indique todas las suposiciones que tenga que hacer, según sea el caso.

a. Un proceso produce miles de transductores de temperatura. Sea X el número de transductores que no cumplen con los requisitos de diseño de una muestra de 30 tomada al azar del proceso.

b. De un lote de 50 transductores de temperatura, se toma una muestra de 30 sin remplazo. Sea X el número de transductores de la muestra que no cumplen con los requisitos de diseño.

c. Cuatro componentes electrónicos idénticos están conectados a un controlador que puede conmutar de un componente que falla a otro de los que quedan como repuesto. Sea X el número de componentes que han fallado después de cierto tiempo de operación.

d. Sea X el número de accidentes que ocurren en las carreteras federales de cierto estado durante un mes.

e. Sea X el número de respuestas correctas de un estudiante que resolvió un examen de opción múltiple, en las que pudo eliminar, en algunas preguntas, varias de las opciones porque eran incorrectas, y en otras, todas las opciones incorrectas.

f. Los defectos sobre la superficie de un chip semiconductor aparecen al azar. Sin embargo, sólo el 80% de los defectos pueden detectarse mediante pruebas. Se toma una muestra de 40 chips que tienen un defecto y se someten a prueba. Sea X el número de chips en los que la prueba encuentra un defecto.

g. Considere de nuevo la situación presentada en (f). Suponga ahora que la muestra de 40 chips está formada por chips que tienen uno o cero defectos.

h. En una operación de llenado se intenta llenar paquetes de detergente, de modo que tengan el peso señalado en la publicidad. Sea X el número de paquetes de detergente que pesan menos que lo indicado en la publicidad.

i. Los errores en un canal de comunicación digital se presentan en rachas que afectan de manera severa a varios bits consecutivos. Sea X el número de bits transmitidos erróneamente en el envío de 100 000 bits.

j. Sea X el número de grietas superficiales de una bobina grande de acero galvanizado.

3-54. La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0.5$. Dibuje la función de probabilidad de X.

a. ¿Cuál es el valor más probable de X?

b. ¿Qué valor o valores de X son menos probables?

3-55. La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0.5$. Calcule las probabilidades siguientes

a. $P(X = 5)$

b. $P(X \leq 2)$

c. $P(X \geq 9)$

d. $P(3 \leq X < 5)$

3-56. Dibuje la función de probabilidad de una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0.01$, y haga comentarios sobre la simetría de la distribución.

a. ¿Cuál es el valor más probable de X?

b. ¿Cuál es el valor menos probable de X?

3-57. La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0.01$. Calcule las probabilidades siguientes:

- **a.** $P(X = 5)$
- **b.** $P(X \leq 2)$
- **c.** $P(X \geq 9)$
- **d.** $P(3 \leq X < 5)$

3-58. Determine la función de distribución acumulada de una variable aleatoria binomial con $n = 3$ y $p = 1/2$.

3-59. Determine la función de distribución acumulada de una variable aleatoria binomial con $n = 3$ y $p = 1/4$.

3-60. Un artículo electrónico contiene 40 circuitos integrados. La probabilidad de que cualquier circuito integrado esté defectuoso es 0.01, y los circuitos integrados son independientes. El artículo trabaja sólo si no contiene circuitos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo trabaje?

3-61. Sea X el número de bits recibidos de manera incorrecta en un canal de comunicación digital, y suponga que X es una variable aleatoria binomial con $p = 0.001$. Si se transmiten 1000 bits, calcule lo siguiente.

- **a.** $P(X = 1)$
- **b.** $P(X \geq 1)$
- **c.** $P(X \leq 2)$
- **d.** media y varianza de X

3-62. Las líneas telefónicas del sistema de reservación de una aerolínea, están ocupadas 40% del tiempo. Suponga que los eventos donde las líneas están ocupadas en llamadas sucesivas son independientes. Suponga que se hacen diez llamadas telefónicas al sistema de reservación.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que, al llamar exactamente tres veces, las líneas estén ocupadas?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos en una de las llamadas, las líneas no estén ocupadas?
- **c.** ¿Cuál es el número esperado de llamadas en las que todas las líneas estarán ocupadas?

3-63. En un proceso de producción se examinan lotes de 50 resortes helicoidales para determinar si cumplen con los requerimientos del cliente. El número promedio de resortes helicoidales que no cumplen con los requerimientos es de cinco por lote. Suponga que el número de resortes que no cumplen con los requerimientos en un lote, denotado por X, es una variable aleatoria binomial.

- **a.** ¿Qué valor tienen n y p?
- **b.** Calcule $P(X \leq 2)$.
- **c.** Calcule $P(X \geq 49)$.

3-64. Ejemplo de carta de control estadístico de un proceso. De un proceso se toma cada hora una muestra de 20 partes. Lo común es que el uno por ciento de las partes requieran volver a ser procesadas. Sea X el número de partes de una muestra de 20 que necesitan ser reprocesadas. Se sospecha de un problema en el proceso si X es mayor que su media por más de tres desviaciones estándar.

- **a.** Si el porcentaje de partes que es necesario volver a procesar permanece en 1%, ¿cuál es la probabilidad de que X sea mayor que su media por más de tres desviaciones estándar?

b. Si el porcentaje de partes que es necesario reprocesar aumenta a 4%, ¿cuál es la probabilidad de que X sea mayor que uno?

c. Si el porcentaje de partes que es necesario reprocesar aumenta a 4%, ¿cuál es la probabilidad de que X sea mayor que uno por lo menos en una de las muestras tomadas las próximas cinco horas?

3-65. Dado que no todos los pasajeros de una aerolínea abordan el vuelo para el que han reservado un lugar, la aerolínea vende 125 boletos para un vuelo de 120 pasajeros. La probabilidad de que un pasajero no aborde el vuelo es 0.10, y el comportamiento de los pasajeros es independiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los pasajeros aborden el vuelo?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelo parta vacío?

3-66. Este ejercicio ilustra el impacto que la baja calidad puede tener sobre planes y costos. Un proceso de fabricación tiene 100 pedidos en espera de ser surtidos. Cada pedido necesita un componente que se compra a otro proveedor. Sin embargo, lo común es identificar 2% de estos componentes como defectuosos; por otra parte, puede suponerse que el estado de cada componente es independiente del de los demás.

a. Si el inventario del fabricante es de 100 componentes, ¿cuál es la probabilidad de que se puedan surtir los 100 pedidos sin tener que pedir más componentes?

b. Si el inventario del fabricante es de 102 componentes, ¿cuál es la probabilidad de que se puedan surtir los 100 pedidos sin tener que pedir más componentes?

c. Si el inventario del fabricante es de 105 componentes, ¿cuál es la probabilidad de que se puedan surtir los 100 pedidos sin tener que pedir más componentes?

3-67. Un examen de opción múltiple contiene 25 preguntas, cada una con cuatro respuestas. Suponga que un estudiante sólo adivina las respuestas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante conteste de manera correcta más de 20 preguntas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante conteste de manera correcta menos de cinco preguntas?

3-68. Una persona pasa todas las mañanas a la misma hora por un crucero donde el semáforo está en verde el 20% de las veces. Suponga que cada mañana representa un ensayo independiente.

a. En cinco mañanas consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de que el semáforo esté en verde exactamente un día?

b. En 20 mañanas, ¿cuál es la probabilidad de que el semáforo esté en verde exactamente cuatro días?

c. En 20 mañanas, ¿cuál es la probabilidad de que el semáforo esté en verde más de cuatro días?

3-7 DISTRIBUCIONES GEOMÉTRICA Y BINOMIAL NEGATIVA

3-7.1 Distribución geométrica

Considérese un experimento aleatorio que está muy relacionado con el que se empleó para definir una distribución binomial. De nuevo, supóngase una serie de ensayos Bernoulli independientes con una probabilidad constante de éxito p en cada ensayo. Sin embargo, lugar de tener un número fijo de ensayos, ahora éstos se realizan hasta que se obtiene un éxito. Sea la variable aleatoria X el número de ensayos realizados hasta obtener el primer éxito. En el ejemplo 3-8, se analiza una serie de cilindros de aire, uno tras otro, hasta que se encuentra uno que contenga una molécula rara. En este caso, X es el número de muestras analizadas. En la transmisión de bits, X puede ser el número de bits transmitidos hasta que se presenta un error en la transmisión.

EJEMPLO 3-29

La probabilidad de recibir de manera errónea un bit enviado por un canal de transmisión digital es 0.1. Supóngase que las transmisiones son eventos independientes, y sea la variable aleatoria X el número de bits transmitidos hasta que se presenta el primer error.

Entonces $P(X = 5)$ es la probabilidad de que se transmitan de manera correcta los cuatro primeros bits y que el quinto sea erróneo. Este evento puede denotarse como $\{CCCCE\}$, donde C indica una transmisión correcta del bit. Dado que los ensayos son independientes y la probabilidad de una transmisión correcta es 0.9,

$$P(X = 5) = P(CCCCE) = 0.9^4 0.1 = 0.066$$

Nótese que existe cierta probabilidad de que X sea igual a cualquier entero. Por otra parte, si el primer ensayo es un éxito, entonces $X = 1$. Por consiguiente, el rango de X es $\{1, 2, 3, \ldots\}$, esto es, todos los enteros positivos.

Definición

En una serie de ensayos Bernoulli independientes, con una probabilidad constante p de éxito, sea la variable aleatoria X el número de ensayos realizados hasta la obtención del primer éxito. Entonces X tiene una **distribución geométrica** con parámetro p y

$$f_X(x; p) = (1 - p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots \tag{3-7}$$

La figura 3-8 presenta varios ejemplos de funciones de probabilidad de variables aleatorias geométricas. Nótese que la altura de la línea en x es $(1 - p)$ veces la altura de la línea en $x - 1$. Esto es, las probabilidades disminuyen en una progresión geométrica. La distribución adquiere el nombre que tiene precisamente por esta característica.

EJEMPLO 3-30

La probabilidad de que una muestra de aire contenga una molécula rara es 0.01. Si se supone que las muestras son independientes con respecto a la presencia de la molécula rara, ¿cuál es la probabilidad de que sea necesario analizar exactamente 125 muestras antes de detectar una molécula rara?

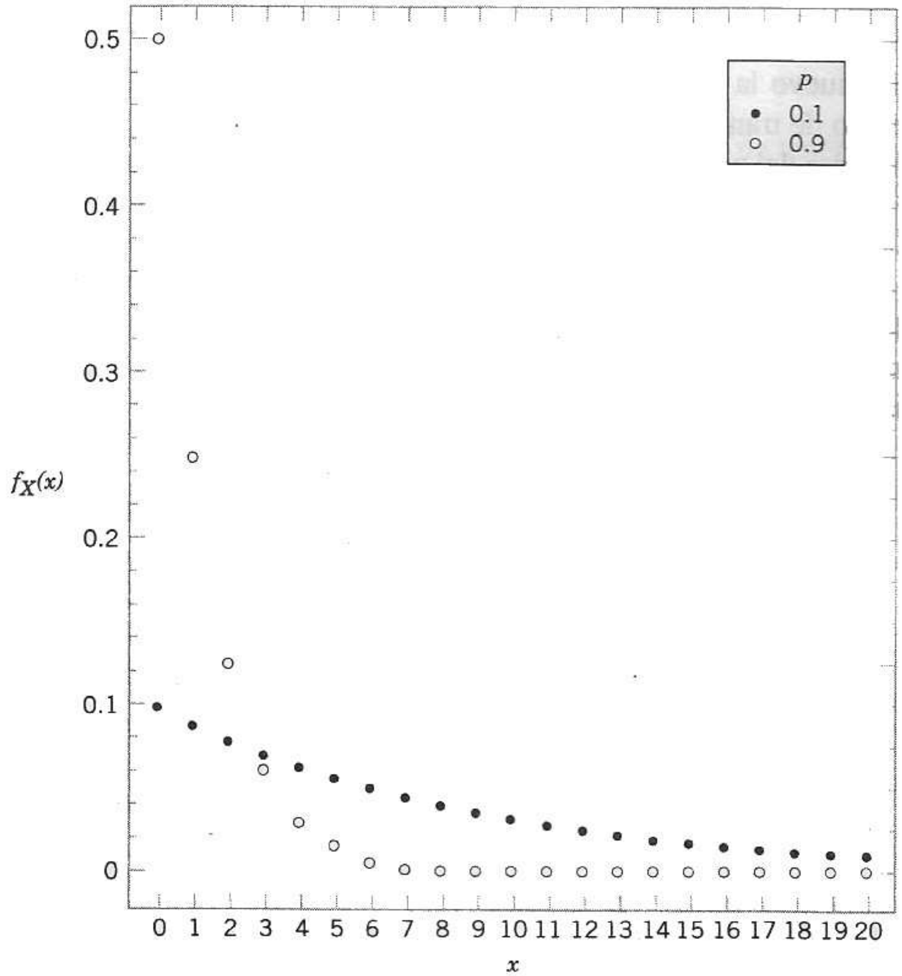


Figura 3-8 Distribuciones geométricas para valores seleccionados del parámetro p.

Sea X el número de muestras analizadas hasta que se detecta la presencia de la molécula rara. Entonces X es una variable aleatoria geométrica con $p = 0.01$. La probabilidad pedida es

$$P(X = 125) = (0.99)^{124}0.01 = 0.0029$$

Se deja como ejercicio para el lector la deducción de la media y la varianza de una variable aleatoria geométrica. Nótese que puede demostrarse que $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p$ es igual a $1/p$. Los resultados son los siguientes.

Si X es una variable aleatoria geométrica con parámetro p, entonces la media y la varianza de X son

$$\mu_X = E(X) = 1/p \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = (1-p)/p^2 \tag{3-8}$$

EJEMPLO 3-31

Considérese de nuevo la transmisión de bits del ejemplo 3-25. En este caso, $p = 0.1$. El número promedio de transmisiones hasta que se presente el primer error es $1/0.1 = 10$. La desviación estándar del número de transmisiones hasta que se presente el primer error es

$$\sigma_X = [(1 - 0.1)/0.1^2]^{1/2} = 9.49$$

Propiedad de la carencia de memoria

Se ha definido una variable aleatoria geométrica como el número de ensayos realizados hasta obtener el primer éxito. Sin embargo, dado que los ensayos son independientes, el conteo del número de éstos hasta que se tiene el primer éxito puede comenzar en cualquier ensayo sin cambiar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria. Por ejemplo, en la transmisión de bits, si se transmiten 100 bits, la probabilidad de que el primer error, después del bit 100, se presente en el bit 106, es la probabilidad de que los próximos seis resultados sean *CCCCCE*. Esta probabilidad es $(0.9)^5(0.1) = 0.059$, que es idéntica a la probabilidad de que el error inicial ocurra en el bit seis.

La suposición para el uso de un modelo geométrico es que el sistema presuntamente no se desgastará. La probabilidad del error permanece constante para todas las transmisiones. En este sentido, se dice que la distribución geométrica carece de memoria. La propiedad de la carencia de memoria será discutida de nuevo en el capítulo 4, dentro del contexto de la variable aleatoria exponencial.

EJEMPLO 3-32

En los ejemplos 3-25 y 3-31 la probabilidad de que la transmisión del bit se haga con error es 0.1. Supóngase que se han transmitido 50 bits. El número promedio de bits transmitidos hasta que se presenta el siguiente error es $1/0.1 = 10$, que es el mismo resultado que se obtiene para el número promedio de bits transmitidos hasta que se presenta el primer error.

3-7.2 Distribución binomial negativa

La **distribución binomial negativa** es una generalización de la distribución geométrica donde la variable aleatoria es el número de ensayos Bernoulli necesarios para obtener r éxitos.

EJEMPLO 3-33

Al igual que en el ejemplo 3-25, supóngase que la probabilidad de recibir de manera errónea un bit enviado por un canal de transmisión digital es 0.1. Supóngase además que las transmisiones son eventos independientes, y sea la variable aleatoria X el número de bits transmitidos hasta que se presenta el cuarto error.

Entonces, X tiene una distribución binomial negativa con $r = 4$. Las probabilidades en las que aparece X pueden calcularse de la siguiente manera. $P(X = 10)$ es la probabilidad de que ocurran exactamente tres errores en los primeros nueve ensayos y que en el décimo se presente el cuarto error. La probabilidad de que ocurran exactamente tres errores en los nueve primeros ensayos está dada por la distribución binomial, y es

$$\binom{9}{3}(0.1)^3(0.9)^6$$

Como los ensayos son independientes, la probabilidad de tener exactamente tres errores en los nueve primeros ensayos y el cuarto en el décimo, es el producto de las probabilidades de estos dos eventos, es decir,

$$\binom{9}{3}(0.1)^3(0.9)^6(0.1) = \binom{9}{3}(0.1)^4(0.9)^6$$

Si se generaliza el razonamiento del ejemplo anterior, entonces se tiene el siguiente resultado.

Definición

En una serie de ensayos Bernoulli independientes, con una probabilidad constante de éxito p, sea la variable aleatoria X el número de ensayos efectuados hasta que se tienen r éxitos. Entonces X tiene una **distribución binomial negativa** con parámetros p y $r = 1, 2, 3, \ldots$, y

$$f_X(x; p, r) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r,$$

para $x = r, \quad r+1, \quad r+2, \ldots$ (3-9)

Dado que se requieren al menos r ensayos para obtener r éxitos, el recorrido de X es desde r hasta ∞. En el caso especial donde $r = 1$, la variable aleatoria binomial negativa se convierte en una variable aleatoria geométrica. En la figura 3-9 se presentan varias distribuciones binomiales negativas.

La propiedad de la carencia de memoria de una variable aleatoria geométrica implica lo siguiente. Sea X el número total de ensayos requeridos para obtener r éxitos. Sean X_1 el número de ensayos extra para obtener el primer éxito, X_2 el número de ensayos extra para obtener el segundo éxito, X_3 el número de ensayos necesarios para obtener el tercer éxito y así sucesivamente. Entonces, el número total de ensayos requeridos para obtener r éxitos es $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$. Pero debido a la propiedad de la carencia de memoria, cada una de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_r$ tiene una distribución geométrica con el mismo valor de p. En consecuencia, la variable aleatoria binomial negativa puede interpretarse como la suma de r variables aleatorias geométricas. La figura 3-10 ilustra este concepto.

Recuérdese que una variable aleatoria binomial representa el conteo del número de éxitos en n ensayos Bernoulli. Esto es, el número total de ensayos está predeterminado, y lo aleatorio es el número de éxitos. Una variable aleatoria binomial negativa es el conteo del número de ensayos necesarios para obtener r éxitos. Esto es, el número de éxitos está pre-

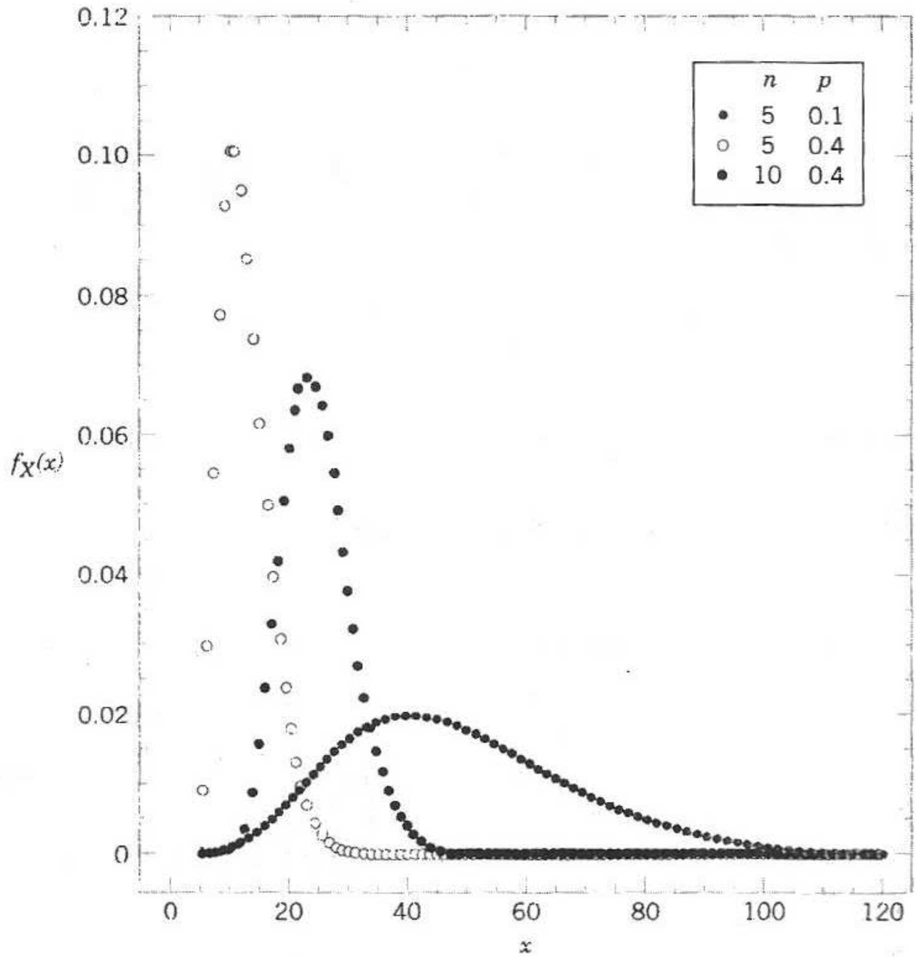


Figura 3-9 Distribuciones binomiales negativas para valores seleccionados de los parámetros r y p.

determinado, y lo aleatorio es el número de ensayos. En este sentido, la variable aleatoria binomial negativa puede considerarse como el opuesto, o negativo, de una variable aleatoria binomial.

La descripción de una variable aleatoria binomial negativa como una suma de variables aleatorias geométricas conduce a los resultados siguientes para la media y la varianza.

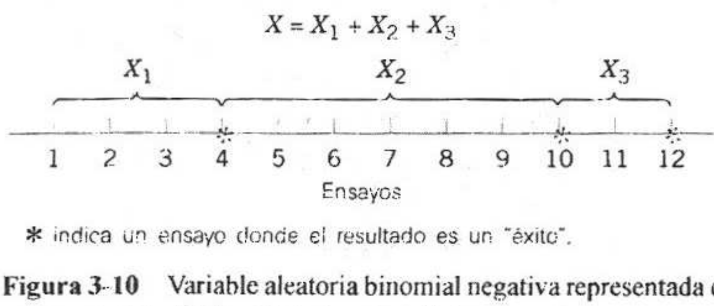


Figura 3-10 Variable aleatoria binomial negativa representada como una suma de variables aleatorias geométricas.

Si X es una variable aleatoria binomial negativa con parámetros p y r, entonces la media y la varianza de X son

$$\mu_X = E(X) = r/p \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = r(1-p)/p^2 \qquad (3\text{-}10)$$

EJEMPLO 3-34

Una aeronave de alto rendimiento contiene tres computadoras idénticas. Sólo una de ellas se utiliza para controlar la nave; las otras dos son reservas que se activan en caso de falla en el sistema primario. Durante una hora de operación, la probabilidad de falla en el computador primario (o en cualquiera de los sistemas de reserva que se encuentre activo) es 0.0005. Si se supone que cada hora representa un ensayo independiente, ¿cuál es el tiempo promedio de falla de las tres computadoras?

Sean X el número de horas transcurridas hasta que fallan los tres sistemas, y X_1, X_2 y X_3 el número de horas de operación antes de que fallen el primero, el segundo y el tercer sistema, respectivamente. Entonces $X = X_1 + X_2 + X_3$. Por otra parte, se supone que las horas comprenden ensayos independientes con probabilidad constante de falla $p = 0.0005$. Asimismo, una computadora de reserva no se ve afectada por el tiempo que ha transcurrido antes de ser activada. Por consiguiente, X tiene una distribución binomial negativa con $p = 0.0005$ y $r = 3$. En consecuencia,

$$E(X) = 3/0.0005 = 6000 \text{ horas}$$

¿Cuál es la probabilidad de que las tres computadoras fallen durante un vuelo de cinco horas?

La probabilidad pedida es $P(X \leq 5)$, y

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.0005^3 + \binom{3}{2}0.0005^3(0.9995) + \binom{4}{2}0.0005^3(0.9995)^2 \\ &= 1.25 \times 10^{-10} + 3.75 \times 10^{-10} + 7.49 \times 10^{-10} \\ &= 1.249 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-7

3-69. Suponga que la variable aleatoria X tiene una distribución geométrica con $p = 0.5$. Calcule las probabilidades siguientes:

a. $P(X = 1)$

b. $P(X = 4)$

c. $P(X = 8)$

d. $P(X \leq 2)$

e. $P(X > 2)$

3-70 Suponga que la variable aleatoria X tiene una distribución geométrica con media 2.5. Calcule las probabilidades siguientes:

a. $P(X = 1)$
b. $P(X = 4)$
c. $P(X = 5)$
d. $P(X \leq 3)$
e. $P(X > 3)$

3-71. La probabilidad de un alineamiento óptico exitoso en el ensamblado de un producto de almacenamiento óptico de datos es 0.8. Suponga que los ensayos son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer alineamiento exitoso requiera exactamente cuatro ensayos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer alineamiento exitoso requiera como máximo cuatro ensayos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer alineamiento exitoso requiera al menos cuatro ensayos?

3-72. Suponga que cada una de las llamadas que hace una persona a una estación de radio muy popular tiene una probabilidad de 0.02 de que la línea no esté ocupada. Suponga que las llamadas son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llamada que entre sea la décima que realiza la persona?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario llamar más de cinco veces para hallar desocupada la línea?
c. ¿Cuál es el número promedio de llamadas que deben hacerse para hallar desocupada la línea?

3-73. **Continuación del ejercicio 3-68.** Recuerde que la posibilidad de encontrar luz verde en el semáforo de un crucero muy concurrido en la mañana es de 20%. Suponga que cada mañana representa un ensayo independiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera mañana en que la luz del semáforo se encuentre en verde sea la cuarta mañana desde el inicio del experimento?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la luz del semáforo no se encuentre en verde durante diez mañanas consecutivas?

3-74. **Continuación del ejercicio 3-64.**

a. Si el porcentaje de partes que es necesario reprocesar permanece en 1%, ¿cuál es la probabilidad de que la décima muestra sea la primera en que X es mayor que uno?
b. Si el porcentaje de partes que es necesario reprocesar aumenta a 4%, ¿cuál es la probabilidad de que la décima muestra sea la primera donde X es mayor que uno?
c. Si el porcentaje de partes que es necesario volver a procesar aumenta a 4%, ¿cuál es el número esperado de ensayos que es necesario realizar hasta que X sea mayor que uno?

3-75. Considere una secuencia de ensayos Bernoulli independientes con $p = 0.2$.

a. ¿Cuál es el número esperado de ensayos que es necesario realizar para obtener el primer éxito?
b. Después de obtener el octavo éxito, ¿cuál es el número esperado de ensayos que deben efectuarse para obtener el noveno éxito?

3-76. Demuestre que la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria binomial negativa es igual a la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria geométrica, cuando $r = 1$. Demuestre que las fórmulas para la media y la varianza de una variable aleatoria binomial negativa son iguales a los resultados correspondientes a la variable aleatoria geométrica, cuando $r = 1$.

3-77. Suponga que X es una variable aleatoria binomial negativa con $p = 0.2$ y $r = 4$. Calcule lo siguiente:

a. la media de X

b. $P(X = 20)$

c. $P(X = 19)$

d. $P(X = 21)$

e. el valor más probable de X

3-78. La probabilidad de que la calibración de un transductor en un instrumento electrónico cumpla con las especificaciones del sistema de medición, es 0.6. Suponga que los intentos de calibración son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran como máximo tres intentos para satisfacer las especificaciones del sistema de medición?

3-79. La escala electrónica de un proceso de llenado automático detiene la línea de producción después de haber detectado tres paquetes con un peso menor que el especificado. Suponga que la probabilidad de llenar un paquete con un peso menor es 0.001 y que cada operación de llenado es independiente.

a. ¿Cuál es el número promedio de operaciones de llenado antes de que se detenga la línea de producción?

b. ¿Cuál es la desviación estándar del número de operaciones de llenado antes de que se detenga la línea de producción?

3-80. Un sistema tolerante a fallas que procesa transacciones para una compañía de servicios financieros, utiliza tres computadoras por separado. Si la computadora que está en operación falla, cualquiera de las dos de reserva puede ponerse de inmediato en línea. Después de que falla la segunda computadora, la tercera puede ponerse en línea de inmediato. Suponga que la probabilidad de una falla durante cualquier transacción es 10^{-8} y que las transacciones pueden considerarse como eventos independientes.

a. ¿Cuál es el número promedio de transacciones previas a la falla de las tres computadoras?

b. ¿Cuál es la varianza del número de transacciones previas a la falla de todas las computadoras?

3-81. Deduzca las expresiones para la media y la varianza de una variable aleatoria geométrica con parámetro p. (En este problema se necesita utilizar fórmulas para series infinitas.)

3-8 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Considérense de nuevo los ejemplos 2-26 y 3-13, en los que la producción diaria de 850 partes contiene 50 que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se toman dos partes al azar, sin remplazo, de la producción del día. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos partes no cumplan con los requerimientos?

Este experimento consiste de dos ensayos: seleccionar la primera parte y luego escoger la segunda. Sin embargo, el experimento es fundamentalmente distinto de los ejemplos basados en la distribución binomial. En este experimento, los ensayos no son independientes. Nótese que, en el caso poco usual de que cada unidad seleccionada se devuelva al lote antes de hacer la selección siguiente, los ensayos son independientes y la probabilidad de que una parte no cumpla con los requerimientos es constante. En este caso, el número de partes que no cumplen con los requerimientos es una variable aleatoria binomial.

Sean A y B los eventos donde la primera y la segunda parte no cumplen con los requerimientos, respectivamente. En el capítulo 2 se encontró que $P(B|A) = 49/849$ y $P(B) = 50/850$. En consecuencia, el hecho de saber que la primera parte no cumple con los requerimientos sugiere que es menos probable que la segunda tampoco los cumpla.

En este ejemplo, sea X igual al número de partes en la muestra que no cumplen con los requerimientos. Del ejemplo 3-13,

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\text{ambas partes cumplen con los requerimientos}) \\
&= (800/850)(799/849) = 0.886 \\
P(X=1) &= P(\text{primera parte seleccionada cumple con los requerimientos y la segunda} \\
&\quad \text{no, o la primera no los cumple pero la segunda sí}) \\
&= (800/850)(50/849) + (50/850)(800/849) = 0.111 \\
P(X=2) &= P(\text{ambas partes no cumplen con los requerimientos}) \\
&= (50/850)(49/849) = 0.003
\end{aligned}$$

Tal como sucede en este ejemplo, a menudo las muestras se seleccionan *sin remplazo*; esto es, las unidades seleccionadas no se devuelven al lote antes de hacer la siguiente selección. Aunque las probabilidades pueden obtenerse con un razonamiento similar al del ejemplo anterior, siempre es de gran utilidad tener una fórmula general para el cálculo de las probabilidades cuando las muestras se toman sin remplazo. Pueden emplearse las reglas de conteo del apéndice I para justificar la fórmula siguiente.

Definición

Un conjunto de N objetos contiene

K objetos clasificados como éxitos y

$N - K$ objetos clasificados como fallas

Se toma una muestra de tamaño n, al azar (sin remplazo) de entre N objetos, donde $K \leq N$ y $n \leq N$.

Sea la variable aleatoria X el número de éxitos en la muestra. Entonces, X tiene una **distribución hipergeométrica** y

$$f_X(x; N, K, n) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \min(K, n) \qquad (3\text{-}11)$$

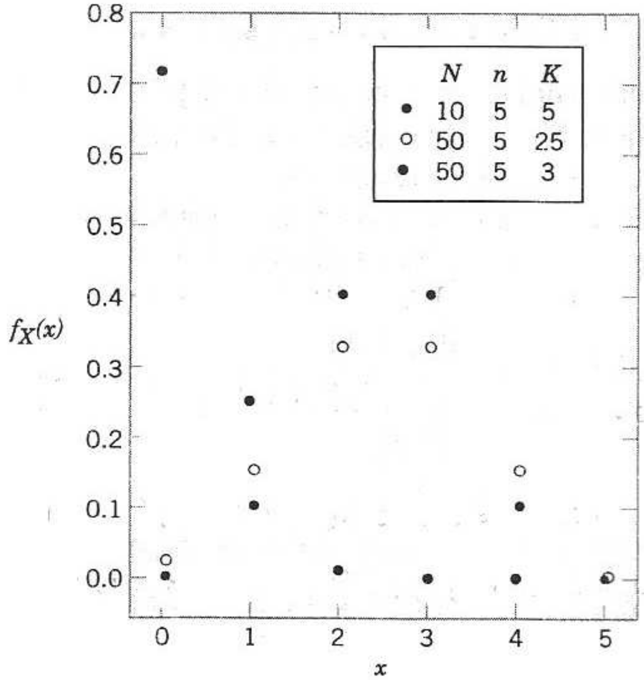


Figura 3-11 Distribuciones hipergeométricas para valores seleccionados de los parámetros N, K y n.

La expresión mín (K, n) se utiliza en la definición del recorrido de X debido a que el número máximo de éxitos que puede presentarse en la muestra es el menor entre el tamaño de la muestra, n, y el número de éxitos disponibles, K. La figura 3-11 ilustra varias distribuciones hipergeométricas.

EJEMPLO 3-35

El ejemplo 3-13 puede volverse a estudiar utilizando la expresión general que aparece en la definición de una variable aleatoria hipergeométrica. Esto es,

$$P(X = 0) = \frac{\binom{50}{0}\binom{800}{2}}{\binom{850}{2}} = \frac{319600}{360825} = 0.886$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{50}{1}\binom{800}{1}}{\binom{850}{2}} = \frac{40000}{360825} = 0.111$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{50}{2}\binom{800}{0}}{\binom{850}{2}} = \frac{1225}{360825} = \boxed{0.003}$$

EJEMPLO 3-36

Un lote de piezas contiene 100 de un proveedor local de tubería, y 200 de un proveedor del mismo material, pero de otro estado. Si se eligen cuatro piezas al azar y sin remplazo, ¿cuál es la probabilidad que todas provengan del proveedor local?

Sea X el número de partes en la muestra que son del proveedor local. Entonces, X tiene una distribución hipergeométrica y la probabilidad pedida es $P(X = 4)$. En consecuencia,

$$P(X = 4) = \frac{\binom{100}{4}\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}} = 0.0119$$

¿Cuál es la probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local?

$$P(X \geq 2) = \frac{\binom{100}{2}\binom{200}{2}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{3}\binom{200}{1}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{4}\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}}$$
$$= 0.298 + 0.098 + 0.0119 = 0.408$$

¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea del proveedor local?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{100}{0}\binom{200}{4}}{\binom{300}{4}} = 0.196$$

La media y la varianza de una variable aleatoria hipergeométrica pueden obtenerse al considerar los ensayos que conforman el experimento. Sin embargo, los ensayos no son independientes, razón por la que resultan inapropiados los cálculos utilizados para la variable aleatoria binomial. Se deja como ejercicio de comprensión para el lector el cálculo de la media y la varianza de una variable aleatoria hipergeométrica.

Sea $p = K/N$. Entonces, p puede interpretarse como la proporción de éxitos en el conjunto del cual se toma la muestra.

Si X es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros N, K y n, entonces la media y la varianza de X son

$$\mu_X = E(X) = np \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = np(1 - p)[(N - n)/(N - 1)]$$

donde $p = K/N$. (3-12)

EJEMPLO 3-37

En el ejemplo 3-36, el tamaño de la muestra es cuatro. La variable aleatoria X es el número de partes defectuosas contenidas en la muestra. Entonces, $p = 50/850 = 1/17$. Por consiguiente,

$$E(X) = 4(1/17) = 0.235$$

y

$$V(X) = 4(1/17)(16/17)[(850 - 50)/849] = 0.209$$

Nótese que, para una variable aleatoria hipergeométrica, $E(X)$ es similar al resultado correspondiente a una variable aleatoria binomial. Además, $V(X)$ difiere del resultado que se obtiene para una variable aleatoria binomial sólo por el término que aparece entre corchetes en la ecuación 3-12.

> La expresión
>
> $$(N - n)/(N - 1)$$
>
> se conoce como **factor de corrección de población finita.**

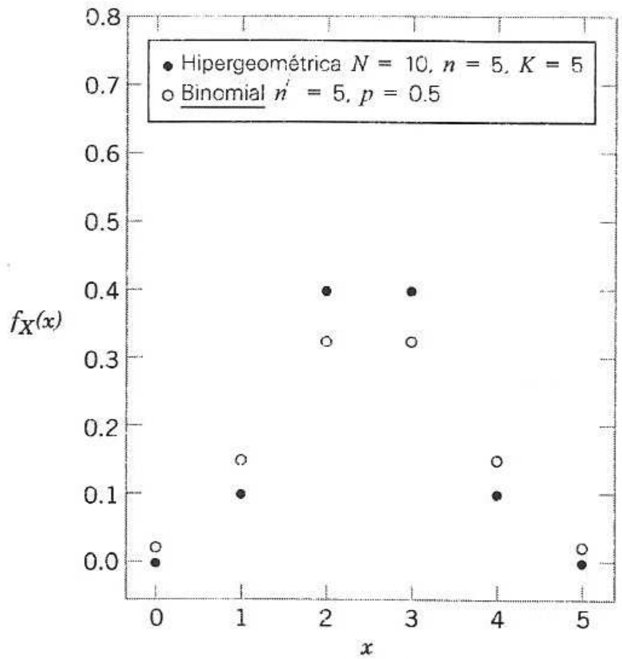
El *muestreo con remplazo* es equivalente al muestreo de un conjunto infinito, ya que la proporción de éxitos permanece constante para cualquier ensayo en el experimento. Tal como ya se mencionó, si el muestreo se hace con remplazo, entonces X es una variable aleatoria binomial, con varianza $np(1 - p)$. En consecuencia, la corrección para población finita representa la corrección a la varianza binomial debido a que el muestreo se hace sin remplazo de un conjunto finito de tamaño N.

Si n es pequeño con respecto a N, entonces la corrección es pequeña y la distribución hipergeométrica es similar a la binomial. En este caso, incluso si el muestreo se hace *sin remplazo*, una distribución binomial puede aproximar de manera eficaz la distribución del número de unidades de un tipo específico en la muestra. La figura 3-12 ilustra un caso que ejemplifica esta situación.

EJEMPLO 3-38

El listado de cuentas de clientes de una corporación grande contiene 1000 clientes. De éstos, 700 han comprado al menos uno de los productos de la corporación en los últimos tres meses. Para evaluar el diseño de un nuevo producto, se eligen 50 clientes al azar del listado de la corporación. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 45 de los clientes que hay en la muestra hayan adquirido algún producto de la corporación en los últimos tres meses?

El muestreo se hace sin remplazo. Sin embargo, dado que el tamaño de la muestra, 50, es pequeño comparado con el número de cuentas de clientes, 1000, la probabilidad de



	0	1	2	3	4	5
Probabilidad hipergeométrica	0.004	0.099	0.397	0.397	0.099	0.004
Probabilidad binomial	0.031	0.156	0.313	0.313	0.156	0.031

Figura 3-12 Comparación entre las distribuciones hipergeométrica y binomial para algunos valores de los parámetros.

seleccionar un cliente que haya comprado un producto a la corporación en los últimos tres meses, permanece aproximadamente constante a medida que se elige a los clientes.

Por ejemplo, sean A el evento donde el primer cliente seleccionado no compró ningún producto de la corporación en los últimos tres meses, y B el evento en que el segundo cliente seleccionado tampoco adquirió ningún producto en los últimos tres meses. Entonces, $P(A) = 300/1000 = 0.3$ y $P(B|A) = 299/999 = 0.2993$. Esto es, los ensayos son aproximadamente independientes.

Sea X el número de clientes en la muestra que han comprado productos a la corporación en los últimos tres meses. Entonces, X es una variable aleatoria hipergeométrica con $N = 1000$, $n = 50$ y $K = 700$. En consecuencia, $p = K/N = 0.7$. La probabilidad pedida es $P(X > 45)$. Dado que el tamaño de la muestra es pequeño en comparación con el tamaño del lote, la distribución de X puede aproximarse como una binomial con $n = 50$ y $p = 0.7$. Al utilizar la aproximación binomial a la distribución de X se tiene que

$$P(X > 45) = \sum_{x=46}^{50} \binom{50}{x} 0.7^x(1 - 0.7)^{50-x} = 0.00017$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-8

3-82. Suponga que X tiene una distribución hipergeométrica con $N = 100$, $n = 4$ y $K = 20$. Calcule lo siguiente:

a. $P(X = 1)$

b. $P(X = 6)$

c. $P(X = 4)$

3-83. **Continuación del ejercicio 3-82.** Calcule la media y la varianza de X.

3-84. Suponga que X tiene una distribución hipergeométrica con $N = 20$, $n = 4$ y $K = 4$. Calcule lo siguiente:

a. $P(X = 1)$

b. $P(X = 4)$

c. $P(X \leq 2)$

3-85. **Continuación del ejercicio 3-84.** Calcule la media y la varianza de X.

3-86. Suponga que X tiene una distribución hipergeométrica con $N = 10$, $n = 3$ y $K = 4$. Dibuje la función de probabilidad de X.

3-87. **Continuación del ejercicio 3-86.** Calcule la función de distribución acumulada de X en el ejercicio 3-86.

3-88. **Continuación de los ejercicios 3-82 y 3-84.**

a. Calcule las correcciones para población finita para los ejercicios 3-82 y 3-84. ¿Para qué ejercicio debe ser mejor la aproximación binomial a la distribución de X?

b. Para el ejercicio 3-82, calcule $P(X = 1)$ y $P(X = 4)$, suponiendo que X tiene una distribución binomial, y compare los resultados con los obtenidos con la distribución hipergeométrica.

c. Para el ejercicio 3-84, calcule $P(X = 1)$ y $P(X = 4)$, suponiendo que X tiene una distribución binomial, y compare los resultados con los obtenidos con la distribución hipergeométrica.

3-89. Un lote de 75 arandelas contiene cinco en las que la variabilidad en el espesor alrededor de la circunferencia de la arandela es inaceptable. Se toma una muestra al azar de 10 arandelas, sin remplazo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las arandelas inaceptables se encuentre en la muestra?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las arandelas inaceptables se encuentre en la muestra?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una de las arandelas inaceptables se encuentre en la muestra?

d. ¿Cuál es el número promedio de arandelas inaceptables en la muestra?

3-90. Las tarjetas de circuito impreso se envían a una prueba de funcionamiento después de haber montado en ellas todos los chips. Un lote contiene 140 tarjetas y se toman 20 sin remplazo para hacerles la prueba de funcionamiento.

a. Si 20 tarjetas están defectuosas, ¿cual es la probabilidad de que al menos una de ellas se encuentre en la muestra?

b. Si 5 tarjetas están defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas aparezca en la muestra?

3-91. Una cinta magnética se corta en tiras de media pulgada de ancho, para luego devanarlas en cartuchos. La unidad de corte contiene 48 cuchillas. Se escogen al azar cinco de ellas y se evalúan diariamente para determinar el desgaste del filo. Si se encuentra cualquier cuchilla sin filo, se remplaza todo el conjunto de cuchillas de la unidad de corte con uno nuevo.

a. Si la unidad de corte tiene 10 cuchillas desgastadas, ¿cuál es la probabilidad de remplazar el conjunto de cuchillas el primer día en que se lleva a cabo la evaluación?

b. Si la unidad de corte tiene 10 cuchillas desgastadas, ¿cuál es la probabilidad de que el conjunto de cuchillas no sea remplazado hasta el tercer día de iniciada la evaluación? [*Sugerencia*: Suponga que las decisiones que se toman por día son independientes; haga uso de la distribución geométrica.]

c. Suponga que el primer día en que se hace la evaluación dos cuchillas están desgastadas; el segundo día, seis están desgastadas, y el tercer día 10 están desgastadas. ¿Cuál es la probabilidad de que el conjunto de cuchillas no sea remplazado hasta el tercer día de la evaluación? [*Sugerencia:* Suponga que las decisiones que se toman por día son independientes. Sin embargo, la probabilidad de hacer el remplazo cambia diariamente.]

3-92. **Problema de la lotería.** Un estado efectúa una lotería en la que se escogen al azar y sin remplazo seis números de entre 40. Un jugador selecciona seis números antes de que el estado tome la muestra.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los seis números seleccionados por el jugador coincidan con los seis números que hay en la muestra del estado?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que cinco de los seis números seleccionados por el jugador aparezcan en la muestra del estado?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de los seis números seleccionados por el jugador aparezcan en la muestra del estado?

d. Si el jugador participa en la lotería cada semana, ¿cuál es el número esperado de semanas que deben transcurrir para que los seis números que escoge el jugador coincidan con los que hay en la muestra tomada por el estado?

3-93. **Continuación del ejercicio 3-89.** Utilice la aproximación binomial a la distribuciór hipergeométrica para aproximar las probabilidades del ejercicio 3-89. En este ejercicio, ¿cuál es el factor de corrección para población finita?

3-9 DISTRIBUCIÓN POISSON

Para introducir la distribución Poisson, estudiemos un ejemplo.

EJEMPLO 3-39

Considérese la transmisión de n bits sobre un canal de comunicación digital. Sea la variable aleatoria X el número de bits transmitidos de manera errónea. Cuando la probabilidad de transmitir un bit de manera errónea es constante y las transmisiones son independientes, X tiene una distribución binomial. Sea p la probabilidad de transmitir un bit de manera errónea. Entonces, $E(X) = pn$. Ahora supóngase que el número de bits transmitidos aumenta y la probabilidad del error disminuye de modo que pn se mantenga igual a una constante, por ejemplo λ. Esto es, n aumenta y p disminuye, de modo que $E(X)$ permanezca constante. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{np}{n}\right)^x(1-p)^n(1-p)^{-x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\frac{\lambda^x}{n^x}\left(1-\frac{np}{n}\right)^n(1-p)^{-x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \\
&= \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\ldots\frac{(n-x+1)}{n}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}
\end{aligned}
$$

Al considerar cada uno de los términos que aparecen en la expresión anterior, puede demostrarse que

$$\text{lím}_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Además, dado que el número de bits transmitido tiende a infinito, el número de errores puede ser igual a cualquier entero no negativo. Por consiguiente, el recorrido de X es el conjunto de los enteros desde cero hasta infinito.

La distribución obtenida como el límite en el ejemplo anterior es mucho más útil de lo que la deducción de la misma deja entrever. El ejemplo siguiente ilustra la aplicabilidad de esta distribución.

EJEMPLO 3-40

Las fallas superficiales de un alambre delgado de cobre se X presentan de manera aleatoria. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de fallas superficiales de un alambre de cobre de longitud L milímetros, y supóngase que el número promedio de fallas en L milímetros es λ.

La distribución de probabilidad de X puede obtenerse con un razonamiento similar al del ejemplo 3-39. La longitud del alambre se divide en n subintervalos de longitud más pequeña, por ejemplo de un micrometro cada uno. Si el subintervalo seleccionado es lo bastante pequeño, entonces la probabilidad de que en él se tengan más de una falla es insignificante. Por otra parte, puede interpretarse la hipótesis de que las fallas se presentan de manera aleatoria como una implicación de que cualquier subintervalo tiene la misma probabilidad p de contener una falla. Finalmente, si se supone que la probabilidad de que un intervalo contenga una falla es independiente de la de otros subintervalos, entonces la distribución de X puede modelarse de manera aproximada con la de una variable aleatoria binomial. Dado que

$$E(X) = \lambda = np,$$

se tiene, entonces, que

$$p = \lambda/n$$

Esto es, la probabilidad de que un subintervalo contenga una falla es λ/n. Con subintervalos suficientemente pequeños, n es muy grande y p es muy pequeña. Por consiguiente, la distribución de X se obtiene del mismo modo que en el ejemplo 3-39.

Es evidente que el ejemplo 3-40 puede generalizarse con la finalidad de incluir una amplia gama de experimentos aleatorios. El intervalo que fue dividido en el ejemplo 3-40 era la longitud de un alambre de cobre. Sin embargo, el mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier intervalo, incluyendo intervalos de tiempo, de área o de volumen. Por ejemplo, los procesos de conteo de 1) partículas contaminantes en procesos de fabricación de semiconductores, 2) rasgaduras en rollos de tela, 3) llamadas al servicio telefónico, 4) interrupciones de energía eléctrica y 5) partículas atómicas emitidas por una muestra, pueden modelarse de manera exitosa con la función de probabilidad de la siguiente definición.

Definición

Dado un intervalo de números reales, supóngase que el conteo de ocurrencias es aleatorio en dicho intervalo. Si éste puede dividirse en subintervalos suficientemente pequeños, tales que

(1) La probabilidad de más de una ocurrencia en el subintervalo es cero,

(2) la probabilidad de una ocurrencia en un subintervalo es la misma para todos los subintervalos, y es proporcional a la longitud de éstos, y

(3) el conteo de ocurrencias en cada subintervalo es independiente del de los demás subintervalos,

entonces el experimento aleatorio recibe el nombre de *proceso Poisson.*

Si el número promedio de ocurrencias en el intervalo es $\lambda > 0$, la variable aleatoria X que es igual al número de ocurrencias en el intervalo tiene una **distribución Poisson** con parámetro λ, y la función de probabilidad de X es

$$f_X(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3-13}$$

Históricamente, el término *proceso* se ha utilizado para sugerir la observación de un sistema con el paso del tiempo. En el ejemplo del alambre de cobre, se demuestra que la distribución Poisson también puede aplicarse a intervalos tales como longitudes. La figura 3-13 presenta las gráficas varias distribuciones Poisson.

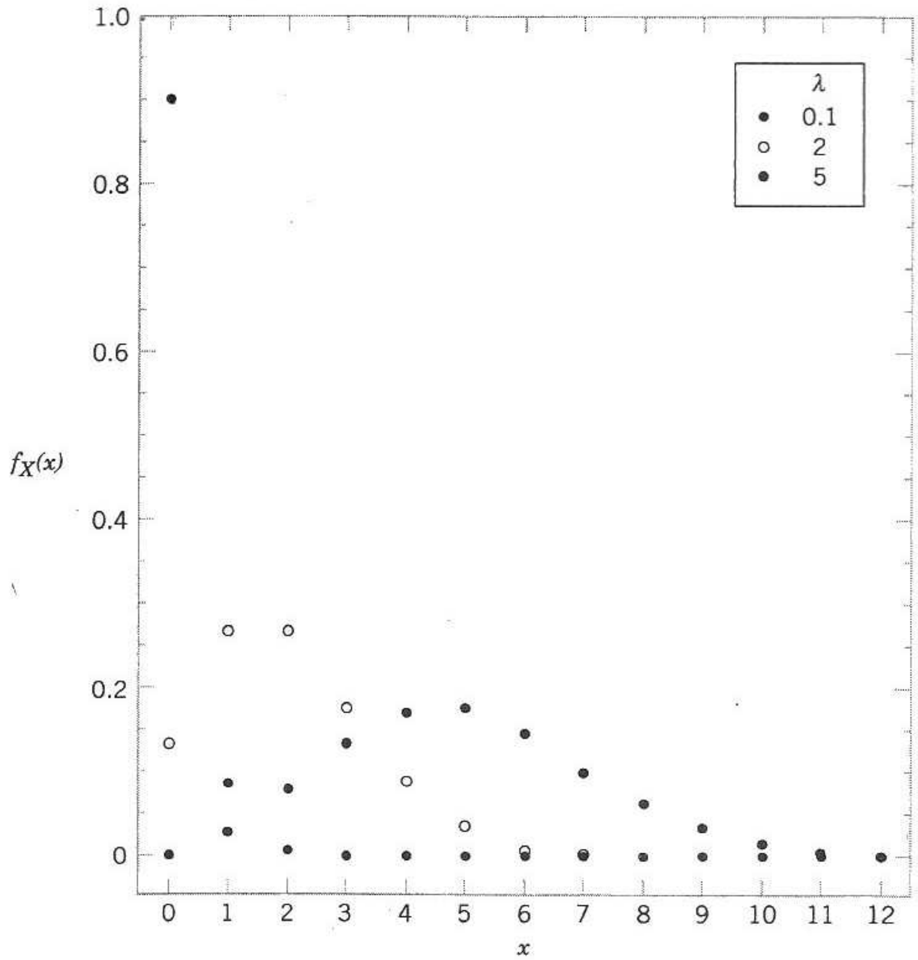


Figura 3-13 Distribuciones Poisson para valores seleccionados de los parámetros.

En el cálculo de probabilidades, medias y varianzas de variables aleatorias Poisson, es importante **utilizar unidades que sean consistentes**. El ejemplo que sigue ilustra conversiones entre unidades. Por ejemplo, si el

> número promedio de fallas por milímetro de alambre es 3.4, entonces el
>
> número promedio de fallas en 10 milímetros de alambre es 34, y el
>
> número promedio de fallas en 100 milímetros de alambre es 340.

Si una variable aleatoria Poisson representa el número de ocurrencias en un intervalo, entonces la media de la variable aleatoria debe ser igual a número esperado de ocurrencias en un intervalo de longitud idéntica.

EJEMPLO 3-41

Para el caso del alambre delgado de cobre, supóngase que el número de fallas está descrito por una distribución Poisson con una media de 2.3 fallas por milímetro. Determínese la probabilidad de tener exactamente dos fallas en un milímetro de alambre.

Sea X el número de fallas en un milímetro de alambre. Entonces, $E(X) = 2.3$ fallas y

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2.3}2.3^2}{2!} = 0.265$$

Calcúlese la probabilidad de tener 10 fallas en cinco milímetros de alambre.

Sea X el número de fallas en cinco milímetros de alambre. Entonces, X tiene una distribución Poisson con

$$E(X) = 5 \text{ mm} \times 2.3 \text{ fallas mm} = 11.5 \text{ fallas}$$

Por consiguiente,

$$P(X = 10) = e^{-11.5}\, 11.5^{10}/10! = 0.113$$

Determínese la probabilidad de tener al menos una falla en dos milímetros de alambre.

Sea X el número de fallas en dos milímetros de alambre. Entonces X tiene una distribución Poisson con

$$E(X) = 2 \text{ mm} \times 2.3 \text{ fallas/mm} = 4.6 \text{ fallas}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - e^{-4.6} \\ &= 0.9899 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3-42

La contaminación es un problema en la fabricación de discos de almacenamiento óptico. El número de partículas contaminantes que aparecen en un disco óptico tiene una distribución Poisson, y el número promedio de partículas por centímetro cuadrado de superficie del medio de almacenamiento es 0.1. El área de un disco bajo estudio es 100 centímetros cuadrados. Encuéntrese la probabilidad de encontrar 12 partículas en el área del disco.

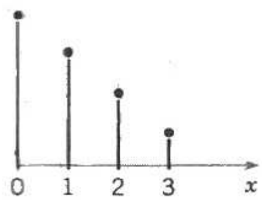
Sea X el número de partículas en el área del disco. Dado que el número promedio de partículas es 0.1 de éstas por cm^2,

$$\begin{aligned} E(X) &= 100 \text{ cm}^2 \times 0.1 \text{ partículas/cm}^2 \\ &= 10 \text{ partículas} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P(X = 12) &= \frac{e^{-10}10^{12}}{12!} \\ &= 0.095 \end{aligned}$$

Encuéntrese la probabilidad de que no haya partículas contaminantes en el área del disco bajo estudio. Entonces $P(X = 0) = e^{-10} = 4.54 \times 10^{-5}$.



$$P(X = x) = f_X(x)$$
$$P(1 \le X \le 3) = f_X(1) + f_X(2) + f_X(3)$$
$$E(X) = \mu_X = \sum_x x\, f_X(x)$$
$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x)$$

Figura 3-14 Variables aleatorias discretas.

- Número de ensayos n fijo
  Número de éxitos X (variable aleatoria)
  Binomial
  $f(x; p, n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad 0 \le x \le n$
  $E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$
- Número de éxitos r fijo
  Número de ensayos X (variable aleatoria)
  Binomial negativa
  $f(x; p, r) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r \quad x = r, r+1, \ldots$
  $E(X) = \dfrac{r}{p} \quad V(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$
  Caso especial cuando $r = 1$: variable aleatoria geométrica.

Figura 3-15 Variables aleatorias basadas en ensayos Bernoulli.

La deducción de las expresiones para la media y la varianza de una variable aleatoria Poisson se deja como ejercicio para el lector. Los resultados son los siguientes.

> Si X es una variable aleatoria Poisson con parámetro λ, entonces la media y la varianza de X son
>
> $$\boxed{\mu_X = E(X) = \lambda \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = \lambda}$$

Las probabilidades acumuladas de Poisson aparecen en la tabla I del apéndice.

Las figuras 3-14 y 3-15 resumen las propiedades de las variables aleatorias discretas.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3-9

3-94. Suponga que X tiene una distribución Poisson con media 4. Calcule las probabilidades siguientes:

a. $P(X = 0)$

b. $P(X \le 2)$

c. $P(X = 4)$

d. $P(X = 8)$

3-95. Suponga que X tiene una distribución Poisson con media 0.4. Calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(X = 0)$

b. $P(X \leq 2)$

c. $P(X = 4)$

d. $P(X = 8)$

3-96. Suponga que el número de clientes que entran en un banco en una hora es una variable aleatoria Poisson, y que $P(X = 0) = 0.05$. Calcule la media y la varianza de X.

3-97. A menudo, el número de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador se modela como una variable aleatoria Poisson. Suponga que, en promedio, se reciben 10 llamadas por hora.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente cinco llamadas en una hora?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban tres o llamadas menos en una hora?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban exactamente 15 llamadas en dos horas?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente cinco llamadas en 30 minutos?

3-98. Se supone que el número de defectos en los rollos de tela de cierta industria textil es una variable aleatoria Poisson con una media de 0.1 defectos por metro cuadrado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de tener dos defectos en un metro cuadrado de tela?

b. ¿Cuál es la probabilidad de tener un defecto en 10 metros cuadrados de tela?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que no halla defectos en 20 metros cuadrados de tela?

d. ¿Cuál es la probabilidad de existan al menos dos defectos en 10 metros cuadrados de tela?

3-99. El número de baches en una sección de una carretera interestatal que requieren reparación urgente, puede modelarse con una distribución Poisson que tiene una media de dos baches por milla.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya baches qué reparar en un tramo de cinco millas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario reparar al menos un bache en un tramo de media milla?

c. Si el número de baches está relacionado con la carga vehicular de la carretera, y algunas secciones de ésta tienen una carga muy pesada mientras que otras no, ¿qué puede decirse sobre la hipótesis de que el número de baches que es necesario reparar tiene una distribución Poisson?

3-100. El número de defectos superficiales de los paneles de plástico utilizados en los interiores de automóviles tiene una distribución Poisson con una media de 0.5 defectos por pie cuadrado de panel. Suponga que el interior de un automóvil contiene 10 pies cuadrados de este material.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya defectos superficiales en los interiores de un automóvil?

b. Si se venden 10 automóviles a una compañía que los renta, ¿cuál es la probabilidad de que los interiores de cualquiera de ellos no tengan defectos superficiales?

c. Si se venden 10 automóviles a una compañía que los renta, ¿cuál es la probabilidad de que, como máximo, uno de ellos tenga defectos superficiales en sus interiores?

3-101. El número de fallas de un instrumento de prueba debidas a las partículas contaminantes de un producto, es una variable aleatoria Poisson con media 0.02 fallas por hora.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el instrumento no falle en una jornada de ocho horas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se presente al menos una falla en un periodo de 24 horas?

Ejercicios complementarios

3-102. Un embarque de sustancias químicas llega en 15 contenedores. Se eligen tres contenedores al azar, sin remplazo, para hacer una inspección de la pureza del producto. Si dos de los contenedores no cumplen con los requerimientos de pureza, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos esté en la muestra?

3-103. En cierto servicio telefónico, la probabilidad de que una llamada sea contestada en menos de 30 segundos es 0.75. Suponga que las llamadas son independientes.

a. Si una persona llama 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente nueve de las llamadas sean contestadas en un espacio de 30 segundos?

b. Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 16 de las llamadas sean contestadas en menos de 30 segundos?

c. Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es el número promedio de llamadas que serán contestadas en menos de 30 segundos?

3-104. **Continuación del ejercicio 3-103.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de tener que llamar cuatro veces para obtener la primera respuesta en menos de 30 segundos?

b. ¿Cuál es el número promedio de llamadas que hay que hacer hasta tener una respuesta en menos de 30 segundos?

3-105. **Continuación del ejercicio 3-103.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de tener que llamar seis veces para que dos de las llamadas sean contestadas en menos de 30 segundos?

b. ¿Cuál es el número promedio de llamadas necesario para obtener dos respuestas en menos de 30 segundos?

3-106. El número de mensajes que se envían por computadora a un boletín electrónico es una variable aleatoria Poisson con una media de cinco mensajes por hora.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el boletín reciba cinco mensajes en una hora?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el boletín reciba 10 mensajes en una hora y media?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el boletín reciba menos de dos mensajes en media hora?

3-107. El número de errores en un libro de texto sigue una distribución Poisson con una media de 0.01 errores por página. ¿Cuál es la probabilidad de que existan tres o menos errores en 100 páginas del libro?

3-108. La probabilidad de que una persona se recupere de cierta enfermedad en un periodo de una semana sin recibir tratamiento es 0.1. Suponga que otras 20 personas que sufren la misma enfermedad reciben un tratamiento con un medicamento, y cuatro de ellas se recuperan en un periodo de una semana. Si el medicamento no tiene ningún efecto, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro o más personas se recuperen en una semana?

3-109. En un proceso de fabricación donde se laminan varias capas cerámicas, el 1% de los ensambles es defectuoso. Suponga que los ensambles son independientes.

- **a.** ¿Cuál es el número promedio de ensambles que será necesario examinar para obtener cinco defectuosos?
- **b.** ¿Cuál es la desviación estándar del número de ensambles que es necesario examinar para obtener cinco defectuosos?

3-110. **Continuación del ejercicio 3-109.** Calcule el número mínimo de ensambles que es necesario examinar, para que la probabilidad de que al menos uno de ellos esté defectuoso sea mayor que 0.95.

3-111. Determine el valor de la constante c de modo que la función $f(x) = cx$, para $x = 1, 2, 3, 4$, sea una función de probabilidad.

3-112. Un fabricante de productos electrónicos espera que el 2% de las unidades fallen durante el periodo de garantía. Se hace un seguimiento de 500 unidades independientes para determinar su desempeño durante el tiempo de garantía.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las unidades falle durante el periodo de garantía?
- **b.** ¿Cuál es el número esperado de unidades que fallan durante el periodo de garantía?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de que fallen más de dos unidades durante el periodo de garantía?

3-113. La variable aleatoria X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	2	3	5	8
probabilidad	0.2	0.4	0.3	0.1

Calcule lo siguiente:

- **a.** $P(X \leq 3)$
- **b.** $P(X > 2.5)$
- **c.** $P(2.7 < X < 5.1)$
- **d.** $E(X)$
- **e.** $V(X)$

3-114. Determine la función de probabilidad de la variable aleatoria que tiene la siguiente función de distribución acumulada.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0.2 & 2 \leq x < 5.7 \\ 0.5 & 5.7 \leq x < 6.5 \\ 0.8 & 6.5 \leq x < 8.5 \\ 1 & 8.5 \leq x \end{cases}$$

3-115. La tapa del cojinete central de una máquina tiene cuatro tornillos. Éstos se toman al azar, sin remplazo, de un lote de partes que contiene 30 tornillos de un proveedor y 70 de otro.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro tornillos de la tapa del cojinete provengan del mismo proveedor?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres de los tornillos de la tapa provengan del mismo proveedor?

3-116. Suponga que el número de errores en una superficie de grabación magnética es una variable aleatoria Poisson con una media de un error por cada 10^5 bits. Un sector de datos está formado por 4096 bytes (un byte = ocho bits).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el sector tenga más de un error?

b. ¿Cuál es el número promedio de sectores que hay que recorrer hasta encontrar un error?

3-117. Se envía un técnico para hacer la instalación de un sistema de comunicación especializado a una ciudad, sólo cuando se han recibido tres o más pedidos. Suponga que los pedidos tienen una distribución Poisson con media 0.25 por semana para una ciudad con una población de 100 000 habitantes; suponga que se hacen pedidos de una ciudad que tiene 800 000 mil habitantes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el técnico sea solicitado después de un periodo de una semana?

b. Si una persona es la primera en hacer un pedido en esta ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de dos semanas desde que se solicitó el servicio para que la compañía envíe al técnico?

3-118. **Efectividad de la inspección.** Se sospecha que algunos de los tanques que contienen sustancias químicas compradas a un proveedor tienen una humedad mayor que la especificada. Se toman muestras de 30 tanques para ser analizadas en cuanto al contenido de humedad. Suponga que los tanques son independientes. Calcule la proporción de tanques que deben tener un contenido de humedad mayor al especificado para que la probabilidad de que al menos uno de los que se encuentran en la muestra de 30 no pase la prueba sea 0.90.

3-119. Los mensajes que llegan a una computadora utilizada como servidor lo hacen de acuerdo con una distribución Poisson con una tasa promedio de 10 mensajes por hora. Determine el intervalo de tiempo necesario para que la probabilidad de que no llegue ningún mensaje durante ese lapso sea 0.90.

3-120. Las fallas en el interior de plástico utilizado en automóviles se presentan de acuerdo con una distribución Poisson que tiene una media de 0.02 fallas por panel.

a. Si se examinan 50 paneles, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos tenga fallas?

b. ¿Cuál es el número esperado de paneles que es necesario examinar antes de encontrar una falla?

c. Si se examinan 50 paneles, ¿cuál es la probabilidad de que el número de paneles que tienen dos o más fallas sea menor o igual que dos?

EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

3-121. Deduzca la media y la varianza de una variable aleatoria hipergeométrica (ejercicio difícil).

3-122. Deduzca la fórmula para la media y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta uniforme sobre el rango de enteros $a, a + 1, \ldots, b$.

3-123. Una compañía analiza los embarques de sus proveedores con la finalidad de detectar productos que no cumplen con las especificaciones. Suponga que un lote de 1000 artículos contiene un 1% que no cumple con las especificaciones. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de seleccionar al menos un artículo que no cumple con las especificaciones sea al menos 0.90? Suponga que en este caso resulta adecuado el uso de la aproximación binomial de la distribución hipergeométrica.

3-124. Una compañía examina los embarques de sus proveedores con la finalidad de detectar productos que no cumplen con las especificaciones. La política de la compañía es utilizar un tamaño de la muestra que sea siempre igual al 10% del tamaño del lote. Haga comentarios sobre la efectividad de esta política como regla general para lotes de cualquier tamaño.

3-125. Las fallas superficiales de los paneles exteriores de un automóvil siguen una distribución Poisson con una media de 0.1 fallas por panel. Si se examinan 100 paneles, ¿cuál es la probabilidad de que menos de cinco tengan fallas?

3-126. Una pastelería produce rollos en lotes de 0, 1000, 2000 o 3000 por día. El costo de producción por rollo es de 0.10 dólares. La demanda varía aleatoriamente de acuerdo con la siguiente distribución:

demanda de rollos	0	1000	2000	3000
probabilidad de la demanda	0.3	0.2	0.3	0.2

Todos los rollos para los que existe demanda se venden en 0.30 dólares. Todos los rollos para los que no existe demanda se venden en el mercado secundario en 0.05 dólares. ¿Cuántos rollos debe producir la pastelería para maximizar su ganancia promedio?

3-127. Un fabricante almacena los componentes enviados por un proveedor. Suponga que el 2% de los componentes están defectuosos, y que éstos se presentan de manera independiente. ¿Cuántos componentes debe tener el fabricante en el almacén, para que la probabilidad de que puedan surtirse 100 pedidos sin necesidad de solicitar más componentes sea al menos 0.95?

4 Variables aleatorias continuas y distribuciones de probabilidad

4-1 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

En el capítulo 2 se estudió el experimento de medición de la corriente en un alambre delgado de cobre. En esa ocasión se indicó que los resultados pueden diferir ligeramente de un día a otro debido a pequeñas variaciones en las variables que no están controladas en el experimento —cambios en la temperatura ambiente, pequeñas impurezas en la composición química del alambre, cambios en la fuente de corriente, entre otros.

Otro ejemplo es la selección de una pieza de la producción de un día y la medición con bastante exactitud de la longitud de ésta. En la práctica pueden presentarse pequeñas variaciones en las longitudes medidas, por muchas causas, tales como vibraciones, fluctuaciones de temperatura, diferencias entre quienes toman las mediciones, calibraciones, desgaste en la herramienta de corte, desgaste en los cojinetes y cambios en la materia prima. Incluso el procedimiento de medición puede producir variaciones en los resultados finales.

En estos tipos de experimentos, las mediciones de interés —la corriente en el alambre de cobre, la longitud de una parte maquinada— pueden representarse con una variable aleatoria. Es razonable modelar el rango de los valores posibles de la variable aleatoria con un intervalo (finito o infinito) de números reales. Por ejemplo, para la longitud de una parte maquinada, este modelo permite que las mediciones del experimento produzcan cualquier valor dentro de un intervalo de números reales. Dado que el rango es cualquier valor en el intervalo, el modelo es adecuado para cualquier precisión utilizada al efectuar las mediciones. Sin embargo, como el número de valores posibles de la variable aleatoria X es infinito no contable, X tiene una distribución muy diferente de las de las variables aleatorias discretas estudiadas en el capítulo anterior. El rango de X incluye todos los valores contenidos en un intervalo de números reales; esto es, el rango de X puede concebirse como un continuo de valores. En consecuencia, se tiene la siguiente definición.

Definición

Si el rango de una variable aleatoria X contiene un intervalo (ya sea finito o infinito) de número reales, entonces X es una **variable aleatoria continua**.

En algunos ejemplos, la variable aleatoria en realidad es discreta, pero como el rango de todos los valores posibles es muy grande, puede resultar más conveniente utilizar un modelo basado en una variable aleatoria continua. Por ejemplo, una escala digital puede mostrar el peso de una pieza redondeado hasta el centésimo de gramo más cercano. Si bien sólo son posibles datos redondeados hasta centésimos de gramo, tal vez sea conveniente pensar el peso de la pieza como una variable aleatoria continua. Como otro ejemplo, es posible medir la corriente hasta el microampere más cercano. Dado que sólo es posible un número entero de microamperes, la variable aleatoria es discreta. Sin embargo, tal vez sea más conveniente suponer que las mediciones de corriente corresponden a valores de una variable aleatoria continua.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-1

Para cada una de las siguientes variables, decida qué modelo de variable aleatoria es el mejor: discreto o continuo.

4-1. El tiempo transcurrido hasta que un proyectil regresa a la Tierra.

4-2. El número de veces que un transistor de la memoria de una computadora cambia de estado en una operación.

4-3. El volumen de gasolina que se pierde por evaporación durante el llenado del tanque de combustible.

4-4. El diámetro exterior de una flecha.

4-5. El número de baches mayores de media pulgada en un tramo de 10 millas de una carretera.

4-6. El peso de una pieza de plástico moldeada por inyección.

4-7. El número de moléculas en una muestra de gas.

4-2 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Es importante proporcionar un medio sencillo para describir la distribución de una variable aleatoria continua X. Supóngase que el rango de X es el intervalo $a \leq x \leq b$. Por desgracia, el método utilizado para describir la distribución de variables aleatorias discretas —listar cada valor en el rango junto con la probabilidad asociada con éste— es inapropiado cuando el rango de X contiene un intervalo de números reales. Sin embargo, es posible desarrollar una función que permita calcular probabilidades donde aparece X. Esta función es análoga a la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta. A continuación se toman algunas ideas del cálculo integral.

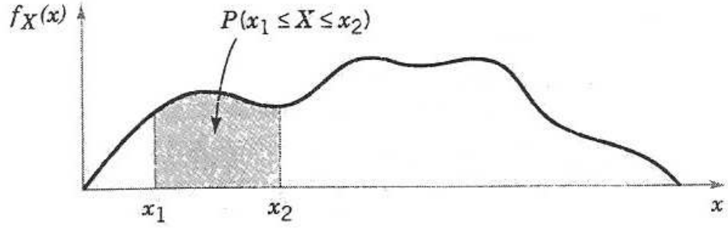
Si es posible desarrollar una descripción sencilla de la probabilidad de que X tome un valor de un subintervalo arbitrariamente pequeño de su rango, por ejemplo $[x_1, x_2]$, donde $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, entonces se puede empezar a describir la distribución de probabilidad de X. Supóngase que X denota mediciones de corriente, en miliamperes, y que el rango de X es $[0, 20]$. Si se subdivide el rango de X en 20 intervalos, cada uno con una longitud de un miliampere, y si, para cada intervalo, se establece un valor de probabilidad de que X tome algún valor en dicho intervalo, entonces se tiene una descripción aproximada de la distribución de X. Incluso es posible resumir las probabilidades con una función que proporcione la probabilidad asociada con cada intervalo.

Aún más, supóngase que el interés recae en la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo [14.5 mA, 14.6 mA]. En este caso, la aproximación original de la distribución de X es muy burda. Para dar respuesta a esta pregunta se necesitan intervalos de longitud 0.1 mA, así como otra función para asociar las probabilidades con los intervalos. El intento básico de describir la distribución de X de esta manera parece apropiado, pero la dificultad que aparece es que se necesita una fórmula nueva cada vez que se utilice una partición más fina del rango de X.

Un enfoque alternativo resuelve esta limitación. Es mucho más simple utilizar una sola función para generar las probabilidades de cualquier intervalo arbitrariamente pequeño. Un medio conveniente para describir la probabilidad de que X tome un valor en $[x_1, x_2]$ es definir una función, $f_X(x)$, sobre el rango de X tal que la probabilidad de que X tome un valor en $[x_1, x_2]$ sea igual al área bajo $f_X(x)$ entre x_1 y x_2. El subíndice de $f_X(x)$ es útil para distinguir la función de densidad de probabilidad en ejemplos posteriores, en los que se definen varias variables aleatorias.

El aspecto importante de todo esto es que **$f_X(x)$ se emplea para calcular un área** que representa la probabilidad de que X tome un valor en $[x_1, x_2]$. (Véase la figura 4-1*a*.) Por ejemplo, si se desea determinar la probabilidad de que X tome un valor en [14 mA, 15 mA], se integra $f_X(x)$ sobre este intervalo. Si el interés recae en calcular la probabilidad de que X tome algún valor en el intervalo [14.5 mA, 14.6 mA] entonces hay que integrar la misma función, $f_X(x)$, pero sobre un intervalo más pequeño. Con una elección apropiada de la forma de $f_X(x)$, es posible representar las probabilidades asociadas con cualquier subintervalo en el rango de X. La forma de $f_X(x)$ determina la manera en que la probabilidad de que X tome un valor en [14.5 mA, 14.6 mA] se compara con la probabilidad de cualquier otro intervalo de longitud igual o diferente.

Aunque la definición de probabilidades como áreas bajo una función parece poco usual a primera vista, la consideración cuidadosa del ejemplo del alambre de cobre indica la



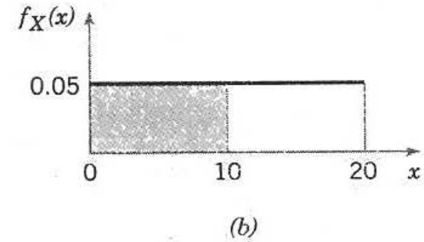


Figura 4-1*a* Probabilidad obtenida a partir del área bajo $f_X(x)$.

Figura 4-1*b* Función de densidad de probabilidad del ejemplo 4-1.

existencia de otros enfoques alternativos que no son tan simples o sensibles como el empleo de una sola función y el cálculo de áreas. Con cierta práctica, el concepto se vuelve más natural. Dado que la probabilidad de que X tome un valor en cualquier intervalo está determinada por $f_X(x)$, la distribución de probabilidad de X está especificada por la función $f_X(x)$. En consecuencia, $f_X(x)$ es el análogo de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

Definición

Una función $f_X(x)$ es una **función de densidad de probabilidad** de la variable aleatoria continua X si para cualquier intervalo de números reales $[x_1, x_2]$

(1) $f_X(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

(3) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(u)du$ (4-1)

La propiedad (1) es necesaria debido a que el resultado de una integración puede ser un número negativo si la función que se integra toma valores negativos, y a que una probabilidad nunca es negativa, esto es, $f_X(x) \geq 0$. La propiedad (2) se debe a que la probabilidad de que X tome algún valor dentro de su rango es uno.

La función de densidad de probabilidad también puede interpretarse de la siguiente manera. Sea Δx un intervalo pequeño en el rango de X. Entonces,

$$P(x - \Delta x/2 < X < x + \Delta x/2) = \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} f_X(u)du$$

El valor de esta integral es aproximadamente igual a $f_X(x)\Delta x$. Después de dividir ambos miembros entre Δx, se tiene que

$$f_X(x) = P(x - \Delta x/2 < X < x + \Delta x/2\ )/\Delta x.$$

El valor de $f_X(x)$ puede interpretarse como la probabilidad de que X tome un valor dentro de un intervalo pequeño de longitud Δx alrededor de x dividida entre la longitud del intervalo. Esto es, $f_X(x)$ puede interpretarse como la densidad de probabilidad alrededor del punto x.

Una consecuencia de que X sea una variable aleatoria continua es que, para *cualquier* valor en el rango de X, por ejemplo x,

$$P(X = x) = 0$$

Este resultado se desprende de inmediato del hecho de que

$$\int_x^x f_X(u)\,du = 0$$

De acuerdo con este resultado, puede parecer que el modelo presentado para una variable aleatoria continua no tiene utilidad. Sin embargo, en la práctica, cuando se observa una medición de corriente en particular, tal como 14.47 miliamperes, este resultado puede interpretarse como el valor redondeado de una medición de corriente que en realidad se encuentra en el rango $14.465 \le x \le 14.475$. Por tanto, la probabilidad de que el valor redondeado 14.47 sea observado como el valor de X es la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo [14.465, 14.475], el cual no es cero.

El hecho de que $P(X = x) = 0$ no excluye el que los modelos empleados sean útiles, si bien se requiere una interpretación cuidadosa de los resultados. De manera similar, el modelo de variable aleatoria continua implica lo siguiente.

Si X es una variable aleatoria continua, entonces, para cualquier x_1 y x_2,

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

EJEMPLO 4-1

Sea la variable aleatoria continua X la corriente medida en miliamperes, en un conductor delgado de cobre. Supóngase que el rango de X es [0, 20 mA] y que la función de densidad de probabilidad de X es $f_X(x) = 0.05$, $0 \le x \le 20$. ¿Cuál es la probabilidad de que una medición de corriente sea menor que 10 miliamperes?

La figura 4-1b ilustra la función de densidad. La probabilidad pedida está señalada con el área sombreada de la figura 4-1b.

$$P(X < 10) = \int_0^{10} f_X(x)\,dx = 0.5$$

10

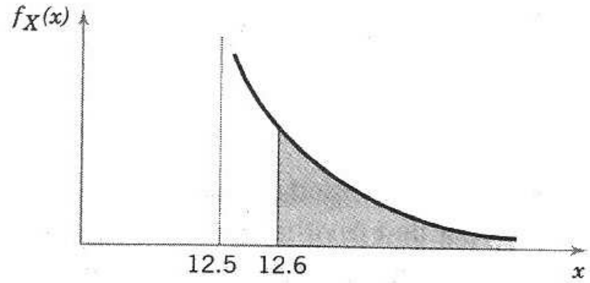


Figura 4-2 Función de densidad de probabilidad del ejemplo 4-2.

Como otro ejemplo,

$$P(5 < X < 15) = \int_{5}^{15} f_X(x)\, dx = 0.5$$

EJEMPLO 4-2

Sea la variable aleatoria continua X el diámetro de un agujero taladrado en una placa de metal. El diámetro requerido es 12.5 milímetros, pero muchas perturbaciones aleatorias en el proceso dan como resultado diámetros más grandes. La recopilación de datos indica que la distribución de X puede modelarse con la función de densidad de probabilidad $f_X(x) = 20\, e^{-20(x-12.5)}$, $x \geq 12.5$. Si se desechan las piezas que tienen un diámetro mayor que 12.60 milímetros, ¿qué proporción de piezas se espera desechar?

La función de densidad y la probabilidad pedida aparecen en la figura 4-2. Una pieza se desecha si $X > 12.60$. Entonces,

$$P(X > 12.60) = \int_{12.6}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_{12.6}^{\infty} 20e^{-20(x-12.5)}dx = -e^{-20(x-12.5)} \Big|_{12.6}^{\infty} = 0.135$$

¿Qué proporción de piezas tienen un diámetro entre 12.5 y 12.6 milímetros?

Ahora,

$$P(12.5 < X < 12.6) = \int_{12.5}^{12.6} f_X(x)\, dx = -e^{-20(x-12.5)} \Big|_{12.5}^{12.6} = 0.865$$

Sea R el rango de la variable aleatoria continua X. Es conveniente extender la definición de una función de densidad de probabilidad a todo el conjunto de números reales al hacer $f_X(x) = 0$, si x no está en R. Lo anterior no cambia ninguna de las interpretaciones o de los cálculos, pero ofrece un medio conveniente para tener cada función de densidad de probabilidad definida sobre todo el conjunto $-\infty < x < \infty$. Por ejemplo, la condición de que el área total bajo $f_X(x)$ sea uno puede expresarse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-2

4-8. Demuestre que las siguientes funciones son funciones de densidad de probabilidad para algún valor de k; determine el valor de k.

a. $f_X(x) = kx^2$ para $0 < x < 4$

b. $f_X(x) = k(1 + 2x)$ para $0 < x < 2$

c. $f_X(x) = k\,e^{-x}$ para $0 < x$

4-9. Suponga que $f_X(x) = e^{-x}$ para $0 < x$. Calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(1 < X)$

b. $P(1 < X < 2.5)$

c. $P(X = 3)$

d. $P(X < 4)$

e. $P(3 \leq X)$

4-10. Suponga que $f_X(x) = e^{-x}$ para $0 < x$.

a. Calcule un valor de x tal que $P(x < X) = 0.10$.

b. Calcule un valor de x tal que $P(X \leq x) = 0.10$.

4-11. Suponga que $f_X(x) = e^{-(x-4)}$ para $4 < x$. Calcule las siguientes probabilidades:

a. $P(1 < X)$

b. $P(2 \leq X < 5)$

c. $P(5 < X)$

d. $P(8 < X < 12)$

e. Calcule el valor de x tal que $P(X < x) = 0.90$.

4-12. Suponga que $f_X(x) = 1.5x^2$ para $-1 < x < 1$. Calcule las siguientes probabilidades.

a. $P(0 < X)$

b. $P(0.5 < X)$

c. $P(-0.5 \leq X \leq 0.5)$

d. $P(X < -2)$

e. $P(X < 0 \text{ o } X > -0.5)$

f. Calcule el valor de x tal que $P(x < X) = 0.05$.

4-13. La función de densidad de probabilidad del tiempo de falla (en horas) de un componente electrónico de una copiadora es $f_X(x) = \dfrac{e^{-x/1000}}{1000}$ para $x > 0$. Calcule la probabilidad de que

a. El componente tarde más de 3000 horas en fallar.

b. El componente falle en el lapso comprendido entre 1000 y 2000 horas.

c. El componente falle antes de 1000 horas.

d. Calcule el número de horas en las que fallarán el 10% de todos los componentes.

4-14. La función de densidad de probabilidad del peso neto en libras de un paquete de herbicida químico es $f_X(x) = 2.0$ para $49.75 < x < 50.25$ libras.

a. Calcule la probabilidad de que un paquete pese más de 50 libras.

b. ¿Cuánto herbicida está contenido en el 90% de los paquetes?

4-15. La función de densidad de probabilidad de la longitud de una bisagra para puertas es $f_X(x) = 1.25$ para $74.6 < x < 75.4$ milímetros. Calcule lo siguiente:

a. $P(X < 74.8)$

b. $P(X < 74.8$ o $X > 75.2)$

c. Si las especificaciones para este proceso son una longitud entre 74.7 y 75.3 milímetros, ¿cuál es la proporción de bisagras que cumple con las especificaciones?

4-16. La función de densidad de probabilidad de la longitud de una varilla de metal es $f_X(x) = 2$ para $2.3 < x < 2.8$ metros.

a. Si las especificaciones de la varilla en cuanto a la longitud es que debe tener entre 2.25 y 2.75 metros, ¿cuál es la proporción de varillas que no cumplen con este requerimiento?

b. Suponga que la función de densidad de probabilidad es $f_X(x) = 2$ para un intervalo de longitud igual a 0.5 metros. ¿Sobre qué valor debe centrarse la densidad para alcanzar la proporción más grande de varillas que cumplen con las especificaciones?

4-17. Si X es una variable aleatoria continua, proporcione argumentos que justifiquen lo siguiente: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$.

4-3 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

Para variables aleatorias continuas también puede emplearse un método alternativo de descripción de la distribución de una variable aleatoria discreta.

Definición

La **función de distribución acumulada** de una variable aleatoria continua X es

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \qquad (4\text{-}2)$$

para $-\infty < x < \infty$.

La extensión de la definición de $f_X(x)$ a todos los números reales, permite definir la función de distribución acumulada para todos los números reales. El ejemplo que sigue ilustra la definición.

EJEMPLO 4-3

Para la medición de corriente en el alambre de cobre del ejemplo 4-1, la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X está formada por tres expresiones. Si $x < 0$, entonces $f_X(x) = 0$. Por tanto,

$$F_X(x) = 0, \text{ para } x < 0$$

y

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u)\,du = 0.05x, \text{ para } 0 \le x < 20$$

Finalmente,

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u)\,du = 1, \text{ para } 20 \le x$$

Por consiguiente,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.05x & 0 \le x < 20 \\ 1 & 20 \le x \end{cases}$$

La figura 4-3 presenta la gráfica de $F_X(x)$.

Nótese que en la definición de $F_X(x)$ cualquier $<$ puede cambiarse por $\le$ y viceversa. Esto es, $F_X(x)$ puede definirse ya sea como $0.05x$ o 0 en el extremo $x = 0$, y como $0.05x$ o 1 en el extremo $x = 20$. En otras palabras, $F_X(x)$ es una función continua. Recuérdese que para una variable aleatoria discreta, $F_X(x)$ no es una función continua. Algunas veces se define a la variable aleatoria continua como aquella que tiene una función de distribución acumulada continua.

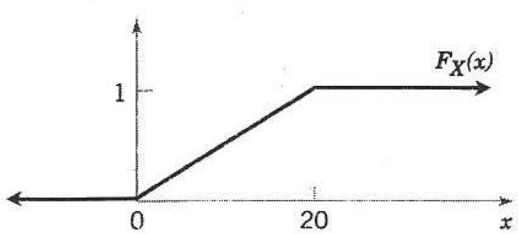


Figura 4-3 Función de distribución acumulada del ejemplo 4-3.

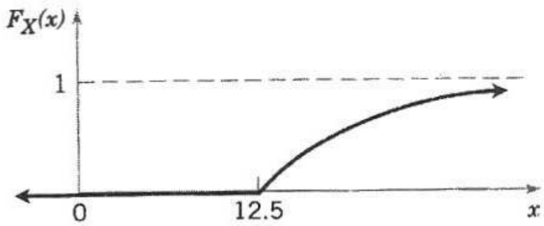


Figura 4-4 Función de distribución acumulada del ejemplo 4-4.

EJEMPLO 4-4

Para la operación de taladrado del ejemplo 4-2, $F_X(x)$ está dada por las siguientes exprcsiones.

$$F_X(x) = 0 \text{ para } x < 12.5$$

y

$$F_X(x) = \int_{12.5}^{x} 20e^{-20(u-12.5)}\, du$$
$$= 1 - e^{-20(x-12.5)}$$

para $12.5 \leq x$. En consecuencia,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 12.5 \\ 1 - e^{-20(x-12.5)} & 12.5 \leq x \end{cases}$$

La figura 4-4 presenta la gráfica de $F_X(x)$.

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua puede obtenerse a partir de la función de distribución acumulada mediante la operación de derivación. Esto es, dada $F_X(x)$, entonces

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

siempre y cuando exista la derivada.

EJEMPLO 4-5

El tiempo necesario (en milisegundos) para completar una reacción química está aproximado por la función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-0.01x} & 0 \geq x \end{cases}$$

Calcúlese la función de densidad de probabilidad de X. ¿Qué proporción de las reacciones están completas en 200 milisegundos?

Al emplear el resultado que establece que la función de densidad de probabilidad es la derivada de $F_X(x)$, se tiene que

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.01e^{-0.01x} & 0 \leq x \end{cases}$$

La probabilidad de que una reacción esté completa en el lapso de 200 milisegundos es

$$P(X < 200) = F_X(200) = 1 - e^{-2} = 0.8647.$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-3

4-18. Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2x & 0 \le x < 5 \\ 1 & 5 \le x \end{cases}$$

a. Calcule $P(X < 2.8)$.

b. Obtenga $P(X > 1.5)$.

c. Determine $P(X < -2)$.

d. Calcule $P(X > 6)$.

4-19. Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.25x + 0.5 & -2 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

a. Determine $P(X < 1.8)$.

b. Calcule $P(X > -1.5)$.

c. Obtenga $P(X < -2)$.

d. Determine $P(-1 < X < 1)$.

4-20. **Continuación del ejercicio 4-9.** Calcule la función de distribución acumulada de la distribución del ejercicio 4-9.

4-21. **Continuación del ejercicio 4-12.** Calcule la función de distribución acumulada de la distribución del ejercicio 4-12.

4-22. **Continuación del ejercicio 4-13.**

a. Calcule la función de distribución acumulada de la distribución del ejercicio 4-13.

b. Utilice la función de distribución acumulada para calcular la probabilidad de que un componente tarde más de 3000 horas en fallar.

4-23. **Continuación del ejercicio 4-14.**

a. Determine la función de distribución acumulada de la distribución del ejercicio 4-14.

b. Haga uso de la función de distribución acumulada para calcular la probabilidad de que un paquete pese menos de 50.1 libras.

c. Utilice la función de distribución acumulada para calcular la probabilidad de que un paquete pese entre 49.9 y 50.1 libras.

4-24. Determine la función de densidad de probabilidad asociada con cada una de las siguientes funciones de distribución acumulada.

a. $F(x) = 1 - e^{-2x}\ x > 0$

b.
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2x & 0 \le x < 4 \\ 0.04x + 0.64 & 4 \le x < 9 \\ 1 & 9 \le x \end{cases}$$

c.
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.25x + 0.5 & -2 \le x < 1 \\ 0.5\,x + 0.25 & 1 \le x < 1.5 \\ 1 & 1.5 \le x \end{cases}$$

4-25. El ancho del entrehierro es una propiedad importante de una cabeza de grabación magnética. En unidades codificadas, si el ancho es una variable aleatoria continua sobre el rango $0 < x < 2$ con $f_X(x) = 0.5x$, calcule la función de distribución acumulada del ancho del entrehierro.

4-4 VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

La media y la varianza de una variable aleatoria continua se definen de manera similar al caso de la variable aleatoria discreta. En las definiciones, la integración remplaza a la sumatoria.

Definición

Supóngase que X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$, $-\infty < x < \infty$.

La **media** de X, denotada por $E(X)$ o μ_X, es

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \tag{4-3}$$

La **varianza** de X, denotada por $V(X)$ o σ_X^2, es

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\, dx \tag{4-4}$$

Asimismo, la **desviación estándar** de X es $\sigma_X = [V(X)]^{1/2}$. (4-5)

EJEMPLO 4-6

Para la medición de corriente en el alambre de cobre del ejemplo 4-1, la media de X es

$$E(X) = \int_0^{20} x f_x(x)dx$$

$$= 0.05x^2/2 \Big|_0^{20} = 10$$

La varianza de X es

$$V(X) = \int_0^{20} (x - 10)^2 f_x(x)dx$$

$$= 0.05\,(x - 10)^3/3 \Big|_0^{20} = 33.33$$

EJEMPLO 4-7

Para la operación de taladrado del ejemplo 4-2, la media de X es

$$E(X) = \int_{12.5}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

Al integrar por partes puede demostrarse que

$$E(X) = -xe^{-20(x-12.5)} - \frac{e^{-20(x-12.5)}}{20} \Bigg|_{12.5}^{\infty}$$

$$= 12.5 + 0.05$$

$$= 12.55$$

La varianza de X es

$$V(X) = \int_{12.5}^{\infty} (x - 12.55)^2 f_X(x)\, dx$$

Después de integrar por partes dos veces, se tiene que

$$V(X) = 0.0025$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-4

4-26. Suponga que $f_X(x) = 0.25$ para $0 < x < 4$. Calcule la media y la varianza de X.

4-27. Suponga que $f_X(x) = 0.125x$ para $0 < x < 4$. Calcule la media y la varianza de X.

4-28. **Continuación del ejercicio 4-8.** Calcule la media de cada una de las tres funciones de densidad del ejercicio 4-8.

4-29. **Continuación del ejercicio 4-8.** Determine la varianza de cada una de las tres funciones de densidad del ejercicio 4-8.

4-30. **Continuación del ejercicio 4-13.** Obtenga la media y la varianza del tiempo de vida del componente electrónico del ejercicio 4-13.

4-31. **Continuación del ejercicio 4-14.** Calcule la media y la varianza del peso de los paquetes del ejercicio 4-14.

4-32. El espesor de un recubrimiento conductor, en micrometros, tiene una función de densidad $f(x) = 600x^{-2}$ para $100\ \mu m < x < 120\ \mu m$.

a. Calcule la media y la varianza del espesor del recubrimiento.

b. Si el costo del recubrimiento es 0.50 dólares por micrometro de espesor en cada pieza, ¿cuál es el costo promedio del recubrimiento por pieza?

4-33. Suponga que el tamaño de una partícula contaminante (en micrometros) puede modelarse con $f_X(x) = 2x^{-3}$ para $1 < x$. Calcule la media de X.

4-34. Se necesita integrar por partes. La función de densidad de probabilidad para el diámetro de un agujero taladrado, en milímetros, es $10e^{-10(x-5)}$ para $x > 5$ mm. Aunque el diámetro requerido es 5 mm, las vibraciones, el desgaste de la herramienta y otros factores producen diámetros mayores que cinco milímetros.

a. Calcule la media y la varianza del diámetro de los agujeros.

b. Obtenga la probabilidad de que un diámetro sea mayor que 5.1 milímetros.

4-35. Suponga que la función de densidad de probabilidad de la longitud de unos cables para computadora es $f_X(x) = 0.1$, desde 1200 hasta 1210 milímetros.

a. Calcule la media y la desviación estándar de la longitud del cable.

b. Si las especificaciones para la longitud son $1195 < x < 1205$ milímetros, ¿qué valor de la media da la mayor proporción de cables que cumplen con las especificaciones?

4-5 DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA

En las aplicaciones aparecen con mucha frecuencia varias distribuciones continuas. En las secciones siguientes del presente capítulo, se describen esas distribuciones y se dan ejemplos del cálculo de sus probabilidades, medias y varianzas.

La distribución continua más sencilla es análoga a su contraparte discreta.

Definición

Una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = 1/(b - a), \quad a \le x \le b$$

tiene una **distribución uniforme continua.**

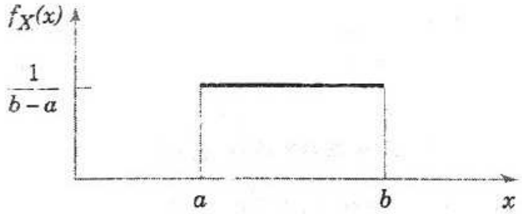


Figura 4-5 Función de densidad de probabilidad uniforme continua.

La figura 4-5 presenta la gráfica de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria uniforme continua.

La media de la variable aleatoria uniforme continua X es

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx \\
&= \left.\frac{0.5x^2}{b-a}\right|_a^b \\
&= (a+b)/2
\end{aligned}
$$

La varianza de X es

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_a^b \frac{\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2}{b-a}\,dx \\
&= \left.\frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)}\right|_a^b \\
&= (b-a)^2/12
\end{aligned}
$$

Estos resultados pueden resumirse de la siguiente manera.

La media y la varianza de una variable aleatoria uniforme continua X sobre $a \leq x \leq b$ están dadas por

$$\mu_X = E(X) = (a+b)/2 \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = (b-a)^2/12 \qquad (4\text{-}6)$$

EJEMPLO 4-8

Al igual que en el ejemplo 4-1, sea la variable aleatoria continua X la corriente medida, en miliamperes, en un alambre delgado de cobre. Supóngase que el rango de X es [0, 20 mA]

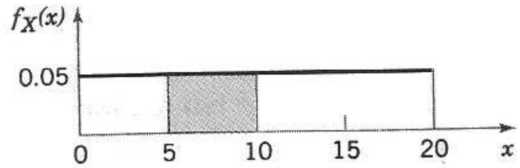


Figura 4-6 Probabilidad del ejemplo 4-8.

y que la función de densidad de probabilidad de X es $f_X(x) = 0.05$, $0 \leq x \leq 20$. ¿Cuál es la probabilidad de que una medición de corriente esté entre cinco y 10 miliamperes?

La probabilidad pedida es el área sombreada que aparece en la figura 4-6.

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} f_X(x)dx$$
$$= 5(0.05) = 0.25$$

Así mismo,

$$E(X) = 10 \text{ mA} \quad \text{y} \quad V(X) = 20^2/12 = 33.33 \text{ mA}^2$$

En consecuencia, la desviación estándar de X es 5.77 mA.

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria uniforme continua se obtiene por integración. Si $a < x < b$, entonces

$$F(x) = \int_a^x 1/(b - a)\, dx$$
$$= x/(b - a) - a/(b - a).$$

Por tanto, la descripción completa de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria uniforme continua es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x - a)/(b - a) & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-5

4-36. Suponga que X tiene una distribución uniforme continua en el intervalo [1.5, 5.5].

- **a.** Calcule la media, la varianza y la desviación estándar de X.
- **b.** ¿Cuál es el valor de $P(X < 2.5)$?

4-37. Suponga que X tiene una distribución uniforme continua en el intervalo [–1, 1].

- **a.** Obtenga la media, la varianza y la desviación estándar de X.
- **b.** Calcule el valor de x tal que $P(-x < X < x) = 0.90$.

4-38. **Continuación del ejercicio 4-14.** Calcule la media y la varianza del peso de los paquetes del ejemplo 4-14, mediante el empleo de los resultados para una distribución uniforme continua.

4-39. **Continuación del ejercicio 4-14.**

- **a.** Determine la función de distribución acumulada del peso de los paquetes del ejercicio 4-14.
- **b.** Calcule $P(X < 50.1)$.

4-40. El espesor del borde de un componente de una aeronave está distribuido de manera uniforme entre 0.95 y 1.05 milímetros. Obtenga la función de distribución acumulada del espesor del borde.

4-41. **Continuación del ejercicio 4-40.**

- **a.** Calcule la proporción de bordes cuyo espesor es mayor que 1.02 milímetros.
- **b.** ¿Qué espesor está excedido por el 90% de los bordes?
- **c.** Calcule la media y la varianza del espesor del borde.

4-42. El espesor de la capa de sustancia fotoprotectora que se aplica a las obleas en el proceso de fabricación de semiconductores en cierta área de la oblea, tiene una distribución uniforme entre 0.2050 y 0.2150 micrometros. Obtenga la función de distribución acumulada del espesor de la sustancia fotoprotectora.

4-43. **Continuación del ejercicio 4-42.**

- **a.** Calcule la proporción de obleas en las que el espesor de la sustancia es mayor que 0.2125 micrometros.
- **b.** ¿Qué espesor exceden el 10% de las obleas?
- **c.** Calcule la media y la varianza del espesor de la sustancia fotoprotectora.

4-44. La función de densidad de probabilidad del tiempo necesario para terminar una operación de ensamblado es $f_X(x) = 0.1$ para $30 < x < 40$ segundos.

- **a.** Calcule la proporción de ensambles que requieren más de 35 segundos para concluir la operación.
- **b.** ¿Qué tiempo de armado es que el excede el 90% de los ensambles?
- **c.** Calcule la media y la varianza del tiempo de ensamblado.

4-6 DISTRIBUCIÓN NORMAL

Sin lugar a dudas, la distribución más utilizada para modelar experimentos aleatorios es la **distribución normal**. Esta distribución puede obtenerse al considerar el modelo básico de una variable aleatoria binomial cuando el número de ensayos se vuelve cada vez más grande. Este fue el enfoque original seguido por De Moivre en 1733. Desafortunadamente, su trabajo se perdió por algún tiempo, y Karl Gauss desarrolló, de manera independiente, la distribución normal casi cien años después. Aunque más tarde se dio crédito a De Moivre, la distribución normal también se conoce como **distribución Gaussiana**.

EJEMPLO 4-9

Sea la variable aleatoria X el número de bits erróneos en un canal de comunicación digital. Supóngase que X es una variable aleatoria binomial con probabilidad de error p y un número total n de bits transmitidos. Sea la variable aleatoria Y la proporción de bits erróneos. Esto es, $Y = X/n$. De los resultados del capítulo 2, puede demostrarse que

$$E(Y) = p \quad \text{y} \quad V(Y) = \frac{p(1-p)}{n}$$

En consecuencia,

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Ahora supóngase que aumenta el número de bits transmitidos. Dado que la media de Y no depende de n, ésta seguirá siendo igual a p, aunque la desviación estándar de Y disminuye a medida que n aumenta. Ahora considérese la variable aleatoria $Z = (Y - p)/\sigma_Y$. De los resultados del capítulo 2, puede demostrarse que

$$E(Z) = 0 \quad \text{y} \quad V(Z) = \sigma_Z = 1$$

Esta variable aleatoria se considera como una versión "estandarizada" de Y, debido a que tiene media cero y desviación estándar uno. Ahora bien,

$$\begin{aligned} P(z < Z < z + \Delta z) &= P\left(z < \frac{Y-p}{\sigma_Y} < z + \Delta z\right) \\ &= P(z\sigma_Y < Y - p < (z + \Delta z)\sigma_Y) \end{aligned}$$

Si Δz es un número positivo pequeño, entonces esta probabilidad puede interpretarse como la probabilidad de que la proporción observada de errores, Y, sea diferente de la proporción promedio de los mismos, p, aproximadamente por z desviaciones estándar. Cuando n es grande, se espera que la proporción observada de errores esté próxima a p. Por ejemplo, se espera que la probabilidad de que Y esté aproximadamente a dos desviaciones estándar de p, sea menor que la probabilidad de que Y esté aproximadamente a una desviación estándar de p. Sin embargo, el resultado importante es el siguiente. Puede demostrarse que

$$\lim_{n \to \infty} P(z < Z < z + \Delta z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \tag{4-7}$$

El miembro derecho de la expresión anterior puede parecer poco usual y complejo, pero es el resultado de las sencillas hipótesis realizadas con respecto a los errores en el canal de comunicación. El miembro derecho de la ecuación 4-7 es un ejemplo de una **función de densidad de probabilidad normal.**

La importancia de la distribución normal se extiende más allá de proporcionar aproximaciones a las probabilidades binomiales. Por ejemplo, puede demostrarse que cada vez

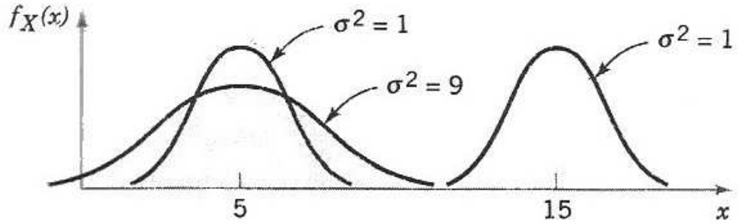


Figura 4-7 Funciones de densidad de probabilidad normal para distintos valores de los parámetros μ y σ^2.

que un experimento aleatorio está formado por una serie de ensayos independientes, donde cada uno da como resultado un valor observado de la variable aleatoria en particular, entonces la variable aleatoria que representa el resultado promedio (o total) en n ensayos tiende hacia una distribución con una función de densidad de probabilidad similar a la de la ecuación 4-7.

Por ejemplo, supóngase que la desviación de las especificaciones de una pieza maquinada se debe a la suma de un número muy grande de efectos infinitesimales, tales como cambios en la temperatura y la humedad, vibraciones, variaciones en el ángulo de corte, desgaste de la herramienta de corte, desgaste de los cojinetes, variaciones en la velocidad de rotación, variaciones de montaje y de la pieza de soporte, variaciones en las numerosas características de la materia prima, y variaciones en los niveles de contaminación. Por otra parte, si los errores en los componentes son independientes, pero con la misma probabilidad de ser positivos o negativos, entonces puede demostrarse que el error total tiene una distribución normal.

La distribución normal aparece en el estudio de muchos fenómenos físicos básicos. Por ejemplo, el físico James Maxwell desarrolló la distribución normal a partir de hipótesis muy sencillas con respecto a las velocidades de las moléculas.

Definición

Una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x;\, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

tiene una **distribución normal** con parámetros μ, donde $-\infty < \mu < \infty$, y $\sigma > 0$. Asimismo,

$$E(X) = \mu \quad \text{y} \quad V(X) = \sigma^2$$

La deducción de la media y la varianza de una variable aleatoria normal aparece al final de esta sección. Los valores de μ y σ determinan la forma de la función de densidad de probabilidad. La figura 4-7 ilustra varias funciones de densidad de probabilidad normal con distintos valores de los parámetros. La función de densidad de probabilidad es una curva simétrica con forma de campana. El valor de μ determina el centro de la función de densidad de probabilidad, mientras que el de σ determina la dispersión. Es evidente que $f_X(x;\, \mu, \sigma)$ es no negativa. Puede demostrarse que el área bajo $f_X(x;\, \mu, \sigma)$ en el intervalo

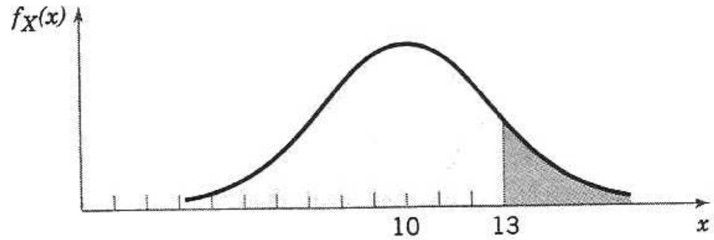


Figura 4-8 Probabilidad de que $X > 13$ para la variable aleatoria normal con $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 4$ del ejemplo 4-10.

$-\infty < x < \infty$ es uno. El valor máximo de la función de densidad de probabilidad es $(\sqrt{2\pi}\sigma)^1$, el cual se presenta en $x = \mu$.

EJEMPLO 4-10

Supóngase que las mediciones de corriente en una tira de alambre tienen una distribución normal con una media de 10 miliamperes y una varianza de 4 (miliamperes)^2. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de una medición sea mayor que 13 miliamperes?

Sea X la corriente en miliamperes. La probabilidad pedida puede representarse por $P(X > 13)$. Esta probabilidad aparece como el área sombreada bajo la función de densidad de probabilidad normal de la figura 4-8. Desafortunadamente, no existe una expresión en forma cerrada para la integral de una función de densidad de probabilidad normal, por lo que es común encontrar en forma numérica las probabilidades basadas en la distribución normal.

La figura 4-9 presenta un resumen de varios resultados útiles relacionados con la distribución normal. Para cualquier variable aleatoria normal,

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

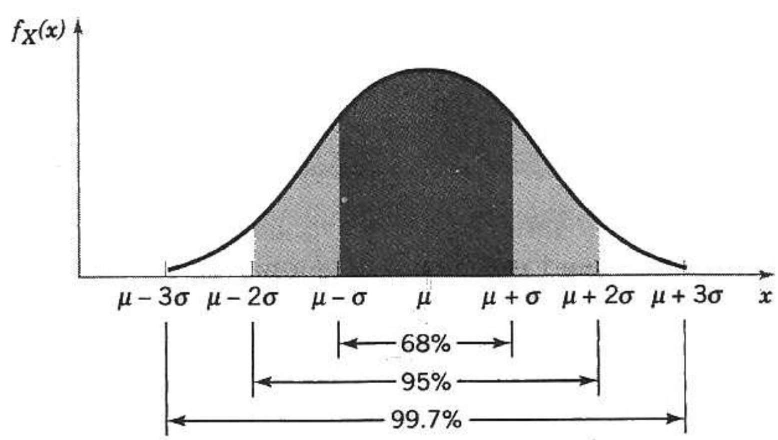
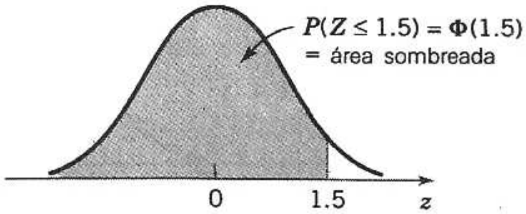


Figura 4-9 Probabilidades asociadas con una distribución normal.



z	0.00	0.01	0.02
0	0.50000	0.50399	0.50398
⋮		⋮	
1.5	0.93319	0.93448	0.93524

Figura 4-10 Función de densidad de probabilidad normal estándar.

La función de densidad de probabilidad normal siempre es positiva, y siempre existe alguna probabilidad asociada con cualquier intervalo de números reales. De la simetría de la distribución, $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 0.5$.

Debido a que más del 0.9973 de la probabilidad de una distribución normal está comprendida en el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$, *a menudo se hace referencia a la cantidad 6σ como el ancho de una distribución normal.* El área bajo una función de densidad de probabilidad normal que está más allá de 3σ de la media es muy pequeña. Este hecho resulta ser muy conveniente cuando se trata de esbozar con rapidez una función de densidad de probabilidad normal. El esbozo constituye un buen auxiliar cuando llega el momento de calcular probabilidades.

Definición

Una variable aleatoria normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ recibe el nombre de **variable aleatoria normal estándar** y se denota como Z.

La tabla II del apéndice proporciona las probabilidades acumuladas para una variable aleatoria normal estándar. Los siguientes ejemplos ilustran el empleo de esa tabla.

EJEMPLO 4-11

Supóngase que Z es una variable aleatoria normal estándar. La tabla II del apéndice proporciona probabilidades de la forma $P(Z \leq z)$. La figura 4-10 ilustra el empleo de la tabla II para encontrar $P(Z \geq 1.5)$. Primero se localiza en la columna z el renglón donde aparece 1.5. La probabilidad asociada con este valor está en la columna adyacente, la cual tiene la etiqueta 0.00, y es 0.93319.

Los encabezados de columna se refieren al dígito que ocupa el lugar de las centésimas en el valor de z en $P(Z \leq z)$. Por ejemplo, $P(Z \leq 1.53)$ se obtiene al localizar en la columna z el renglón donde aparece 1.5, y luego al seleccionar la probabilidad de la columna que tiene la etiqueta 0.03, valor que en este caso es 0.93699.

Las probabilidades que no tienen la forma $P(Z \leq z)$ se obtienen con el empleo de las reglas básicas de la probabilidad y de la simetría de la distribución normal, junto con la tabla II del apéndice. Los ejemplos que siguen ilustran este método.

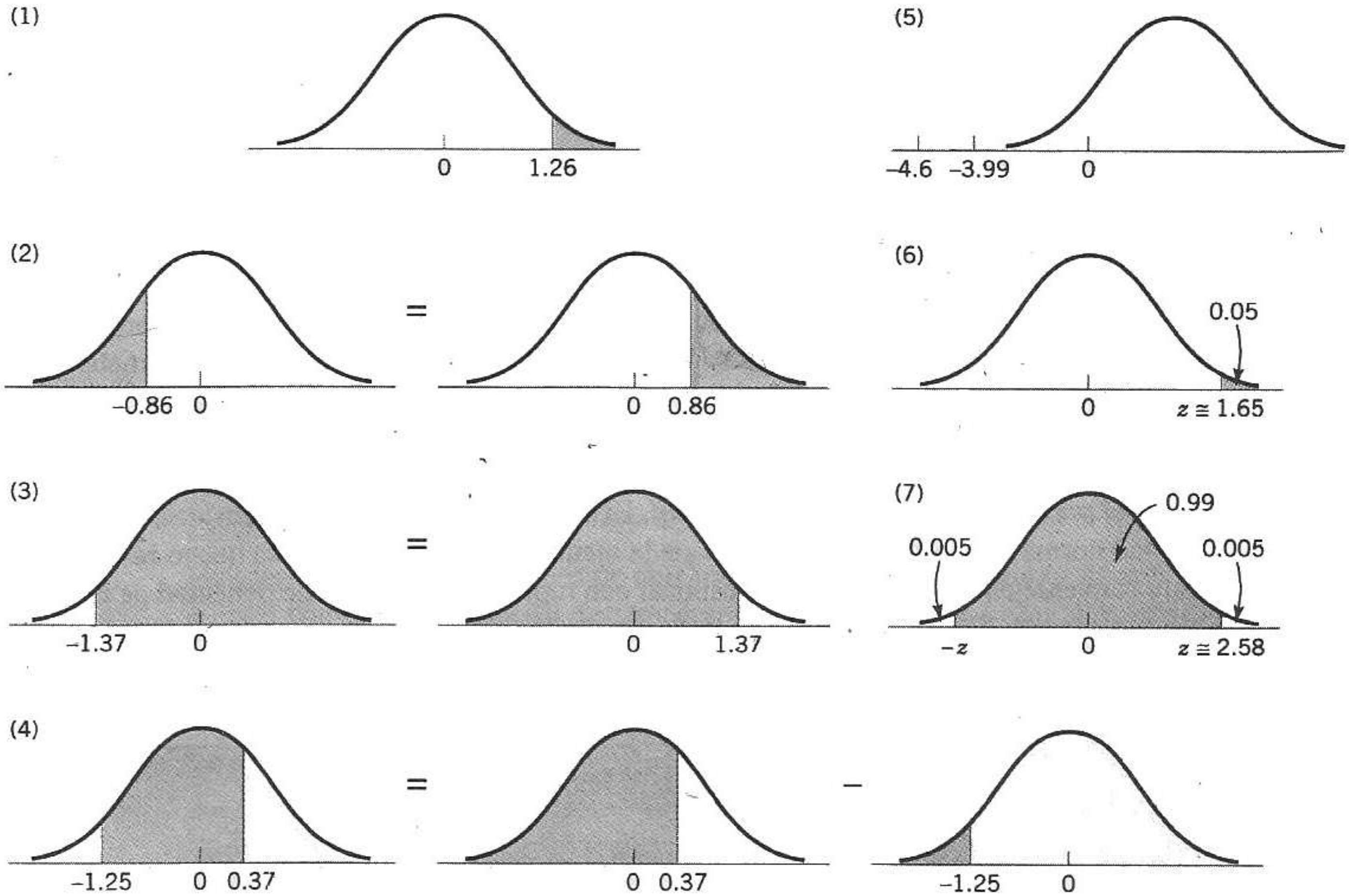


Figura 4-11 Gráficas para el ejemplo 4-12.

EJEMPLO 4-12

Los cálculos siguientes están ilustrados de manera gráfica en la figura 4-11. A menudo, en la práctica, una probabilidad se redondea a una o dos cifras significativas.

(1) $P(Z > 1.26) = 1 - P(Z \leq 1.26) = 1 - 0.89616 = 0.10384$

(2) ¿Cuál es el valor de $P(Z < -0.86)$? De la propiedad de simetría, esta probabilidad es igual a $P(Z > 0.86) = 1 - P(Z < 0.86) = 1 - 0.80510 = 0.19490$.

(3) $P(Z > -1.37) = P(Z < 1.37) = 0.91465$.

(4) $P(-1.25 < Z < 0.37)$. Esta probabilidad puede calcularse como la diferencia de dos áreas, $P(Z < 0.37) - P(Z < -1.25)$. Ahora bien,

$$P(Z < 0.37) = 0.64431$$

y

$$P(Z < -1.25) = P(Z > 1.25) = 1 - 0.89435 = 0.10565$$

Por consiguiente,

$$P(-1.25 < Z < 0.37) = 0.64431 - 0.10565 = 0.53866$$

(5) $P(Z \le -4.6)$ no puede hallarse de manera exacta en la tabla II. Sin embargo, la última entrada de la tabla puede emplearse para encontrar que $P(Z \le 3.99) = 0.99997$. En consecuencia, $P(Z \le -3.99) = 1 - 0.99997 = 0.00003$. Dado que $P(Z \le -4.6) < P(Z \le -3.99)$, entonces $P(Z \le -4.6)$ es casi cero.

(6) Encuéntrese el valor de z tal que $P(Z > z) = 0.05$. Esta expresión para la probabilidad puede escribirse como $P(Z \le z) = 0.95$. En este caso la tabla II se emplea al revés. Se busca en todas las probabilidades para determinar qué valor corresponde a 0.95. La figura 4-11 ilustra la solución. El valor 0.95 no se encuentra de manera exacta en la tabla; el valor más cercano es 0.95053, el cual corresponde a $z = 1.65$.

(7) Encuentre el valor de z tal que $P(-z < Z < z) = 0.99$. Debido a la simetría de la distribución normal, si el área de la región sombreada de la figura 4-11(7) es igual a 0.99, entonces el área en la cola de cada extremo de la distribución debe ser igual a 0.005. Por tanto, el valor de z corresponde a una probabilidad de 0.995 en la tabla II. La probabilidad más cercana en la tabla II es 0.99506, la cual se tiene cuando $z = 2.58$.

Los ejemplos anteriores son útiles para encontrar las probabilidades que corresponden a variables aleatorias normales estándar. Pero el empleo de este mismo enfoque para una variable aleatoria normal arbitraria, requeriría una tabla separada para cualquier par posible de valores para μ y σ. Por fortuna todas las distribuciones de probabilidad normales están relacionadas de manera algebraica, de modo que la tabla II del apéndice puede emplearse para encontrar las probabilidades asociadas con una variable aleatoria normal arbitraria si primero se hace uso de una transformación sencilla.

Si X es una variable aleatoria normal con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, entonces la variable aleatoria

$$Z = (X - \mu)/\sigma$$

es una variable aleatoria normal con $E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$. Esto es, Z es una variable aleatoria normal estándar.

El resultado para la media y la varianza de Z puede obtenerse de manera directa a partir de las definiciones. La creación de una nueva variable aleatoria con esta transformación se conoce como **estandarización**. La variable aleatoria Z representa la distancia de X a partir de su media en términos de desviaciones estándar. Esto tiene mucha utilidad en el análisis de probabilidades asociadas con una variable aleatoria normal arbitraria.

EJEMPLO 4-13

Supóngase que las mediciones de corriente realizadas en una pista de alambre conductor siguen una distribución normal con media de 10 miliamperes y varianza de 4 (miliamperes)^2.

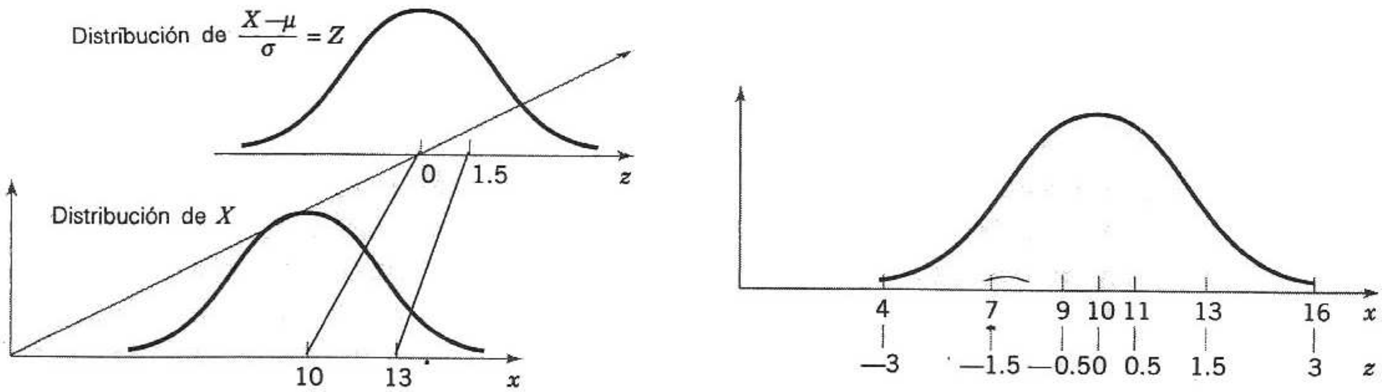


Figura 4-12 Estandarización de una variable aleatoria normal.

¿Cuál es la probabilidad de que el valor de una medición sea mayor que 13 miliamperes?

Sea X la corriente en miliamperes. La probabilidad pedida puede representarse como $P(X > 13)$. Sea $Z = (X - 10)/2$. La figura 4-12 indica la relación que existe entre varios valores de X y los valores transformados de Z. Nótese que $X > 13$ corresponde a $Z > 1.5$. En consecuencia, de la tabla II,

$$P(X > 13) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.93319 = 0.06681$$

En lugar de hacer uso de la figura 4-12, la probabilidad puede hallarse mediante una transformación algebraica de la desigualdad $X > 13$. Esto es,

$$P(X > 13) = P((X - 10)/2 > (13 - 10)/2) = P(Z > 1.5) = 0.06681$$

En el ejemplo anterior, el valor 13 se transforma en 1.5 mediante la estandarización, y 1.5 se conoce con frecuencia como el **valor z** asociado con una probabilidad.

El recuadro siguiente contiene un resumen del cálculo de probabilidades para variables aleatorias normales.

Suponga que X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2. Entonces,

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq z)$$

donde

Z es una **variable aleatoria normal estándar**, y
$z = (x - \mu)/\sigma$ es el **valor z** obtenido a través de la **estandarización** de X.

La probabilidad se obtiene de la **tabla II** del **apéndice** con $z = (x - \mu)/\sigma$.

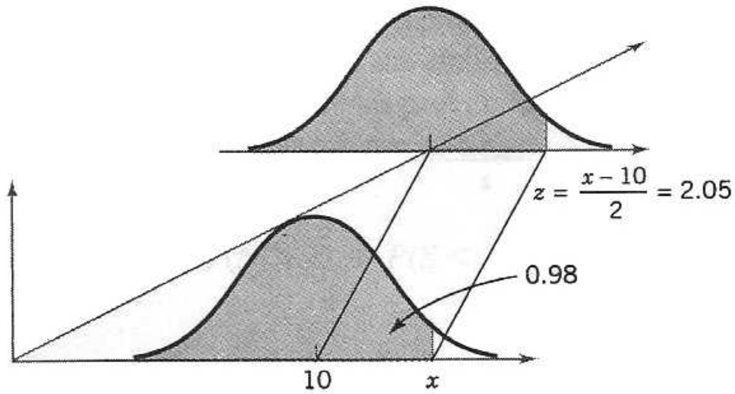


Figura 4-13 Determinación del valor de z que cumple con una probabilidad específica.

EJEMPLO 4-14

Continuando con el ejemplo 4-13, ¿cuál es la probabilidad de que el valor de una medición de corriente esté entre 9 y 11 miliamperes?

De la figura 4-12, o de manera algebraica, se tiene que

$$\begin{aligned} P(9 < X < 11) &= P((9 - 10)/2 < (X - 10)/2 < (11 - 10)/2) \\ &= P(-0.5 < Z < 0.5) \\ &= P(Z < 0.5) - P(Z < -0.5) \\ &= 0.69146 - [1 - P(Z < 0.5)] \\ &= 0.38292 \end{aligned}$$

¿Cuál es el valor para el que la probabilidad de que la medición de corriente tenga una magnitud menor que éste sea 0.98?

En la figura 4-13 se muestra de manera gráfica el valor pedido. Es necesario encontrar un valor de x tal que $P(X < x) = 0.98$.

Al estandarizar, la probabilidad anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P((X - 10)/2 < (x - 10)/2) \\ &= P(Z < (x - 10)/2) \\ &= 0.98 \end{aligned}$$

La tabla II se utiliza para encontrar el valor de z tal que $P(Z < z) = 0.98$. De la tabla II, la probabilidad más cercana es

$$P(Z < 2.05) = 0.97982$$

Por consiguiente, $(x - 10)/2 = 2.05$, lo que permite determinar el valor de x. El resultado es

$$x = 2(2.05) + 10 = 14.1 \text{ miliamperes}$$

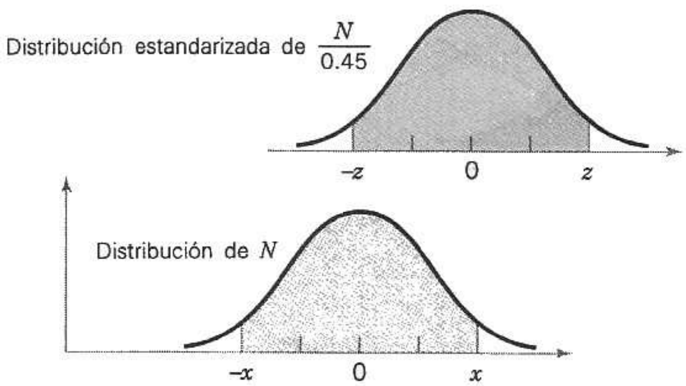


Figura 4-14 Determinación del valor de x que cumple con una probabilidad específica.

EJEMPLO 4-15

Supóngase que en la detección de una señal digital, el ruido de fondo tiene una distribución normal con media de 0 volts y desviación estándar de 0.45 volts. Si el sistema supone que se ha transmitido un uno digital cuando el voltaje es mayor que 0.9 volts, ¿cuál es la probabilidad de detectar uno digital cuando en realidad no se ha enviado ninguno?

Sea la variable aleatoria N el voltaje de ruido. La probabilidad pedida es

$$P(N > 0.9) = P\left(\frac{N}{0.45} > \frac{0.9}{0.45}\right) = P(Z > 2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$$

Esta probabilidad puede describirse como la probabilidad de una detección falsa.

Determínense las cotas simétricas alrededor de 0 que incluyen el 99% de todas las lecturas de ruido. La pregunta pide encontrar un valor de x tal que $P(-x < N < x) = 0.99$. La figura 4-14 contiene gráficas que ilustran esta situación. Ahora bien,

$$\begin{aligned} P(-x < N < x) &= P(-x/0.45 < N/0.45 < x/0.45) \\ &= P(-x/0.45 < Z < x/0.45) = 0.99 \end{aligned}$$

De la tabla II

$$P(-2.58 < Z < 2.58) = 0.99$$

Por tanto,

$$x/0.45 = 2.58$$

y

$$x = 2.58(0.45) = 1.16$$

Supóngase que un digital está representado como un corrimiento hasta 1.8 volts en la media de la distribución del ruido. ¿Cuál es la probabilidad de no detectar un uno digital?

Sea la variable aleatoria S el voltaje cuando se transmite un uno digital. Entonces,

$$\begin{aligned} P(S < 0.9) &= P\left(\frac{S - 1.8}{0.45} < \frac{0.9 - 1.8}{0.45}\right) \\ &= P(Z < -2) \\ &= 1 - 0.97725 = 0.02275 \end{aligned}$$

Esta probabilidad puede interpretarse como la probabilidad de una detección omitida.

Encuéntrese un valor de umbral para distinguir entre un cero digital y un uno digital que minimice la suma de las probabilidades de una detección omitida y una detección falsa.

Es necesario seleccionar el umbral, denotado por x, que minimice

$$P(N > x) + P(S < x) = P\left(Z > \frac{x}{0.45}\right) + P\left(Z < \frac{x-1.8}{0.45}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{-x}{0.45}\right) + P\left(Z < \frac{x-1.8}{0.45}\right)$$

Se puede derivar esta expresión con respecto a x al escribir las probabilidades como integrales y hacer uso del teorema fundamental del cálculo.

$$\frac{dP\left(Z < \frac{x-1.8}{0.45}\right)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{(x-1.8)/0.45} f_Z(z; 0, 1)\, dz$$

$$= \frac{e^{\frac{-(x-1.8)^2}{2(0.45^2)}}}{\sqrt{2\pi}\, 0.45}$$

$$\frac{dP\left(Z < \frac{-x}{0.45}\right)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{-x/0.45} f_Z(z; 0, 1)\, dz$$

$$= \frac{e^{\frac{-x^2}{2(0.45^2)}}}{\sqrt{2\pi}\, 0.45}$$

Después de hacer la derivada igual con cero y resolver para x la expresión resultante, el valor donde se tiene el mínimo es

$$x = 0.9$$

Esto es, para minimizar la suma de las probabilidades de los dos errores, la mejor elección para el umbral de detección es la mitad entre la media de un uno digital y la media de un cero digital.

EJEMPLO 4-16

El diámetro del eje de una unidad de almacenamiento óptico tiene una distribución normal con media 0.2508 pulgadas y desviación estándar de 0.0005 pulgadas. Las especificaciones del diámetro del eje son 0.2500 ± 0.0015 pulgadas. ¿Qué proporción de ejes cumple con este requisito?

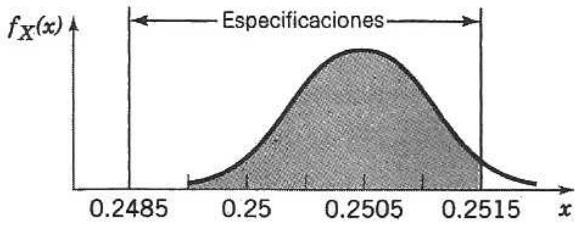


Figura 4-15 Distribución del ejemplo 4-16.

Sea X el diámetro del eje en pulgadas. La probabilidad pedida se indica en la figura 4-15, y

$$\begin{aligned}
P(0.2485 < X < 0.2515) &= P\left(\frac{0.2485 - 0.2508}{0.0005} < Z < \frac{0.2515 - 0.2508}{0.0005}\right) \\
&= P(-4.6 < Z < 1.4) \\
&= P(Z < 1.4) - P(Z < -4.6) \\
&= 0.91924 - 0.0000 \\
&= 0.91924
\end{aligned}$$

La mayor parte de los ejes que no cumplen con las especificaciones son muy grandes porque la media del proceso está localizada muy cerca del límite superior de la especificación. Si el proceso se centra de modo que su media sea igual al valor deseado, 0.2500, entonces

$$\begin{aligned}
P(0.2485 < X < 0.2515) &= P\left(\frac{0.2485 - 0.2500}{0.0005} < Z < \frac{0.2515 - 0.2500}{0.0005}\right) \\
&= P(-3 < Z < 3) \\
&= P(Z < 3) - P(Z < -3) \\
&= 0.99865 - 0.00135 \\
&= 0.9973
\end{aligned}$$

Al reubicar el proceso, la producción aceptable aumenta en 99.73%.

La tabla II del apéndice puede interpretarse como la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar.

Definición

La **función de distribución acumulada** de una variable aleatoria normal estándar se denota como

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) \tag{4-8}$$

En consecuencia, la tabla II proporciona los valores de $\Phi(z)$ para una selección de valores de z.

En lo que sigue, la media y la varianza de una variable aleatoria normal están representadas por μ y σ^2, respectivamente.

Ahora bien,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$$

Con el cambio de variable $y = (x - \mu)/\sigma$, la integral se convierte en

$$E(X) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

La primera integral de la expresión anterior es igual a 1, ya que $\dfrac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ es una función de densidad de probabilidad; el valor de la segunda integral es cero, resultado que puede obtenerse de manera formal con el cambio de variable $u = \dfrac{-y^2}{2}$ o con un argumento basado en la simetría del integrando alrededor de $y = 0$. Por tanto, $E(X) = \mu$.

La varianza de X es

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$$

Con el cambio de variable $y = (x - \mu)/\sigma$, la integral se convierte en

$$V(X) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Después de integrar por partes con $u = y$ y $dv = y \dfrac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$, se tiene que $V(X)$ es σ^2.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-6

4-45. Utilice la tabla II del apéndice para calcular las probabilidades siguientes para la variable aleatoria normal estándar Z.

- **a.** $P(Z < 1.32)$
- **b.** $P(Z < 3.0)$
- **c.** $P(Z > 1.45)$
- **d.** $P(Z > -2.15)$
- **e.** $P(-2.34 < Z < 1.76)$

4-46. Utilice la tabla II del apéndice para calcular las siguientes probabilidades para la variable aleatoria normal estándar Z.

a. $P(-1 < Z < 1)$
b. $P(-2 < Z < 2)$
c. $P(-3 < Z < 3)$
d. $P(Z > 3)$
e. $P(0 < Z < 1)$

4-47. Suponga que Z tiene una distribución normal estándar. Utilice la tabla II del apéndice para determinar el valor de z que resuelve cada una de las siguientes probabilidades:

a. $P(Z < z) = 0.9$
b. $P(Z < z) = 0.5$
c. $P(Z > z) = 0.1$
d. $P(Z > z) = 0.9$
e. $P(-1.24 < Z < z) = 0.8$

4-48. Suponga que Z tiene una distribución normal estándar. Utilice la tabla II del apéndice para determinar el valor de z que resuelve cada una de las siguientes probabilidades:

a. $P(-z < Z < z) = 0.95$
b. $P(-z < Z < z) = 0.99$
c. $P(-z < Z < z) = 0.68$
d. $P(-z < Z < z) = 0.9973$

4-49. Suponga que X tiene una distribución normal con media 10 y desviación estándar 2. Calcule lo siguiente:

a. $P(X < 13)$
b. $P(X > 9)$
c. $P(6 < X < 14)$
d. $P(2 < X < 4)$
e. $P(-2 < X < 8)$

4-50. Suponga que X tiene una distribución normal con media 10 y desviación estándar 2. Calcule el valor de x que resuelve cada una de las siguientes probabilidades:

a. $P(X > x) = 0.5$
b. $P(X > x) = 0.95$
c. $P(x < X < 10) = 0.2$
d. $P(-x < X - 10 < x) = 0.95$
e. $P(-x < X - 10 < x) = 0.99$

4-51. Suponga que X tiene una distribución normal con media 5 y desviación estándar 4. Calcule lo siguiente:

a. $P(X < 11)$
b. $P(X > 0)$
c. $P(3 < X < 7)$
d. $P(-2 < X < 9)$
e. $P(2 < X < 8)$

4-52. Suponga que X tiene una distribución normal con media 5 y desviación estándar 4. Obtenga el valor de x que resuelve cada una de las siguientes probabilidades:

a. $P(X > x) = 0.5$
b. $P(X > x) = 0.95$
c. $P(x < X < 9) = 0.2$
d. $P(3 < X < x) = 0.95$
e. $P(-x < X < x) = 0.99$

4-53. La resistencia a la compresión de una serie de muestras de cemento puede modelarse con una distribución normal con media 6000 kilogramos por centímetro cuadrado, y una desviación estándar de 100 kilogramos por centímetro cuadrado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia de una muestra sea menor que 6250 kg/cm^2?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia de una muestra se encuentre entre 5800 y 5900 kg/cm^2?
c. ¿Cuál es el valor de resistencia que excede el 95% de las muestras?

4-54. La resistencia a la tracción de un papel está modelada por una distribución normal con media 35 libras por pulgada cuadrada, y desviación estándar de 2 libras por pulgada cuadrada.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia de una muestra sea menor que 40 lb/in^2?
b. Si las especificaciones requieren que la resistencia sea mayor que 30 lb/in^2, ¿qué proporción de las muestras será desechada?

4-55. Se supone que el ancho de una herramienta utilizada en la fabricación de semiconductores tiene una distribución normal con media 0.5 micrometros y desviación estándar de 0.05 micrometros.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el ancho de la herramienta sea mayor que 0.62 micrometros?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el ancho de la herramienta se encuentre entre 0.47 y 0.63 micrometros?
c. ¿Debajo de qué valor está el ancho de la herramienta en el 90% de las muestras?

4-56. El volumen que una máquina de llenado automático deposita en latas de una bebida gaseosa tiene una distribución normal con media 12.4 onzas de líquido y desviación estándar de 0.1 onzas de líquido.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen depositado sea menor que 12 onzas de líquido?
b. Si se desechan todas las latas que tienen menos de 12.1 o más de 12.6 onzas de líquido, ¿cuál es la proporción de latas desechadas?

c. Calcule especificaciones que sean simétricas alrededor de la media, de modo que se incluya al 99% de todas las latas.

4-57. **Continuación del ejercicio 4-56.** La media de la operación de llenado puede ajustarse con facilidad, pero la desviación estándar sigue teniendo el mismo valor, 0.1 onzas de líquido.

a. ¿Qué valor debe darse a la media para que el 99.9% de todas las latas contengan más de 12 onzas de líquido?

b. ¿Qué valor debe darse a la media para que el 99.9% de todas las latas contengan más de 12 onzas de líquido si la desviación estándar puede reducirse a 0.05 onzas de líquido?

4-58. El tiempo de reacción de un conductor a un estímulo visual tiene una distribución normal con media 0.4 segundos y desviación estándar de 0.05 segundos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el conductor reaccione en más de 0.5 segundos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de reacción esté entre 0.4 y 0.5 segundos?

c. ¿Cuál es el tiempo de reacción que se espera exceder el 90% de las veces?

4-59. La longitud de un estuche moldeado por inyección para una cinta magnética tiene una distribución normal con una media de 90.2 milímetros y desviación estándar de 0.1 milímetros.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de una pieza sea mayor que 90.3 milímetros o menor que 89.7 milímetros?

b. ¿A qué valor debe ajustarse la media del proceso para que el mayor número de partes tenga una longitud entre 89.7 y 90.3 milímetros?

c. Si se desechan los estuches cuya longitud no está entre 89.7 y 90.3 milímetros, ¿cuál es el rendimiento del proceso para el valor de la media determinado en el inciso **b**)?

4-60. **Continuación del ejercicio 4-59.** Suponga que el proceso se ajusta de modo que la media y la desviación estándar queden en 90 y 0.1 milímetros, respectivamente. Suponga que se mide la longitud de 10 estuches y que las mediciones son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de los 10 estuches esté entre 89.7 y 90.3 milímetros?

b. ¿Cuál es el número esperado de los 10 estuches cuya longitud esté entre 89.7 y 90.3 milímetros?

4-61. El tiempo de incapacidad por enfermedad de los empleados de una compañía en un mes tiene una distribución normal con media 100 horas y desviación estándar de 20 horas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo por incapacidad del siguiente mes se encuentre entre 50 y 80 horas?

b. ¿Cuánto tiempo de incapacidad deberá planearse para que la probabilidad de excederlo sea sólo del 10%?

4-62. La duración de un láser semiconductor a potencia constante tiene una distribución normal con media 7000 horas y desviación estándar de 600 horas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el láser falle antes de 5000 horas?

b. ¿Cuál es la duración en horas excedida por el 95% de los láseres?

c. Si se hace uso de tres láseres en un producto y se supone que fallan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sigan funcionando después de 7000 horas?

4-63. El diámetro del punto producido por una impresora tiene una distribución normal con media de 0.002 pulgadas y desviación estándar de 0.0004 pulgadas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro del punto sea mayor que 0.0026 pulgadas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro del punto esté entre 0.0014 y 0.0026 pulgadas?

c. ¿Qué valor debe tener la desviación estándar del diámetro para que la probabilidad del inciso **b**) sea 0.995?

4-64. El peso de un moderno zapato deportivo para correr tiene una distribución normal con media 12 onzas y desviación estándar de 0.5 onzas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el zapato pese más de 13 onzas?

b. ¿Cuál debe ser la desviación estándar del peso para que la compañía que los produce pueda garantizar que el 99.9% de los zapatos tienen un peso menor que 13 onzas?

c. Si la desviación estándar permanece en 0.5 onzas, ¿cuál debe ser el peso promedio de los zapatos para que la compañía pueda afirmar que el 99.9% de ellos pesa menos de 13 onzas?

4-7 APROXIMACIÓN NORMAL A LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y POISSON

Esta sección sobre la distribución normal comienza con un desarrollo de ésta como una aproximación de la variable aleatoria binomial con un número grande de ensayos. Como consecuencia de esto, no debe sorprender el hecho de que la distribución normal se utilice para aproximar probabilidades binomiales en casos donde n es grande. El ejemplo siguiente ilustra el hecho de que, para muchos sistemas físicos el modelo binomial resulta apropiado cuando el valor de n es extremadamente grande. En estos casos es difícil calcular las probabilidades con el empleo de la distribución binomial; por fortuna, la aproximación normal es más eficaz en estos casos. La figura 4-16 proporciona una ilustración de esto.

EJEMPLO 4-17

Supóngase que, en un canal de comunicación digital, el número de bits que se reciben de manera errónea puede modelarse con una variable aleatoria binomial, y que la probabilidad de recibir un bit de manera errónea es 1×10^{-5}. Si se transmiten 16 millones de bits, ¿cuál es la probabilidad de que se presenten más de 150 errores?

Sea la variable aleatoria X el número de errores. Entonces X es una variable aleatoria binomial y

$$\begin{aligned} P(X > 150) &= 1 - P(X \leq 150) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{150} \binom{16\,000\,000}{x} (10^{-5})^x (1 - 10^{-5})^{16\,000\,000 - x} \end{aligned}$$

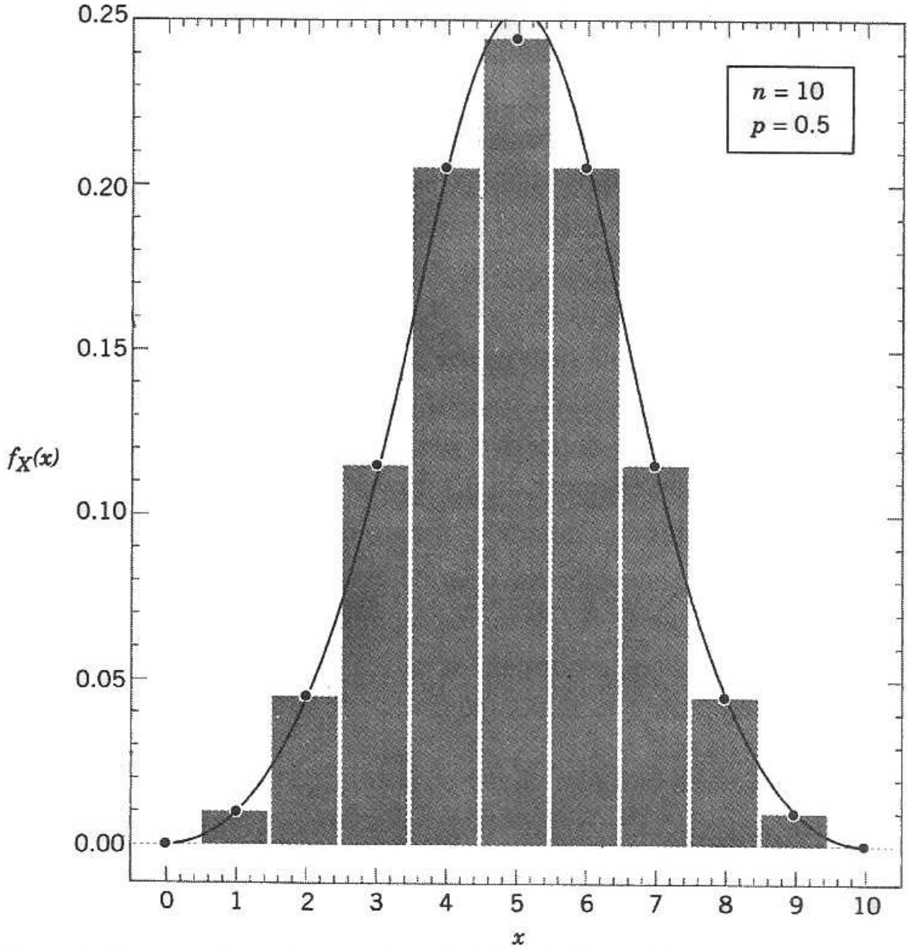


Figura 4-16 Aproximación normal a la distribución binomial.

Es evidente que la probabilidad del ejemplo 4-17 es difícil de calcular. Por fortuna, en este ejemplo puede emplearse la distribución normal para obtener una aproximación excelente.

Si X es una variable aleatoria binomial, entonces

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np\,(1-p)}} \tag{4-9}$$

es, de manera aproximada, una variable aleatoria normal estándar.

Recuérdese que para una variable binomial X, $E(X) = np$ y $V(X) = np(1-p)$. En consecuencia, la expresión que aparece en la ecuación 4-9 no es más que una fórmula para estandarizar la variable aleatoria X. Las probabilidades donde aparece X pueden aproximarse mediante el empleo de una variable aleatoria normal estándar.

EJEMPLO 4-18

El problema del canal de comunicación digital del ejemplo 4-17 se resuelve de la manera siguiente.

$$P(X > 150) = P\left(\frac{X - 160}{\sqrt{160(1 - 10^{-5})}} > \frac{150 - 160}{\sqrt{160(1 - 10^{-5})}}\right)$$
$$= P(Z > -0.79) = P(Z < 0.79) = 0.785$$

La aproximación normal a la distribución binomial es buena *si n es bastante grande con respecto a p*; en particular esto es cierto cuando $np > 5$ y $n(1-p) > 5$.

EJEMPLO 4-19

De nuevo considérese la transmisión de bits del ejemplo 4-17. Para tener idea del grado de eficacia de la aproximación normal, supóngase que sólo se transmitirán $n = 50$ bits, y que la probabilidad de un error en la transmisión es $p = 0.1$. La probabilidad exacta de que se presenten dos o menos errores es

$$P(X \leq 2) = \binom{50}{0}0.9^{50} + \binom{50}{1}0.1(0.9^{49}) + \binom{50}{2}0.1^2(0.9^{48})$$
$$= 0.11$$

Con base en la aproximación normal

$$P(X \leq 2) = P\left(\frac{X - 5}{2.12} < \frac{2 - 5}{2.12}\right) = P(Z < -1.415) = 0.08$$

Como puede verse, para una muestra tan pequeña como 50 bits, la aproximación normal es bastante razonable.

Se puede utilizar un factor de corrección que mejore aún más la aproximación. (Este aspecto se estudia en los ejercicios del final de la sección.) Sin embargo, si el valor de np o $n(1-p)$ es pequeño, la distribución binomial tiene mucho sesgo y la distribución normal simétrica no es una buena aproximación. En la figura 4-17 se ilustran dos casos.

Del capítulo 3, recuérdese que la distribución binomial es una aproximación satisfactoria a la distribución hipergeométrica cuando n, el tamaño de la muestra, es pequeño en comparación con N, el tamaño de la población de la cual se toma la muestra. Una regla que debe seguirse es que la aproximación binomial es eficaz si $n/N < 0.1$. Recuérdese que para una distribución hipergeométrica, p se define como $p = K/N$. Esto es, p se interpreta como la proporción de éxitos en la población. Por tanto, la distribución normal puede proporcionar una aproximación adecuada a las probabilidades hipergeométricas cuando $n/N < 0.1$, $np > 5$ y $n(1-p) > 5$. La figura 4-18 proporciona un resumen de estos lineamientos.

Recuérdese también que la distribución Poisson se desarrolló en la sección 3-9 como el límite de una distribución binomial cuando el número de ensayos tiende a infinito. En

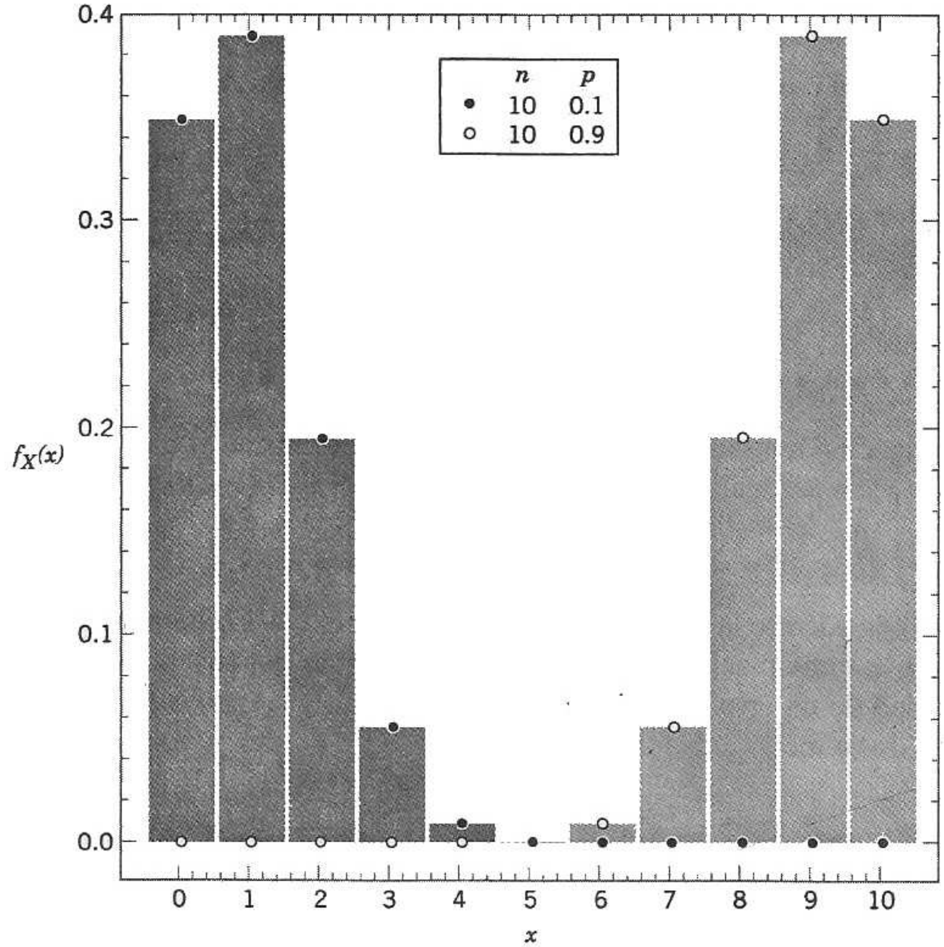


Figura 4-17 *a*) La distribución binomial no es simétrica si p está próximo a 0 o 1. *b*) Distribución binomial con $n = 10, p = 0.1$. *c*) Distribución binomial con $n = 10, p = 0.9$.

consecuencia, no debe ser sorprendente el hecho de encontrar que la distribución normal puede emplearse para aproximar las probabilidades de una variable aleatoria Poisson.

> Si X es una variable aleatoria Poisson con $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda$, entonces
>
> $$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$
>
> es, de manera aproximada, una variable aleatoria normal estándar.

distribución hipergeométrica	$\approx$ si $\frac{n}{N} < 1$	distribución binomial	$\approx$ si $np > 5$, $n(1-p) > 5$	distribución normal

Figura 4-18 Condiciones para la aproximación de probabilidades hipergeométricas y binomiales.

EJEMPLO 4-20

Supóngase que el número de partículas de asbesto en un centímetro cuadrado de polvo tiene una distribución Poisson con media 1000. Si se analiza un centímetro cuadrado de polvo, ¿cuál es la probabilidad de encontrar menos de 950 partículas de asbesto?

Esta probabilidad puede expresarse de manera exacta como

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000}x^{1000}}{x!}$$

En la expresión anterior es evidente la dificultad del cálculo. La probabilidad puede aproximarse en

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{950-1000}{\sqrt{1000}}\right) = P(Z \leq -1.58) = 0.057$$

La aproximación es buena para $\lambda > 5$.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-7

4-65. Suponga que X es una variable aleatoria binomial con $n = 200$ y $p = 0.4$.

- **a.** Aproxime la probabilidad de que X sea menor o igual que 70.
- **b.** Aproxime la probabilidad de que X sea mayor que 70 y menor que 90.

4-66. Suponga que X es una variable aleatoria binomial con $n = 100$ y $p = 0.1$.

- **a.** Calcule la probabilidad exacta de que X sea menor que cuatro.
- **b.** Aproxime la probabilidad de que X sea menor que cuatro y compare el resultado con el del inciso **a**).
- **c.** Aproxime la probabilidad de que $8 < X < 12$.

4-67. Un proceso de fabricación de chips produce un 2% que son defectuosos. Suponga que los chips son independientes y que un lote contiene 1000 de ellos.

- **a.** Aproxime la probabilidad de que el lote contenga más de 25 chips defectuosos.
- **b.** Aproxime la probabilidad de que el lote contenga entre 20 y 30 chips defectuosos.

4-68. **Continuación del ejercicio 4-67.** Se inspecciona el lote de 1000 chips mediante una selección aleatoria, sin remplazo, de 25 de ellos. Suponga que el lote contiene 100 chips defectuosos.

- **a.** Si se utiliza una aproximación binomial, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra no contenga chips defectuosos?
- **b.** Haga uso de la aproximación normal para dar respuesta a la pregunta del inciso **a**). ¿La aproximación es satisfactoria?
- **c.** Repita los incisos **a**) y **b**) suponiendo que el tamaño del lote es 500. En este caso,

¿la aproximación normal proporciona un resultado satisfactorio para la probabilidad de que la muestra no contenga chips defectuosos?

4-69. Un producto electrónico para oficina contiene 200 componentes electrónicos. Suponga que la probabilidad de que cada componente trabaje sin falla alguna durante el tiempo de vida útil del producto es 0.999, y que los componentes fallan de manera independiente. Aproxime la probabilidad de que cinco o más de los 200 componentes fallen durante el tiempo de vida útil del producto.

4-70. Suponga que el número de partículas de asbesto en una muestra de un centímetro cuadrado de polvo es una variable aleatoria Poisson con media 1000. ¿Cuál es la probabilidad de que en 10 centímetros cuadrados de polvo haya más de 10 000 partículas de asbesto?

4-71. **Corrección por continuidad.** En ocasiones, la aproximación normal de una probabilidad binomial se modifica con un factor de corrección de 0.5 que mejora la aproximación. Suponga que X es binomial con $n = 50$ y $p = 0.1$. Dado que X es una variable aleatoria discreta, $P(X \leq 2) = P(X \leq 2.5)$. Sin embargo, la aproximación normal a $P(X \leq 2)$ puede mejorarse al aplicar una aproximación a $P(X \leq 2.5)$.

a. Aproxime $P(X \leq 2)$ mediante el cálculo del valor z que corresponde a $x = 2.5$.

b. Aproxime $P(X \leq 2)$ mediante el cálculo del valor z que corresponde a $x = 2$.

c. Compare los resultados de los incisos **a)** y **b)** con el valor exacto de $P(X \leq 2)$, con la finalidad de evaluar la eficacia de la corrección por continuidad.

d. Utilice la corrección por continuidad para aproximar $P(X < 10)$.

4-72. **Corrección por continuidad.** Suponga que X es binomial con $n = 50$ y $p = 0.1$. Como X es una variable aleatoria discreta, $P(X \geq 2) = P(X \geq 1.5)$. Sin embargo, la aproximación normal a $P(X \geq 2)$ puede mejorarse al aplicar la aproximación a $P(X \geq 1.5)$. La corrección por continuidad de 0.5 puede sumarse o restarse. Una sencilla regla es que la corrección por continuidad siempre se aplica para obtener la mejor aproximación normal.

a. Aproxime $P(X \geq 2)$ mediante el cálculo del valor z que corresponde a 1.5.

b. Aproxime $P(X \geq 2)$ mediante el cálculo del valor z que corresponde a 2.

c. Compare los resultados de los incisos **a)** y **b)** con el valor exacto de $P(X \geq 2)$, para evaluar la eficacia de la corrección por continuidad.

d. Utilice la corrección por continuidad para aproximar $P(X > 6)$.

4-73. **Corrección por continuidad.** Suponga que X es binomial con $n = 50$ y $p = 0.1$. Como X es una variable aleatoria discreta, $P(2 \leq X \leq 5) = P(1.5 \leq X \leq 5.5)$. Sin embargo, la aproximación normal a $P(2 \leq X \leq 5)$ puede mejorarse al aplicar la aproximación a $P(1.5 \leq X \leq 5.5)$.

a. Aproxime $P(2 \leq X \leq 5)$ mediante el cálculo de los valores z que corresponden a 1.5 y 5.5.

b. Aproxime $P(2 \leq X \leq 5)$ mediante el cálculo de los valores z que corresponde a 2 y 5.

4-74. **Corrección por continuidad.** Suponga que X es binomial con $n = 50$ y $p = 0.1$. Entonces, $P(X = 10) = P(10 \leq X \leq 10)$. Si se utilizan los resultados para las correcciones por continuidad, entonces es posible aproximar $P(10 \leq X \leq 10)$ mediante la aplicación de una estandarización normal a $P(9.5 \leq X \leq 10.5)$.

a. Aproxime $P(X = 10)$ mediante el cálculo de los valores z correspondientes a 9.5 y 10.5.

b. Aproxime $P(X = 5)$.

4-75. **Corrección por continuidad.** Un proceso de fabricación de chips produce 2% de chips defectuosos. Suponga que los chips son independientes y que un lote contiene 1000 de ellos.

a. Utilice la corrección por continuidad para aproximar la probabilidad de que el lote contenga entre 20 y 30 chips defectuosos.

b. Utilice la corrección por continuidad para aproximar la probabilidad de que el lote contenga exactamente 20 chips defectuosos.

c. Determine el número de chips defectuosos, x, tal que la aproximación normal para la probabilidad de obtener x chips defectuosos sea la mejor posible.

4-8 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

En el estudio realizado en el capítulo 3 de la distribución Poisson, se definió una variable aleatoria como el número de fallas en determinada longitud de un alambre de cobre. La distancia entre las fallas es otra variable aleatoria que a menudo es de interés. Sea la variable aleatoria X la longitud desde un punto inicial del alambre hasta el sitio donde se encuentra una falla.

Como es de esperarse, la distribución de X puede obtenerse a partir de conocer la distribución del número de fallas. La clave para obtener esta relación es el siguiente concepto. La distancia hasta la primera falla es mayor que 3 milímetros si y sólo si no hay fallas en esos 3 milímetros —simple, pero suficiente para el análisis de la distribución de X.

En general, sea la variable aleatoria N el número de fallas en x milímetros de alambre. Si el número promedio de fallas es λ por milímetro, entonces N tiene una distribución Poisson con media λx. Supóngase que la longitud del alambre es mayor que el valor de x. Ahora bien,

$$P(X > x) = P(N = 0) = \frac{e^{\lambda x}(\lambda x)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$$

Por consiguiente,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

es la función de distribución acumulada de X. Al derivar $F_X(x)$, se tiene que la función de densidad de probabilidad de X es

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

La obtención de la distribución de X depende sólo de la hipótesis de que el número de fallas sigue un proceso Poisson. Asimismo, el punto de partida para medir X no importa, ya que la probabilidad del número de fallas en un intervalo de un proceso Poisson depende sólo de la longitud del intervalo y no de la posición. El resultado siguiente se aplica para cualquier proceso Poisson.

Definición

La variable aleatoria X que es igual a la distancia entre ocurrencias sucesivas de un proceso Poisson con media $\lambda > 0$, tiene una **distribución exponencial** con parámetro λ. La función de densidad de probabilidad de X es

$$f_X(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ para } 0 \leq x < \infty \tag{4-10}$$

La distribución exponencial obtiene su nombre de la función exponencial que aparece en la función de densidad de probabilidad. La figura 4-19 presenta varias gráficas de la distribución exponencial para distintos valores del parámetro λ. Para cualquier valor de λ, la distribución exponencial tiene mucho sesgo. Los resultados siguientes se obtienen con facilidad y la deducción de éstos se deja como ejercicio.

Si la variable aleatoria X tiene una distribución exponencial con parámetro λ, entonces

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{4-11}$$

Es importante **utilizar unidades consistentes** en el cálculo de probabilidades, medias y varianzas de variables aleatorias exponenciales. El ejemplo que sigue ilustra la conversión de unidades.

EJEMPLO 4-21

En una red de computadoras grande, el acceso de los usuarios al sistema puede modelarse como un proceso Poisson con una media de 25 accesos por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya accesos en un intervalo de seis minutos?

Sea X el tiempo en horas desde el inicio del intervalo hasta que se presenta el primer acceso. Entonces, X tiene una distribución exponencial con $\lambda = 25$ accesos por hora. El interés recae en la probabilidad de que X sea mayor que seis minutos. Dado que el valor de λ está dado en accesos por hora, es necesario expresar todas las unidades de tiempo en horas. Esto es, 6 minutos = 0.1 horas. La probabilidad pedida es el área sombreada bajo la función de densidad de probabilidad que aparece en la figura 4-20. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P(X > 0.1) &= \int_{0.1}^{\infty} 25e^{-25x}\,dx \\ &= e^{-25(0.1)} = 0.082 \end{aligned}$$

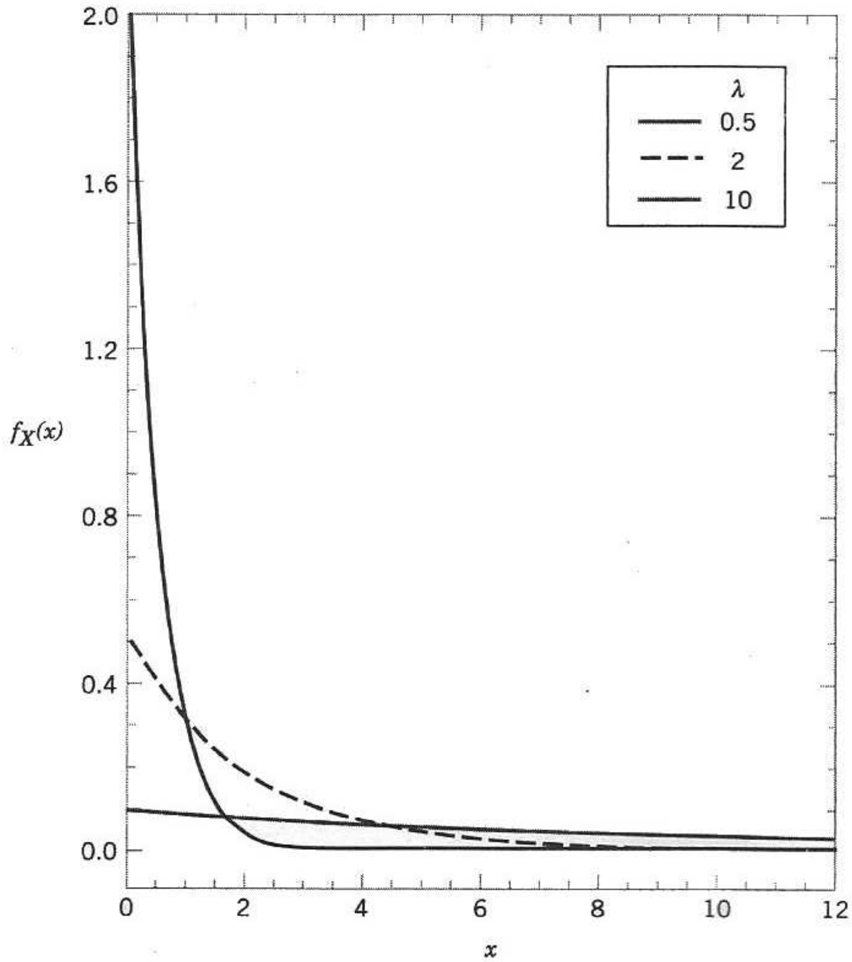


Figura 4-19 Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria exponencial para distintos valores de λ.

Se obtiene la misma respuesta si se expresa el número promedio de accesos como 0.417 accesos por minuto, y luego se calcula la probabilidad de que el tiempo transcurrido hasta el siguiente acceso sea mayor que 6 minutos. ¡Inténtelo!

¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que transcurre hasta el siguiente acceso esté entre 2 y 3 minutos? Después de convertir todas las unidades a horas,

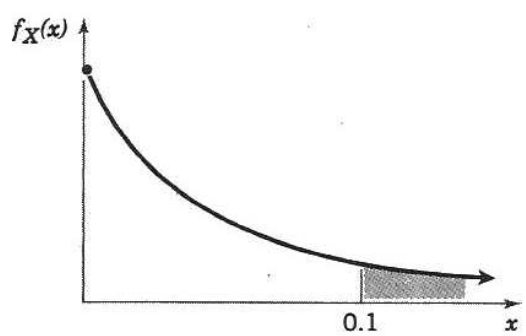


Figura 4-20 Probabilidad para la distribución exponencial del ejemplo 4-21.

$$P(0.033 < X < 0.05) = \int_{0.033}^{0.05} 25e^{-25x}\,dx$$
$$= -e^{-25x}\Big|_{0.033}^{0.05}$$
$$= 0.152$$

Determine el intervalo de tiempo para el que la probabilidad de que no se presenten accesos al sistema durante ese tiempo sea 0.90.

La pregunta pide el tiempo x para el que $P(X > x) = 0.90$. Entonces,

$$P(X > x) = e^{-25x} = 0.90$$

Por tanto, después de tomar el logaritmo de ambos miembros

$$x = 0.00421 \text{ horas} = 0.25 \text{ minutos}$$

Asimismo, el tiempo medio hasta el siguiente acceso es

$$E(X) = 1/25 = 0.04 \text{ horas} = 2.4 \text{ minutos}$$

La desviación estándar del tiempo que transcurre hasta el siguiente acceso es

$$\sigma_X = 1/25 \text{ horas} = 2.4 \text{ minutos}$$

En el ejemplo 4-21, la probabilidad de que no haya accesos en 6 minutos es 0.082, sin importar el momento en que inicia el intervalo. Un proceso Poisson supone que los eventos se presentan de manera uniforme en el intervalo observado; esto es, no hay acumulación de eventos. Si los accesos están modelados mediante un proceso Poisson, la probabilidad de que el primer acceso (pasado el mediodía) ocurra después de las 12:06 p.m., es la misma que la probabilidad de que ocurra (pasadas las 3 de la tarde) después de las 3:06 p.m. Y si algún usuario se da de alta a las 2:22 p.m., la probabilidad de que el siguiente acceso ocurra después de las 2:28 p.m. sigue siendo 0.082.

El punto de partida para la observación del sistema no importa. Sin embargo, si durante el día existen periodos de mucho uso, como justo después de las 8:00 a.m., seguidos por periodos de bajo uso, entonces el proceso Poisson no constituye un modelo apropiado para los accesos al sistema, motivo por el que la distribución Poisson no resulta adecuada para el cálculo de probabilidades. Tal vez lo más razonable sea modelar periodos de mucho uso y los de poco uso con procesos Poisson separados, utilizando un valor grande de λ para los periodos de gran demanda, y un valor más pequeño para otras circunstancias. Así, esto puede utilizarse una distribución exponencial con el correspondiente valor de λ para calcular las probabilidades de acceso al sistema durante periodos de mucha y poca demanda.

Propiedad de la carencia de memoria

Una más interesante propiedad de una variable aleatoria exponencial, es la que tiene que ver con probabilidades condicionales.

EJEMPLO 4-22

Sea X el tiempo entre las detecciones de una partícula rara por un contador Geiger; supóngase que X tiene una distribución exponencial con una media de 1.4 minutos. La probabilidad de detectar una partícula durante el lapso de 30 segundos que transcurre desde que se enciende el contador es

$$P(X < 0.5 \text{ minutos}) = 1 - e^{-1.4(0.5)} = 0.50$$

En el cálculo anterior se han convertido todas las unidades de tiempo a minutos. Ahora, supóngase que se enciende el contador Geiger y transcurren tres minutos sin detectar partícula alguna. ¿Cuál es la probabilidad de detectar una partícula en los 30 segundos siguientes?

Dado que ya han transcurrido 3 minutos, la impresión que se tiene es que "se ha esperado bastante". Esto es, la probabilidad de detección en los siguientes 30 segundos debe ser mayor que 0.5. Sin embargo, para una distribución exponencial, esto no es cierto. La probabilidad pedida puede expresarse como la probabilidad condicional de que $P(X < 3.5 \mid X > 3)$. A partir de la definición de probabilidad condicional,

$$P(X < 3.5 \mid X > 3) = P(3 < X < 3.5)/P(X > 3)$$

donde

$$\begin{aligned} P(3 < X < 3.5) &= F_X(3.5) - F_X(3) \\ &= [1 - e^{-1.4(3.5)}] - [1 - e^{-1.4(3)}] \\ &= 0.0075 \end{aligned}$$

y

$$P(X > 3) = e^{-1.4(3)} = 0.015$$

Por consiguiente,

$$P(X < 3.5 \mid X > 3) = 0.0075/0.015 = 0.50$$

Después de esperar tres minutos sin detectar una partícula, la probabilidad de detectar una en los 30 segundos siguientes es la misma que la de detectarla 30 segundos después de haber encendido el contador. El hecho de haber esperado 3 minutos sin detectar una partícula no cambia la probabilidad de detección en los 30 segundos siguientes.

El ejemplo 4-22 ilustra la **propiedad de la carencia de memoria** de una variable aleatoria exponencial. De hecho, la distribución exponencial es la única distribución continua que tiene esta característica.

Propiedad de la carencia de memoria

Para una variable aleatoria exponencial X,

$$P(X < t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X < t_2) \tag{4-12}$$

La figura 4-21 ilustra la propiedad de la carencia de memoria. El área de la región A dividida entre el área total bajo la función de densidad de probabilidad ($A + B + C + D = 1$) es igual

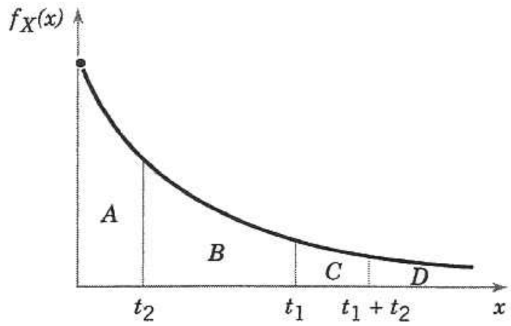


Figura 4-21 Propiedad de la carencia de memoria de una distribución exponencial.

a $P(X < t_2)$. El área de la región C dividida entre el área $C + D$ es igual a $P(X < t_1 + t_2 \mid X > t_1)$. La propiedad de la carencia de memoria es equivalente al hecho de que la proporción del área total bajo la curva que está en A, es igual a la proporción del área de C y D que está en C. La comprobación matemática de la propiedad de la carencia de memoria se deja como ejercicio para el lector.

La propiedad de la carencia de memoria no es sorprendente si se considera el desarrollo de un proceso Poisson. En dicho desarrollo, se supuso que un intervalo puede subdividirse en intervalos independientes más pequeños. Estos subintervalos son similares a los ensayos Bernoulli independientes, característicos de un proceso binomial; el conocimiento de resultados previos no tiene efecto sobre las probabilidades de los eventos en subintervalos futuros. Una variable aleatoria exponencial es el análogo continuo de una variable aleatoria geométrica, y las dos comparten una similar propiedad de carencia de memoria.

La distribución exponencial se emplea con frecuencia en estudios de confiabilidad, como modelo para el tiempo transcurrido hasta la falla de un dispositivo. Por ejemplo, el tiempo de vida de un chips puede modelarse como una variable aleatoria exponencial con una media de 40 000 horas. La propiedad de la carencia de memoria de la distribución exponencial implica que el dispositivo no se desgasta. Esto es, sin importar cuánto tiempo haya trabajado el dispositivo, la probabilidad de que falle en las siguientes 1000 horas es la misma que la probabilidad de que falle durante las primeras 1000 horas de operación. El tiempo de vida útil L de un dispositivo con fallas provocadas por golpes aleatorios puede modelarse de manera apropiada como una variable aleatoria exponencial. Sin embargo, la probabilidad de que el dispositivo sufra un desgaste mecánico lento (por ejemplo, en los cojinetes), puede modelarse mejor con una distribución tal que $P(L < t + \Delta t \mid L > t)$ aumente a medida que se incrementa t. En la práctica a menudo se emplean distribuciones como la Weibull para modelar el tiempo de falla de este tipo de dispositivos. La distribución Weibull se trata en la sección 4-10.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-8

4-76. Suponga que X tiene una distribución exponencial con $\lambda = 2$. Calcule lo siguiente:

- **a.** $P(X \leq 0)$
- **b.** $P(X \geq 2)$
- **c.** $P(X \leq 1)$
- **d.** $P(1 < X < 2)$
- **e.** Encuentre el valor de x tal que $P(X < x) = 0.05$.

4-77. Suponga que X tiene una distribución exponencial con media 10. Calcule lo siguiente:

a. $P(X > 10)$

b. $P(X > 20)$

c. $P(X > 30)$

d. Encuentre el valor de x tal que $P(X < x) = 0.95$.

4-78. Suponga que los conteos registrados por un contador Geiger siguen un proceso Poisson con un promedio de dos conteos por minuto.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya conteos en un intervalo de 30 segundos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer conteo ocurra en un tiempo menor que 10 segundos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer conteo ocurra entre uno y dos minutos después de haber encendido el contador?

4-79. **Continuación del ejercicio 4-78.**

a. ¿Cuál es el tiempo promedio entre conteos?

b. ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo entre conteos?

c. Calcule x, de modo tal que la probabilidad de que ocurra por lo menos un conteo antes de x minutos, sea 0.95.

4-80. El tiempo que transcurre entre las llamadas a una empresa de artículos para plomería tiene una distribución exponencial con un tiempo promedio entre llamadas de 15 minutos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya llamadas en un lapso de 30 minutos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de recibir al menos una llamada en un intervalo de 10 minutos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de recibir la primera llamada entre cinco y 10 minutos después de haber abierto la empresa?

d. Calcule la dimensión de un intervalo de tiempo, de modo tal que la probabilidad de recibir al menos una llamada en ese lapso sea 0.90.

4-81. El tiempo de vida de los reguladores de voltaje de los automóviles tiene una distribución exponencial con un tiempo de vida medio de seis años. Una persona compra un automóvil que tiene una antigüedad de seis años, con un regulador en funcionamiento, y planea tenerlo por espacio de seis años.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que regulador de voltaje falle en el lapso de seis años?

b. Si el regulador falla después de tres años de haber efectuado la compra del automóvil y se remplaza, ¿cuál es el tiempo promedio que transcurrirá hasta que el regulador vuelva a fallar?

4-82. El tiempo entre llegadas de mensajes electrónicos a una computadora tiene una distribución exponencial con media de dos horas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la computadora no reciba mensajes en un periodo de dos horas?

b. Si la computadora no ha recibido ningún mensaje en las últimas cuatro horas, ¿cuál es la probabilidad de recibir un mensaje en las dos horas siguientes?

c. ¿Cuál es el tiempo esperado entre el quinto y el sexto mensaje?

4-83. El tiempo entre arribos de los taxis a un cruce muy concurrido tiene una distribución exponencial con media de 10 minutos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que esté en el cruce tenga que esperar más de una hora para tomar un taxi?

b. Suponga que la persona ya esperó una hora; ¿cuál es la probabilidad de que llegue uno en los siguientes 10 minutos?

4-84. **Continuación del ejercicio 4-83.**

a. Determine x, de modo tal que la probabilidad de que la persona espere más de x minutos para tomar un taxi sea 0.10.

b. Calcule x, de modo tal que la probabilidad de que la persona tenga que esperar menos de x minutos para tomar un taxi sea 0.90.

c. Determine x, de modo que la probabilidad de que la persona tenga que esperar menos de x minutos para tomar un taxi sea 0.50.

4-85. La distancia que hay entre dos grietas grandes en una autopista tiene una distribución exponencial con media de cinco millas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya grietas grandes en un tramo de 10 millas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos grietas en un tramo de 10 millas?

c. ¿Cuál es la desviación estándar de la distancia entre grietas?

4-86. **Continuación del ejercicio 4-85.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera grieta se encuentre a una distancia entre 12 y 15 millas a partir del punto de inicio de inspección de la autopista?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya grietas en dos tramos de cinco millas separados entre sí?

c. Dado que no se encuentran grietas en el primer tramo de cinco millas, ¿cuál es la probabilidad de que no las haya en las siguientes 10 millas de la autopista?

4-87. El tiempo de duración de un ensamble mecánico en una prueba de vibración tiene una distribución exponencial con media de 400 horas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el ensamble falle durante la prueba en menos de 100 horas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el ensamble trabaje durante más de 500 horas antes de que falle?

c. Si el ensamble se ha probado durante 400 horas sin falla alguna, ¿cuál es la probabilidad de que falle en las siguientes 100 horas?

4-88. **Continuación del ejercicio 4-87.**

a. Si se prueban 10 ensambles, ¿cuál es la probabilidad de que falle al menos uno de ellos en menos que 100 horas? Suponga que los ensambles fallan de manera independiente.

b. Si se prueban 10 ensambles, ¿cuál es la probabilidad de que todos hayan fallado después de 800 horas? Suponga que los ensambles fallan de manera independiente.

4-89. Cuando un servicio de transporte reduce su tarifa, entonces se vuelve muy popular un recorrido especial entre dos ciudades. Para hacer el recorrido se emplea un transporte especial que puede llevar a cuatro pasajeros. El tiempo entre llamadas para comprar boletos tiene una distribución exponencial con una media de 30 minutos. Suponga que en cada llamada se adquiere un boleto. ¿Cuál es la probabilidad de que el transporte se llene en menos de tres horas a partir del momento en que se reduce la tarifa?

4-90. El tiempo entre las llegadas de avionetas a un aeropuerto tiene una distribución exponencial con una media de una hora. ¿Cuál es la probabilidad de que aterricen más de tres avionetas en una hora?

4-91. **Continuación del ejercicio 4-90.**

a. Si se escogen 30 intervalos de una hora, ¿cuál es la probabilidad de que en ninguno de ellos hayan aterrizado más de tres avionetas?

b. Determine la duración de un intervalo (en horas), de modo tal que la probabilidad de que no aterrice ninguna avioneta en ese tiempo sea 0.10.

4-92. El tiempo entre las llamadas que recibe la oficina de una corporación tiene una distribución exponencial con una media de 10 minutos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres llamadas en un lapso de media hora?

b. ¿Cuál es la probabilidad de no recibir llamada alguna en un lapso de media hora?

c. Determine x, de modo tal que la probabilidad de no recibir llamada alguna en x horas sea 0.01.

4-93. **Continuación del ejercicio 4-92.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de no recibir llamada alguna en un lapso de dos horas?

b. Si se escogen cuatro intervalos de media hora que no se traslapan entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que en ninguno de ellos se reciba llamada alguna?

c. Explique la relación que existe entre los resultados de los incisos **a**) y **b**).

4-94. Si la variable aleatoria X tiene una distribución exponencial con media θ, calcule lo siguiente:

a. $P(X > \theta)$

b. $P(X > 2\theta)$

c. $P(X > 3\theta)$

d. ¿Cómo depende el resultado de θ?

4-95. Suponga que los defectos en una cinta magnética tienen una distribución Poisson con una media de 0.2 defectos por metro de cinta. Sea X la distancia entre dos defectos consecutivos.

a. ¿Cuál es la media de X?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no existan defectos en 10 metros consecutivos de cinta magnética?

c. ¿La respuesta del inciso **b**) cambia si los 10 metros no son consecutivos?

d. ¿Cuántos metros de cinta es necesario revisar para que la probabilidad de encontrar al menos un defecto sea del 90%?

4-96. **Continuación del ejercicio 4-95.** (Preguntas más difíciles).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera vez que se encuentra que la distancia entre dos defectos es mayor que ocho metros se presente en el quinto defecto?

b. ¿Cuál es el número promedio de defectos antes de que la distancia entre dos de ellos sea mayor que ocho metros?

4-97. Deduzca la fórmula para la media y la varianza de una variable aleatoria exponencial.

4-9 DISTRIBUCIONES ERLANG Y GAMMA

4-9.1 Distribución Erlang

Una variable aleatoria exponencial describe el lapso hasta que se obtiene la primera ocurrencia en un proceso Poisson. Una generalización de la distribución exponencial es el lapso hasta que se presentan r conteos en un proceso Poisson. La variable aleatoria que es igual al lapso en el que ocurren r conteos en un proceso Poisson es una **variable aleatoria Erlang**.

EJEMPLO 4-23

Las fallas en las unidades de procesamiento central de los sistemas de cómputo grandes, a menudo se modelan como procesos Poisson. Lo común es que las fallas no sean causadas por desgaste de los componentes, sino por fallas de naturaleza más aleatoria del gran número de circuitos semiconductores que forman las unidades. Supóngase que las unidades que fallan se reparan de inmediato, y que el número promedio de fallas por hora es 0.0001. Sea X el tiempo que transcurre hasta que se presentan cuatro fallas en un sistema. Calcúlese la probabilidad de que X sea mayor que 40 mil horas.

Sea la variable aleatoria N el número de fallas en 40 mil horas de operación. El tiempo transcurrido hasta que se tienen cuatro fallas es mayor que 40 mil horas si y sólo si el número de fallas en 40 mil horas es menor o igual que tres. Por consiguiente,

$$P(X > 40\,000) = P(N \leq 3)$$

La hipótesis de que las fallas siguen un proceso Poisson, implica que N tiene una distribución Poisson con

$$E(N) = 40\,000(0.0001) = 4 \text{ fallas por } 40\,000 \text{ horas}$$

Asimismo,

$$P(N \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-4}4^k}{k!} = 0.433$$

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria X, Erlang, puede obtenerse mediante el cálculo de $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$. Con esto, la función de densidad de probabilidad de X puede obtenerse al derivar la función de distribución acumulada y con una gran labor de simplificaciones algebraicas. Los detalles se dejan como ejercicio al final de este capítulo. En general, se obtiene el resultado siguiente.

Definición

La variable aleatoria X que es igual al intervalo en que se presentan r fallas en un proceso Poisson con media $\lambda \not> 0$, tiene una **distribución Erlang** con parámetros λ y r. La función de densidad de probabilidad de X es

$$f_X(x;\lambda,r) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \text{ para } x > 0 \text{ y } r = 1, 2, \ldots \quad (4\text{-}13)$$

La figura 4-22 presenta varias gráficas de la función de densidad de probabilidad Erlang para diferentes valores de r y λ. Es evidente que una variable aleatoria Erlang con $r = 1$ es una variable aleatoria exponencial. Las probabilidades donde aparecen variables aleatorias Erlang a menudo se obtienen al calcular una sumatoria de variables aleatorias Poisson, tal como se hizo en el ejemplo 4-23. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Erlang puede emplearse para calcular probabilidades; sin embargo, a menudo es necesario integrar por partes. Tal como en el caso para la distribución exponencial, debe tenerse cuidado al definir la variable aleatoria y el parámetro, de modo que las unidades sean consistentes.

EJEMPLO 4-24

Una alternativa para el cálculo de la probabilidad pedida en el ejemplo 4-23 es integrar la función de densidad de probabilidad de X. Esto es,

$$P(X > 40\,000) = \int_{40\,000}^{\infty} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{40\,000}^{\infty} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}\,dx$$

donde $r = 4$ y $\lambda = 0.0001$. Puede emplearse la integración por partes para verificar el resultado obtenido en el ejemplo 4-23.

Una variable aleatoria Erlang puede considerarse como el análogo continuo de una variable aleatoria binomial negativa. Tal como se indicó en el capítulo 3, una variable aleatoria binomial negativa puede expresarse como la suma de r variables aleatorias geométricas. De

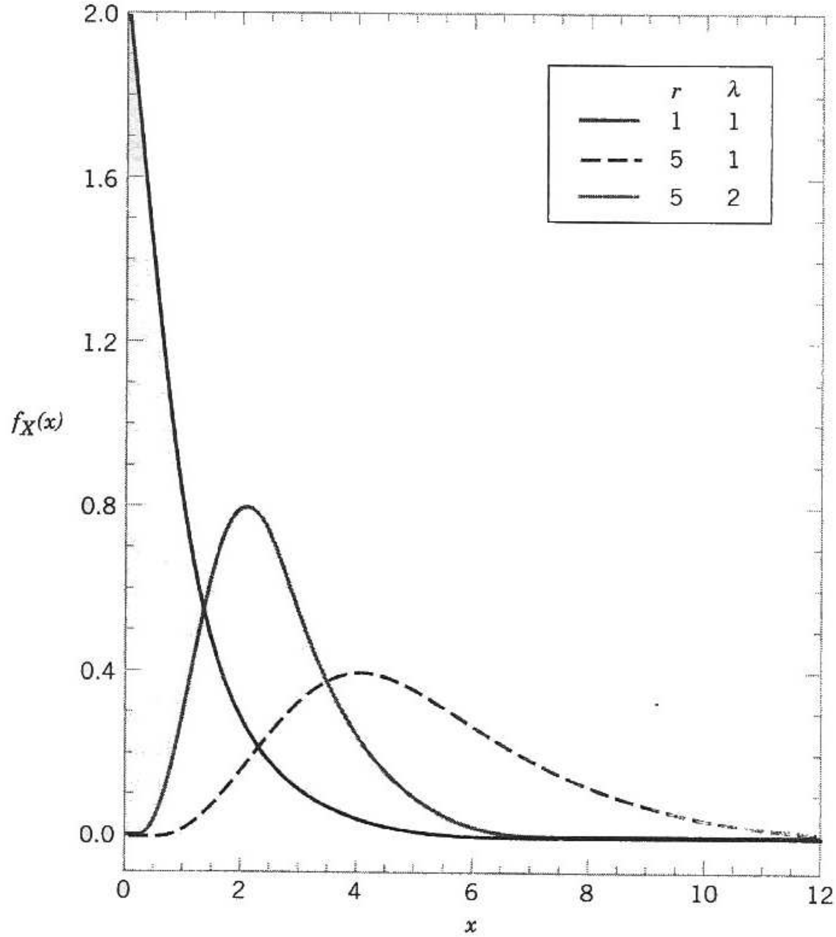


Figura 4-22 Funciones de densidad de probabilidad Erlang para varios valores de r y λ.

manera similar, una variable aleatoria Erlang puede representarse como la suma de r variables aleatorias exponenciales. Al hacer uso de esta conclusión, es posible demostrar el siguiente resultado.

Si X es una variable aleatoria Erlang con parámetros λ y r, entonces la media y la varianza de X son

$$\mu_X = E(X) = r/\lambda \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = r/\lambda^2 \tag{4-14}$$

4-9.2 Distribución gamma

La distribución Erlang es un caso especial de la **distribución gamma**. Si el parámetro r de una variable aleatoria Erlang no es un entero, pero $r > 0$, entonces la variable aleatoria tiene una distribución gamma. Sin embargo, en la función de densidad Erlang, el parámetro r

aparece como r factorial. Por tanto, para definir una variable aleatoria gamma, es necesario generalizar la función factorial.

Definición

La **función gama** es

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\, dx, \text{ para } r > 0 \qquad (4\text{-}15)$$

Puede demostrarse que la integral en la definición de $\Gamma(r)$ es finita. Por otra parte, si se emplea la integración por partes, puede demostrarse que

$$\Gamma(r) = (r - 1)\Gamma(r - 1).$$

Por consiguiente, si r es un entero positivo (como sucede en la distribución Erlang),

$$\Gamma(r) = (r - 1)!$$

Asimismo, $\Gamma(1) = 0! = 1$ y también puede demostrarse que $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$. Es posible interpretar la función gamma como una generalización a valores no enteros de r del término $(r - 1)!$ que se emplea en la función de densidad de probabilidad Erlang.

Con esto es posible establecer la función de densidad de probabilidad gamma.

Definición

La variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x; \lambda, r) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \text{ para } x > 0 \qquad (4\text{-}16)$$

tiene una **distribución gamma** con parámetros $\lambda > 0$ y $r > 0$. Si r es un entero, entonces X tiene una distribución Erlang.

La figura 4-23 ilustra varias gráficas de la distribución gamma para distintos valores de λ y r. Se deja como ejercicio demostrar que $f_X(x; \lambda, r)$ satisface las propiedades de una función de densidad de probabilidad.

Por otra parte, también puede obtenerse el resultado siguiente.

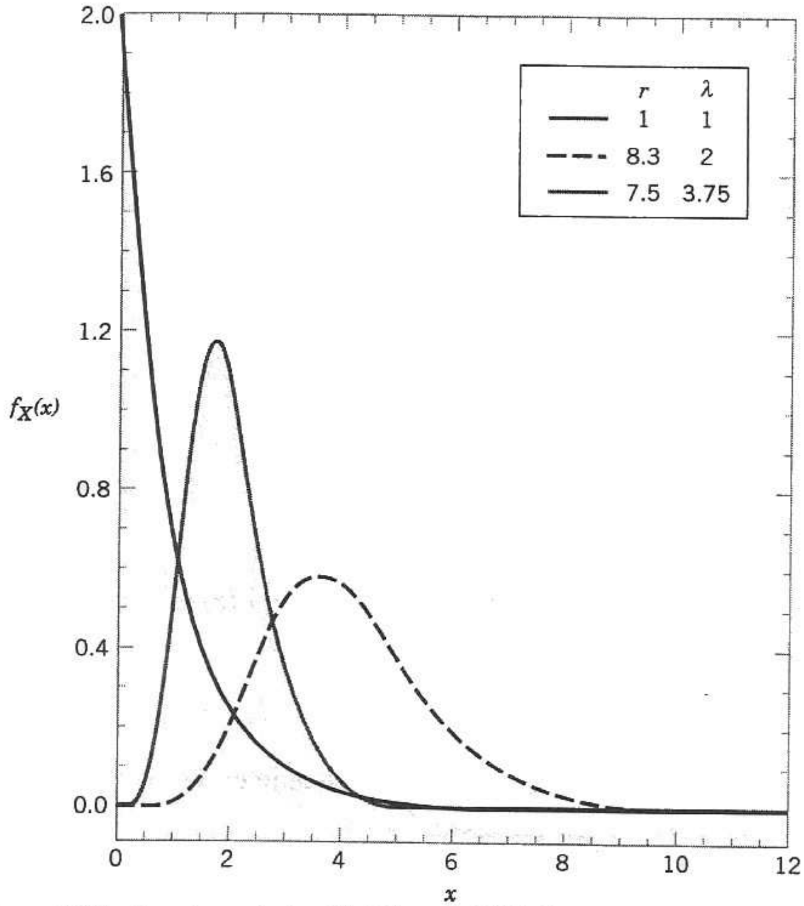


Figura 4-23 Funciones de densidad de probabilidad gamma para varios valores de λ y r.

Si X es una variable aleatoria gamma con parámetros λ y r, entonces la media y la varianza de X son

$$\mu_X = E(X) = r/\lambda \quad \text{y} \quad \sigma_X^2 = V(X) = r/\lambda^2$$

Aunque la distribución gamma no se emplea con mucha frecuencia como modelo de un sistema físico, el caso especial de la distribución Erlang es muy útil para modelar experimentos aleatorios. Por otra parte, existe otro caso especial de la distribución gamma que será de mucha utilidad en capítulos posteriores. La **distribución ji-cuadrada** es un caso especial de la distribución gamma en la que $\lambda = 1/2$ y r es igual a uno de los valores 1/2, 1, 3/2, 2, . . . Esta distribución se emplea mucho en la estimación por intervalos y en las pruebas de hipótesis, que son temas de capítulos subsecuentes.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-9

4-98. Las llamadas a un sistema telefónico siguen una distribución Poisson con una media de cinco llamadas por minuto.

a. ¿Cuál es el nombre de la distribución, y qué valores tienen los parámetros de ésta, para el tiempo transcurrido hasta que se recibe la décima llamada?

b. ¿Cuál es el tiempo promedio que transcurre hasta que se recibe la décima llamada?

c. ¿Cuál es el tiempo promedio entre la novena y la décima llamadas?

4-99. **Continuación del ejercicio 4-98.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de recibir exactamente cuatro llamadas en el lapso de un minuto?

b. Si se escogen 10 intervalos de un minuto separados entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que en cada intervalo se hayan recibido más de dos llamadas?

4-100. La materia prima de cierto proceso se estudia para determinar la contaminación presente en ella. Suponga que el número de partículas contaminantes por libra de material es una variable aleatoria Poisson con una media de 0.01 partículas por libra.

a. ¿Cuál es el número esperado de libras de materia prima necesarias para obtener 15 partículas contaminantes?

b. ¿Cuál es la desviación estándar de las libras de materia prima necesarias para obtener 15 partículas contaminantes?

4-101 En un sistema de comunicación de datos, los mensajes que llegan a un nodo son colocados en un paquete antes de ser transmitidos por la red. Suponga que los mensajes llegan al nodo de acuerdo con un proceso Poisson con $\tau = 30$ mensajes por minuto. Se utilizan cinco mensajes para formar un paquete.

a. ¿Cuál es el tiempo promedio necesario para formar un paquete, esto es, el tiempo que transcurre hasta que llegan cinco mensajes al nodo?

b. ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo necesario para formar el paquete?

c. ¿Cuál es la probabilidad de formar un paquete en menos de 10 segundos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el paquete se forme en menos de 5 segundos?

4-102. Los errores de lectura causados por la contaminación en discos ópticos se presentan con una tasa de un error cada 10^5 bits. Suponga que los errores siguen una distribución Poisson.

a. ¿Cuál es el número promedio de bits que deben leerse hasta que se presenten cinco errores?

b. ¿Cuál es la desviación estándar del número de bits que deben leerse hasta que se presenten cinco errores?

c. El código de corrección de errores puede ser ineficaz si se presentan tres errores o más en 10^5 bits. ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda?

4-103. El tiempo entre la llegada de los clientes a un cajero automático es una variable aleatoria exponencial con una media de cinco minutos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al cajero más de tres clientes en un lapso de 10 minutos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo transcurrido hasta que llega el quinto cliente sea menor que 15 minutos.

4-104. El tiempo que transcurre entre los problemas que se presentan en un proceso de una línea de producción tiene una distribución exponencial con una media de 30 días.

a. ¿Cuál es el tiempo esperado para que se presente el cuarto problema?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo necesario para que se presente el cuarto problema sea mayor que 120 días?

4-105. Utilice las propiedades de la función gamma para evaluar lo siguiente:

a. $\Gamma(6)$

b. $\Gamma(5/2)$

c. $\Gamma(9/2)$

4-106. Utilice la integración por partes para demostrar que $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$.

4-107. Demuestre que la integral de la función de densidad gamma $f_X(x; \lambda, r)$ es uno.

4-108. Haga uso del resultado para la distribución gamma para calcular la media y la varianza de una distribución ji-cuadrada con $r = 7/2$.

4-10 DISTRIBUCIÓN WEIBULL

Tal como ya se mencionó, la distribución Weibull se emplea a menudo para modelar el tiempo hasta presentarse una falla en muchos sistemas físicos diferentes. Los parámetros de la distribución proporcionan mucha flexibilidad para modelar sistemas en los que el número de fallas aumenta con el tiempo (por ejemplo, el desgaste), disminuye con el tiempo (en algunos semiconductores), o permanece constante (fallas provocadas por causas externas al sistema).

Definición

La variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x; \delta, \beta) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\delta)^{\beta}}, \text{ para } x > 0 \tag{4-17}$$

tiene una **distribución Weibull** con parámetro de escala $\delta > 0$ y parámetro de forma $\beta > 0$.

La flexibilidad de la distribución Weibull está ilustrada por las gráficas de distintas funciones de densidad de probabilidad que aparecen en la figura 4-24. Al examinar la función de densidad de probabilidad, se observa que cuando $\beta = 1$, la distribución Weibull es idéntica a la distribución exponencial.

Puede obtenerse el resultado siguiente.

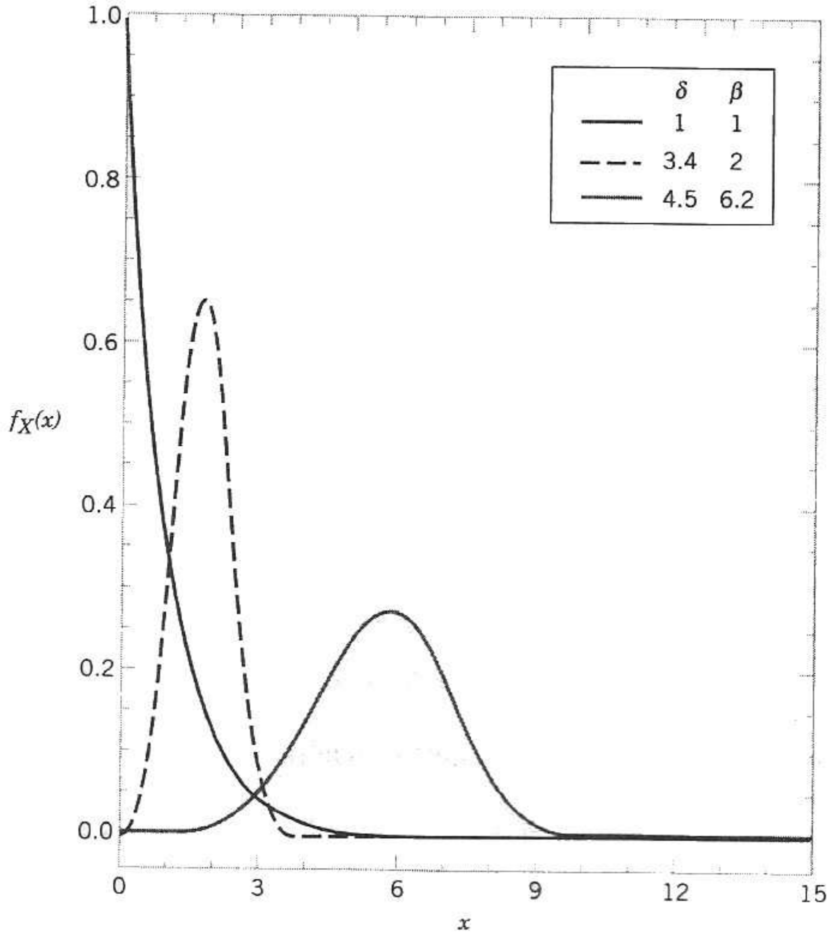


Figura 4-24 Funciones de densidad de probabilidad Weibull.

Si X tiene una distribución Weibull con parámetros δ y β, entonces la **función de distribución acumulativa** de X es

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\delta)^\beta}$$

Por otra parte, también se tiene lo siguiente.

Si X tiene una distribución Weibull con parámetros δ y β, entonces

$$E(X) = \delta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{y} \quad V(X) = \delta^2\,\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \delta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2$$

EJEMPLO 4-25

El tiempo de falla (en horas) del cojinete de una flecha está modelado de manera satisfactoria por una variable aleatoria Weibull con $\beta = 1/2$ y $\delta = 5000$ horas. Calcúlese el tiempo promedio de falla.

Del resultado anterior,

$$\begin{aligned} E(X) &= 5000\Gamma[1 + (1/0.5)] \\ &= 5000\Gamma[3] \\ &= 5000 \times 2! = 10000 \text{ horas} \end{aligned}$$

Determínese la probabilidad de que el cojinete dure al menos 6000 horas.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} P(X > 6000) &= 1 - F_X(6000) \\ &= e^{-(6000/5000)^{1/2}} \\ &= e^{-1.2} = 0.301 \end{aligned}$$

En consecuencia, el 30.1% de todos los cojinetes tendrán una duración al menos de 6000 horas.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 4-10

4-109. Suponga que X tiene una distribución Weibull con $\beta = 0.2$ y $\delta = 100$ horas. Determine la media y la varianza de X.

4-110. Suponga que X tiene una distribución Weibull con $\beta = 0.2$ y $\delta = 100$ horas. Calcule lo siguiente:

- **a.** $P(X < 10\,000)$
- **b.** $P(X > 5000)$

4-111. Suponga que el tiempo de vida útil de un cojinete de rodillos sigue una distribución Weibull con parámetros $\beta = 2$ y $\delta = 10\,000$ horas.

- **a.** Determine la probabilidad de que la duración del cojinete sea al menos de ocho mil horas.
- **b.** Determine el tiempo medio de falla del cojinete.
- **c.** Si se emplean 10 cojinetes y las fallas se presentan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que los 10 cojinetes tengan una duración de menos ocho mil horas?

4-112. Suponga que la duración de un disco magnético empaquetado expuesto a gases corrosivos tiene una distribución Weibull con $\beta = 0.5$ y una vida media de 600 horas.

- **a.** Calcule la probabilidad de que un disco empaquetado dure al menos 500 horas.
- **b.** Calçule la probabilidad de que un disco empaquetado falle antes de 400 horas.

4-113. El tiempo de duración de una bomba de recirculación sigue una distribución Weibull con parámetros $\beta = 2$ y $\delta = 700$ horas.

a. Determine la vida media de la bomba.

b. Determine la varianza del tiempo de duración de la bomba.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la bomba trabaje más allá de la vida media?

4-114. La distribución exponencial es un caso especial de la distribución Weibull.

a. ¿Para qué valores de los parámetros β y δ la variable aleatoria Weibull tiene una distribución exponencial?

b. Si X es una variable aleatoria Weibull con $\beta = 1$ y $\delta = 1000$, ¿cuáles son la distribución y la media de X?

Ejercicios complementarios

4-115. Suponga que $f_X(x) = 0.5x - 1$ para $2 < x < 4$. Calcule lo siguiente:

a. $P(X < 2)$

b. $P(X > 3)$

c. $P(2.5 < X < 3.5)$

4-116. **Continuación del ejercicio 4-115.** Encuentre la función de distribución acumulada de la variable aleatoria del ejercicio 4-115.

4-117. **Continuación del ejercicio 4-115.** Determine la media y la varianza de la variable aleatoria del ejercicio 4-115.

4-118. El tiempo entre llamadas tiene una distribución exponencial con un promedio entre llamadas de 10 minutos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran menos de cinco minutos antes de recibir la primera llamada?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre la segunda y la tercera llamadas esté entre 5 y 15 minutos?

c. Determine la longitud de un intervalo de tiempo para que la probabilidad de recibir al menos una llamada en ese lapso sea 0.90.

4-119. **Continuación del ejercicio 4-118.**

a. Si no se ha recibido ninguna llamada en 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que haya que esperar menos de 5 minutos para recibirla?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciban llamadas en los intervalos de las 10:00 a las 10:05, de 11:30 a 11:35 y de 2:00 a 2:05?

4-120. **Continuación del ejercicio 4-118.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban exactamente cuatro llamadas en un minuto?

b. ¿Cuál es el tiempo promedio que hay que esperar para recibir la quinta llamada?

4-121. La UCP (unidad de procesamiento central) de una computadora personal tiene una duración que está distribuida de manera exponencial, con un tiempo promedio de seis años. El propietario de la computadora tiene tres años con ella. ¿Cuál es la probabilidad de que la UCP falle en los próximos tres años?

4-122. **Continuación del ejercicio 4-121.** Suponga que una compaañía adquirió 10 computadoras hace tres años; también suponga que las UCP fallan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos falle una en los siguientes tres años?

4-123. Las fibras de asbesto en una muestra de polvo son identificadas mediante microscopía electrónica, después de preparar la muestra. Suponga que el número de fibras es una variable aleatoria Poisson y que el número promedio de fibras por centímetro cuadrado de superficie de polvo es 100. Se toma una muestra de 800 centímetros cuadrados de polvo y se le analiza. Suponga que una rejilla particular de la celda bajo el microscopio representa un 1/160 000 de la muestra.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una fibra sea visible en la rejilla de la celda?

b. ¿Cuál es el número promedio de rejillas de celda que se requieren para observar fibras en 10 de ellas?

c. ¿Cuál es la desviación estándar del número de rejillas que se necesitan ver para observar fibras en 10 de ellas?

4-124. Sin un sistema de irrigación automatizado, la altura de las plantas, dos semanas después de la germinación, tiene una distribución normal con una media de 2.5 centímetros y una desviación estándar de 0.5 centímetros.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura de una planta sea mayor que 3.5 centímetros?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura de una planta esté entre 2.0 y 3.0 centímetros?

c. ¿Qué altura es la que excede el 90% de las plantas?

4-125. **Continuación del ejercicio 4-124.** Con un sistema de irrigación automatizado, una planta crece hasta una altura de 3.5 centímetros, luego de dos semanas de haber germinado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de tener una planta con altura igual o mayor que ésta a partir de la distribución de alturas del ejercicio 4-124?

b. ¿Es posible pensar que el sistema de irrigación automatizado tiene que ver con el aumento en la altura de la planta después de dos semanas de haber germinado?

4-126. El espesor del laminado que cubre una superficie de madera tiene una distribución normal con una media de 5 milímetros y desviación estándar de 0.2 milímetros.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el espesor de una cubierta sea mayor que 5.5 milímetros?

b. Si las especificaciones requieren que el espesor esté entre 4.5 y 5.5 milímetros, ¿qué proporción de cubiertas no cumple con estas especificaciones?

c. ¿Debajo de qué valor está el espesor de la cubierta del 90% de las muestras?

4-127. El diámetro del punto producido por una impresora tiene una distribución normal con un diámetro promedio de 0.002 pulgadas. Suponga que las especificaciones requieren que el diámetro del punto esté entre 0.0014 y 0.0026 pulgadas. Si la probabilidad de que el punto cumpla con las especificaciones es 0.9973, ¿qué valor debe tener la desviación estándar para que esto suceda?

4-128. **Continuación del ejercicio 4-127.** Suponga que la desviación estándar del tamaño del punto es 0.0004 pulgadas. Si la probabilidad de que el punto cumpla con las especificaciones es 0.9973, ¿cuáles deben ser estas especificaciones? Suponga además que las especificaciones se eligen de manera simétrica alrededor de la media de 0.002 pulgadas.

4-129. La duración de un láser semiconductor a potencia constante tiene una distribución normal con una media de 7000 horas y desviación estándar de 600 horas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el láser falle antes de 5800 horas?

b. ¿Cuál es la duración, en horas, que excede el 90% de todos los láseres?

4-130. **Continuación del ejercicio 4-129.** ¿Cuál debe ser el tiempo de duración promedio para que el 99% de los láseres sea mayor que 10 000 horas antes de que fallen?

4-131. **Continuación del ejercicio 4-129.** Un producto contiene tres láseres, y el producto falla si cualquiera de los láseres falla. Suponga que los láseres fallan de manera independiente. ¿Cuál debe ser la duración promedio de los láseres para que el 99% de los productos rebasen las 10 000 horas de funcionamiento antes de que fallen?

4-132. Una pulgada cuadrada de tejido para alfombra contiene 50 fibras. La probabilidad de que una fibra esté dañada es 0.0001. Suponga que las fibras dañadas aparecen de manera independiente.

a. Obtenga una aproximación para la probabilidad de hallar una fibra dañada en una yarda cuadrada de alfombrado.

b. Obtenga una aproximación para la probabilidad de hallar cuatro o más fibras dañadas en una yarda cuadrada de alfombrado.

EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

4-133. Los pasos en este ejercicio conducen a la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X, Erlang, con parámetros λ y r, $f_X(x; \lambda, r) = \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}/(r-1)!$, $x > 0$, $r = 1, 2, \ldots$

a. Utilice la distribución Poisson para expresar $P(X > x)$.

b. Haga uso del resultado del inciso **a**) para determinar la función de distribución acumulada de X.

c. Derive la función de distribución acumulada del inciso **b**) y simplifique para obtener la función de densidad de probabilidad de X.

4-134. Un cojinete contiene 10 baleros. Suponga que los diámetros de los baleros son independientes y que tienen una distribución normal con una media de 1.5 milímetros y desviación estándar de 0.025 milímetros. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro máximo de los baleros en el cojinete sea mayor que 1.6 milímetros?

4-135. Sea la variable aleatoria X una medición tomada de un producto manufacturado. Suponga que el valor deseado de la medición es m. Por ejemplo, X puede ser una longitud, y el valor deseado igual a 10 milímetros. La **pérdida de la calidad** del proceso para elaborar el producto se define como el valor esperado de $\$k(X-m)^2$, donde k es una constante que relaciona una desviación del valor deseado con una pérdida medida en unidades monetarias.

a. Suponga que X es una variable aleatoria continua con $E(X) = m$ y $V(X) = \sigma^2$. ¿Cuál es la pérdida de calidad del proceso?

b. Suponga que X es una variable aleatoria continua con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. ¿Cuál es la pérdida de calidad del proceso?

4-136. La duración de un amplificador electrónico está modelada como una variable aleatoria exponencial. Si el 10% de los amplificadores tienen una duración media de 20 000 horas, mientras que la del resto es de 50 000 horas, ¿cuál es la proporción de amplificadores que fallan antes de 60 000 horas?

4-137. **Propiedad de la carencia de memoria.** Demuestre que para una variable aleatoria exponencial X,

$$P(X < t_1 + t_2 | X > t_1) = P(X < t_2)$$

4-138. Se dice que un proceso es de **calidad seis sigma** si su media de éste está al menos a seis desviaciones estándar de la especificación más cercana. Suponga que se hacen mediciones que tienen una distribución normal.

a. Si la media del proceso está centrada entre las especificaciones superior e inferior a una distancia de seis desviaciones estándar de cada una de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que el producto no cumpla con las especificaciones? Haga uso del hecho de que 0.000001 es igual a una parte por millón, para expresar la respuesta en partes por millón.

b. Dado que es difícil mantener la media de un proceso centrada entre las especificaciones, la probabilidad de que un producto no cumpla con ellas a menudo se calcula después de suponer los corrimientos del proceso. Si la media del proceso, tal como está dada en el inciso **a**), se desplaza hacia arriba 1.5 desviaciones estándar, ¿cuál es la probabilidad de que un producto no cumpla con las especificaciones? Exprese la respuesta en partes por millón.

5 Distribuciones de probabilidad conjunta

En los capítulos 3 y 4 se estudiaron distribuciones de probabilidad para una sola variable aleatoria. Sin embargo, a menudo es útil definir en un experimento aleatorio más de una variable aleatoria. Por ejemplo, en la clasificación de señales transmitidas y recibidas, cada una de ellas puede clasificarse como de baja, mediana y alta calidad. Incluso puede definirse una variable aleatoria X igual al número de señales de alta calidad recibidas, y otra variable Y igual al número de señales de baja calidad recibidas. En otro ejemplo, la variable aleatoria continua X puede denotar la longitud de una pieza moldeada por inyección, y la variable aleatoria continua Y puede ser el ancho de la pieza. El interés recae en probabilidades que pueden expresarse en términos de X y Y. Por ejemplo, si las especificaciones para X y Y son (2.95 a 3.05) y (7.60 a 7.80) milímetros, respectivamente, entonces puede tenerse interés en la probabilidad de que una pieza cumpla con ambas especificaciones; esto es, $P(2.95 < X < 3.05 \text{ y } 7.60 < Y < 7.80)$.

En general, si X y Y son dos variables aleatorias, la distribución de probabilidad que define el comportamiento simultáneo de éstas se conoce como **distribución de probabilidad conjunta**. En este capítulo se investigan algunas propiedades importantes de estas distribuciones conjuntas.

5-1 DOS VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

5-1.1 Distribuciones de probabilidad conjunta

Por simplicidad, se comienza considerando experimentos aleatorios en los que sólo intervienen dos variables aleatorias. Hacia el final del capítulo se generaliza esta presentación a la distribución de probabilidad conjunta de más de dos variables aleatorias.

EJEMPLO 5-1

En el desarrollo de un nuevo receptor para la transmisión de información digital, cada bit recibido se clasifica como aceptable, dudoso o inaceptable, dependiendo de la calidad de la señal recibida, con probabilidades 0.9, 0.08 y 0.02, respectivamente.

Considérense los primeros cuatro bits transmitidos y sea X el número de bits aceptables, y Y el número de bits dudosos. Supóngase que la clasificación de cada bit es independiente. Entonces, la distribución de X es binomial con $n = 4$ y $p = 0.9$, y la de Y es binomial con $n = 4$ y $p = 0.08$. Sin embargo, ya que sólo se clasifican cuatro bits, los valores posibles de X y Y están restringidos a los puntos que se muestran en la gráfica de la figura 5-1. Aunque los valores posibles de X son 0, 1, 2, 3 o 4, si $y = 3$, entonces $x = 0$ o 1. Al especificar la probabilidad en cada uno de los puntos de la figura 5-1, lo que se hace es especificar la distribución de probabilidad conjunta de X y Y. De manera similar a lo que se hace con una variable aleatoria individual, el rango de las variables aleatorias (X, Y) se define como el conjunto de todos los puntos (x, y) en el espacio bidimensional para los que la probabilidad de que $X = x$ y $Y = y$ es positiva.

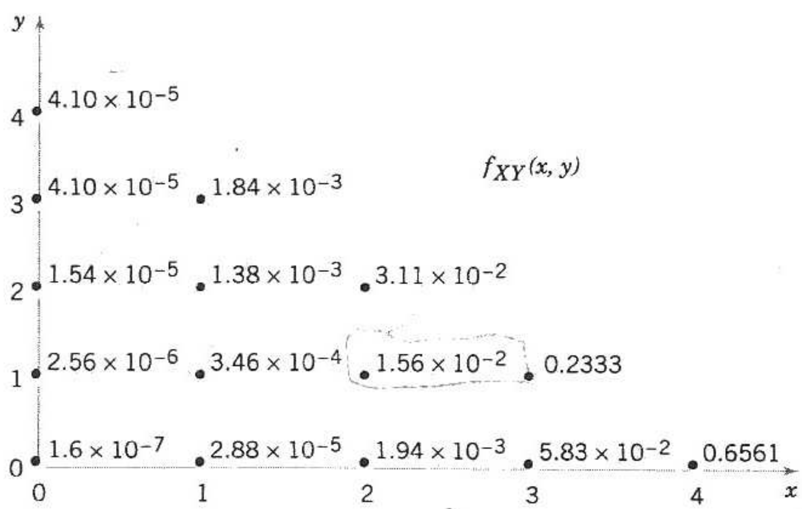


Figura 5-1 Distribución de probabilidad conjunta de X y Y en el ejemplo 5-1.

Si X y Y son variables aleatorias discretas, la distribución de probabilidad conjunta de X y Y es una descripción del conjunto de puntos (x, y) en el rango de (X, Y) junto con la probabilidad asociada con cada uno de ellos. La distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias se conoce en ocasiones como **distribución de probabilidad bivariada** o **distribución bivariada** de las variables aleatorias. Una manera de describir la distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas es a través de una función de probabilidad conjunta. Asimismo, $P(X = x \text{ y } Y = y)$ usualmente se escribe como $P(X = x, Y = y)$.

Definición

La **función de probabilidad conjunta** de las variables aleatorias discretas X y Y, denotada por $f_{XY}(x, y)$, satisface las condiciones siguientes:

(1) $f_{XY}(x, y) \geq 0$

(2) $\sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$

(3) $f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$ (5-1)

Del mismo modo que la función de probabilidad de una sola variable aleatoria X es cero para todos los valores que están fuera del rango de X, la función de probabilidad conjunta de X y Y es cero para todos los valores en los que no se específica probabilidad alguna.

EJEMPLO 5-2

Continuando con el ejemplo 5-1, las probabilidades para cada punto de la figura 5-1 se obtienen de la manera siguiente. Por ejemplo, $P(X = 2, Y = 1)$ es la probabilidad de que se reciban exactamente dos bits aceptables y uno dudoso entre los cuatro bits transferidos. Sean A, D e I los eventos aceptable, dudoso e inaceptable, respectivamente. Por la hipótesis de independencia,

$$P(AADI) = 0.9(0.9)(0.08)(0.02) = 0.0013$$

El número de secuencias posibles que están formadas por dos A, una D y una I es (véase apéndice I)

$$\frac{4!}{1!2!1!} = 12$$

Por consiguiente,

$$f_{XY}(2, 1) = P(X = 2, Y = 1) = 12(0.0013) = 0.0156.$$

Las probabilidades para todos los puntos de la figura 5-1 son las que aparecen en la parte derecha de cada punto. La figura 5-1 describe la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

5-1.2 Distribuciones de probabilidad marginal

Si en un experimento aleatorio se define más de una variable aleatoria, entonces es importante distinguir entre la distribución de probabilidad conjunta de X y Y y la distribución de probabilidad de cada una de las variables por separado. En este caso, la distribución de probabilidad de cada variable aleatoria recibe el nombre de **distribución de probabilidad marginal**. Para el ejemplo 5-2, la distribución de probabilidad conjunta de X y Y es la que aparece en la figura 5-1. Ya se mencionó que la distribución de probabilidad marginal de X es binomial con $n = 4$ y $p = 0.9$, mientras que la distribución de probabilidad marginal de Y también es binomial con $n = 4$ y $p = 0.08$.

En general, la distribución de probabilidad marginal de X puede obtenerse a partir de la distribución de probabilidad conjunta de X y las demás variables aleatorias. Por ejemplo, para determinar $P(X=x)$, se suma $P(X=x, Y=y)$ sobre todos los puntos del rango de (X, Y) para los que $X=x$.

EJEMPLO 5-3

La distribución de probabilidad conjunta de X y Y de la figura 5-1 puede emplearse para hallar la distribución de probabilidad marginal de X. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(X = 3, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) \\ &= 0.0583 + 0.2333 \\ &= 0.292 \end{aligned}$$

Tal como era de esperarse, esta probabilidad concuerda con el resultado obtenido a partir de la distribución de probabilidad binomial de X, esto es, $P(X=3) = \binom{4}{3}0.9^3 0.1^1 = 0.292$. La distribución de probabilidad marginal de X se obtiene al sumar las probabilidades en cada columna, mientras que la distribución de probabilidad marginal de Y se obtiene al sumar las

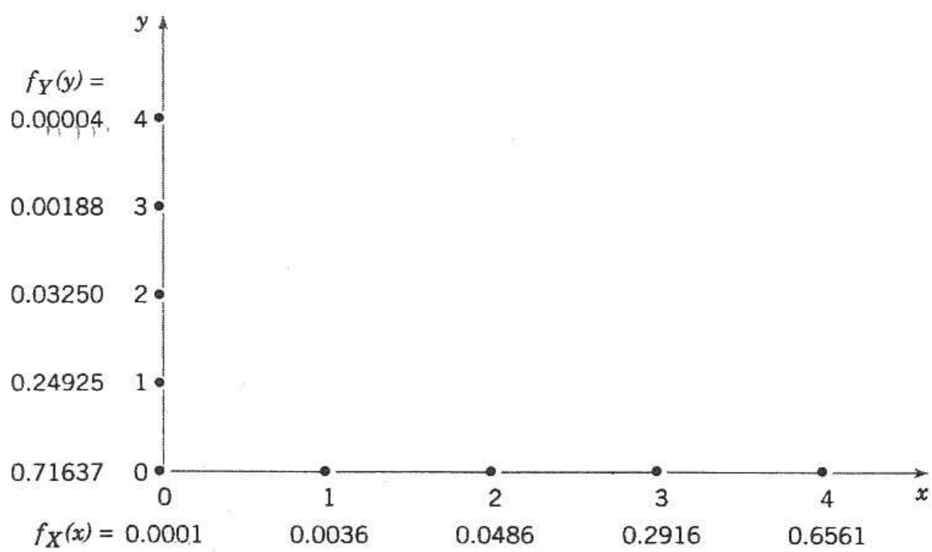


Figura 5-2 Distribuciones de probabilidad marginal de las variables X y Y de la figura 5-1.

probabilidades en cada renglón. Los resultados aparecen en la figura 5-2. Aunque, en este ejemplo, la distribución de probabilidad marginal de X puede obtenerse de manera directa a partir de la descripción del experimento, en algunos problemas la distribución de probabilidad marginal sólo puede hallarse a partir de la distribución de probabilidad conjunta.

Definición

Si X y Y son variables aleatorias discretas con una función de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$, entonces las **funciones de probabilidad marginal** de X y Y son

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{R_x} f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{R_y} f_{XY}(x, y)$$

donde

R_x denota el conjunto de todos los puntos en el rango de (X, Y) para los que $X = x$, y R_y denota el conjunto de todos los puntos en el rango de (X, Y) para los que $Y = y$. (5-2)

Dada una función de probabilidad conjunta para las variables aleatorias X y Y, $E(X)$ y $V(X)$ pueden obtenerse directamente a partir de la distribución de probabilidad conjunta de X y Y, o al calcular primero la distribución de probabilidad marginal de X para determinar después $E(X)$ y $V(X)$ por el método usual.

Si la distribución de probabilidad marginal de X tiene la función de probabilidad $f_X(x)$, entonces

$$E(X) = \mu_X = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x \left(\sum_{R_x} f_{XY}(x,y) \right) = \sum_x \sum_{R_x} x f_{XY}(x,y)$$

y

$$V(X) = \sum_x (x - \mu_X)^2 f_X(x)$$

$$= \sum_x \sum_{R_x} (x - \mu_X)^2 f_{XY}(x,y)$$

EJEMPLO 5-4

En el ejemplo 5-2, $E(X)$ puede hallarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0[f_{XY}(0,0) + f_{XY}(0,1) + f_{XY}(0,2) + f_{XY}(0,3) + f_{XY}(0,4)] \\ &\quad + 1[f_{XY}(0,0) + f_{XY}(0,1) + f_{XY}(0,2) + f_{XY}(0,3)] \\ &\quad + 2[f_{XY}(0,0) + f_{XY}(0,1) + f_{XY}(0,2)] \\ &\quad + 3[f_{XY}(0,0) + f_{XY}(0,1)] \\ &\quad + 4[f_{XY}(0,0)] \\ &= 0[0.0001] + 1[0.0036] + 2[0.0486] + 3[0.2916] + 4[0.6561] \\ &= 3.6 \end{aligned}$$

Como alternativa, dado que la distribución de probabilidad marginal de X es binomial,

$$E(X) = np = 4(0.9) = 3.6$$

El cálculo con el empleo de la distribución de probabilidad conjunta puede utilizarse para determinar $E(X)$, incluso en los casos donde la distribución de probabilidad marginal de X no es conocida. Como práctica, el lector puede hacer uso de la distribución de probabilidad conjunta para verificar, en el ejemplo 5-2, que $E(Y) = 0.32$.

Por otra parte,

$$V(X) = np(1-p) = 4(0.9)(1-0.9) = 0.36$$

Verifíquese que puede obtenerse el mismo resultado a partir de la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

5-1.3 Distribuciones de probabilidad condicional

Cuando en un experimento aleatorio se definen dos variables aleatorias, el conocimiento de una puede cambiar las probabilidades que se asocian con los valores de la otra. Recuérdese que, en el ejemplo 5-2, X denota el número de bits aceptables, y Y, el número de bits dudosos recibidos por el receptor. Dado que sólo se transmiten cuatro bits, si $X = 4$, entonces Y debe ser igual a cero. Al emplear la notación para las probabilidades condicionales del capítulo 2, el resultado anterior puede escribirse como $P(Y = 0 \mid X = 4) = 1$. Si $X = 3$, entonces Y sólo puéde ser igual a 0 o 1. En consecuencia, las variables aleatorias X y Y pueden considerarse como dependientes. El conocimiento de los valores obtenidos para X cambia las probabilidades asociadas con los valores de Y.

Recuérdese que la definición de probabilidad condicional para los eventos A y B es $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$. Esta definición puede aplicarse con los eventos A y B definidos como $X = x$, y $Y = y$, respectivamente.

EJEMPLO 5-5

Para el ejemplo 5-2,

$$\begin{aligned} P(Y = 0 \mid X = 3) &= P(X = 3, Y = 0) \,/\, P(X = 3) \\ &= f_{XY}(3,0) \,/\, f_X(3) \\ &= 0.05832 \,/\, 0.2916 = 0.200 \end{aligned}$$

La probabilidad de que $Y = 1$ dado que $X = 3$ es

$$\begin{aligned} P(Y = 1 \mid X = 3) &= P(X = 3, Y = 1) \,/\, P(X = 3) \\ &= f_{XY}(3, 1) \,/\, f_X(3) \\ &= 0.2333/0.2916 = 0.800 \end{aligned}$$

Ya que $X = 3$, los únicos valores posibles para Y son 0 y 1. Nótese que $P(Y = 0 \mid X = 3) + P(Y = 1 \mid X = 3) = 1$. Los valores 0 y 1 para Y junto con las probabilidades 0.200 y 0.800 definen la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 3$.

El ejemplo 5-5 ilustra el hecho de que las probabilidades condicionales de que $Y = y$ dado que $X = x$ pueden pensarse como una nueva distribución de probabilidad. La siguiente definición generaliza estas ideas.

Definición

Dadas las variables aleatorias discretas X y Y con función de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$, la **función de probabilidad condicional** de Y dado que $X = x$ es

$$f_{Y|x}(y) = f_{XY}(x, y) \,/\, f_X(x) \quad \text{para } f_X(x) > 0 \qquad (5\text{-}3)$$

La función $f_{Y|x}(y)$ se utiliza para hallar las probabilidades para todos los valores posibles de Y dado que $X = x$. En otras palabras, esta expresión es la función de probabilidad para los valores posibles de Y dado que $X = x$. Con más precisión, sea R_x el conjunto de todos los puntos en el rango de (X, Y) para los que $X = x$. La función de probabilidad condicional proporciona las probabilidades condicionales para los valores de Y en el conjunto R_x.

Debido a que la función de probabilidad condicional $f_{Y|x}(y)$ es una función de probabilidad para toda y en R_x, se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $f_{Y|x}(y) \geq 0$

(2) $\sum_{R_x} f_{Y|x}(y) = 1$

(3) $P(Y = y \mid X = x) = f_{Y|x}(y)$ (5-4)

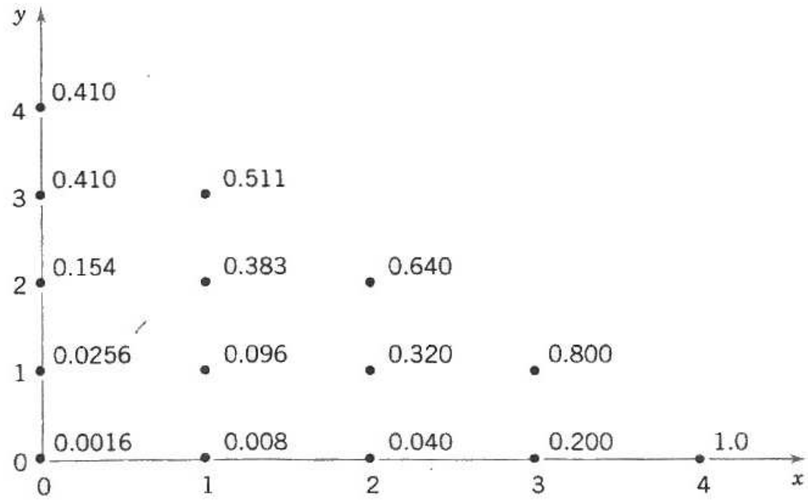


Figura 5-3 Distribuciones de probabilidad condicional de Y dado que $X = x$, $f_{Y|x}(y)$, en el ejemplo 5-1.

EJEMPLO 5-6

Para la distribución de probabilidad conjunta de la figura 5-1, $f_{Y|x}(y)$ se obtiene al dividir cada $f_{XY}(x, y)$ entre $f_X(x)$. En este caso, $f_X(x)$ es simplemente la suma de las probabilidades de cada columna de la figura 5-1. La figura 5-3 presenta la función $f_{Y|x}(y)$.

Las propiedades de las variables aleatorias pueden extenderse a la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = x$.

Definición

Sea R_x el conjunto de todos los puntos en el rango de (X, Y) para los que $X = x$. La **media condicional** de Y dado que $X = x$, denotada como $E(Y|x)$ o $\mu_{Y|x}$, es

$$E(Y \mid x) = \sum_{R_x} y\, f_{Y|x}(y)$$

y la **varianza condicional** de Y dado que $X = x$, denotada como $V(Y|x)$ o $\sigma^2_{Y|x}$, es

$$V(Y \mid x) = \sum_{R_x} (y_i - \mu_{Y|x})^2 f_{Y|x}(y). \tag{5-5}$$

EJEMPLO 5-7

Para las variables aleatorias del ejemplo 5-1, la media condicional de Y dado que $X = 2$ se obtiene a partir de la distribución condicional de la figura 5-3:

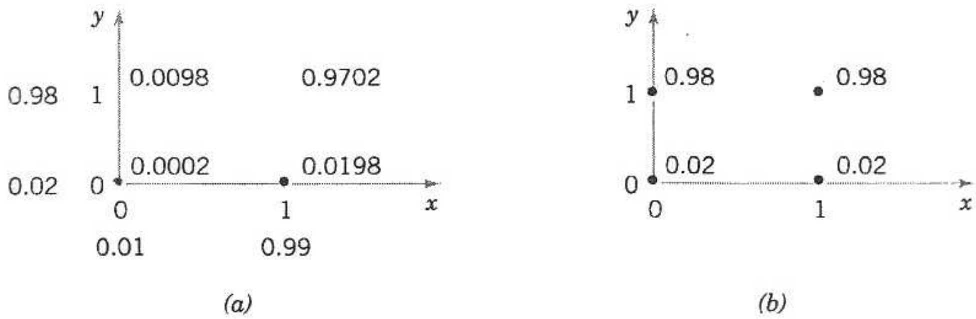


Figura 5-4 (a) Distribuciones de probabilidad conjunta y marginal de las variables X y Y del ejemplo 5-8. (b) Distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = x$ en el ejemplo 5-8.

$$E(Y \mid 2) = \mu_{Y|2} = 0(0.040) + 1(0.320) + 2(0.640) = 1.6$$

La media condicional se interpreta como el número esperado de bits aceptables, dado que dos de los cuatro bits que se transmiten son dudosos. La varianza condicional de Y dado que $X = 2$ es

$$V(Y \mid 2) = (0 - \mu_{Y|2})^2(0.040) + (1 - \mu_{Y|2})^2(0.320) + (2 - \mu_{Y|2})^2(0.640) = 0.32$$

5-1.4 Independencia

En algunos experimentos aleatorios, el conocimiento de los valores de X no cambia ninguna de las probabilidades asociadas con los valores de Y.

EJEMPLO 5-8

En una operación de moldeado de plástico, cada pieza se clasifica según cumpla las especificaciones de color y longitud. Se definen las variables aleatorias X y Y como:

$$X = \begin{cases} 0 \text{ si la pieza cumple las especificaciones de color} \\ 1 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y se definen las variables aleatorias Y como

$$Y = \begin{cases} 0 \text{ si la pieza cumple las especificaciones de longitud} \\ 1 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Supóngase que la distribución de probabilidad conjunta de X y Y está definida por $f_{XY}(x, y)$ de la figura 5-4a, donde también aparecen las distribuciones de probabilidad marginal de X y Y. Nótese que $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. La figura 5-4$b$ muestra la función de probabilidad condicional $f_{Y|x}(y)$. Nótese, además que para cualquier x, $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$. Esto es, el conocimiento que se tenga sobre si una parte cumple o no con las especificaciones de color, no cambia la probabilidad de que satisfaga las especificaciones de longitud.

Por analogía con los eventos independientes, se dice que dos variables aleatorias son **independientes** cada vez que $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ para toda x y y. Si dos variables aleatorias son independientes, entonces

$$f_{Y|x}(y) = f_{XY}(x, y) \,/\, f_X(x) = f_X(x)\, f_Y(y) \,/\, f_X(x) = f_Y(y)$$

> Para las variables aleatorias discretas X y Y, si se cumple cualquiera de las siguientes propiedades, entonces también se cumplen las demás, y X y Y son **independientes.**
>
> **(1)** $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ para toda x y y
> **(2)** $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$ para toda x y y con $f_X(x) > 0$
> **(3)** $f_{X|y}(x) = f_X(x)$ para toda x y y con $f_Y(y) > 0$
> **(4)** $P(X = x, Y = y) = f_X(x)\, f_Y(y)$ para todo (x, y) en el rango de X y Y
>
> (5-6)

Nótese que la independencia implica que $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ para *toda* x y y. Si se encuentra un par de x y y donde la igualdad falla, entonces X y Y no son independientes.

¿Rango rectangular para (X, Y)?
Si el conjunto de puntos en el espacio bidimensional que recibe una probabilidad positiva bajo $f_{XY}(x, y)$ no forma un rectángulo, entonces X y Y no son independientes, ya que el conocimiento de X puede restringir el rango de valores de Y que reciben una probabilidad positiva. Los ejemplos 5-2 y 5-5 ilustran este caso. El conocimiento de que $X = 3$ implica que Y sólo puede ser igual a 0 o 1. En consecuencia, la distribución de probabilidad marginal de Y no es igual a la distribución de probabilidad condicional $f_{Y|3}(y)$ para $X = 3$. Al hacer uso de esta idea, de inmediato se sabe que las variables aleatorias X y Y con la función de probabilidad conjunta de la figura 5-1, no son independientes. Si el conjunto de puntos en el espacio bidimensional que recibe una probabilidad positiva bajo $f_{XY}(x, y)$ forma un rectángulo, entonces la independencia es posible pero no definitiva, ya que todavía hay que verificar el cumplimiento de una condición más.

En lugar de verificar la independencia a partir de una distribución de probabilidad conjunta, lo que se hace a menudo es utilizar el conocimiento del experimento aleatorio para suponer que dos variables aleatorias son independientes. Con esto se calcula la función de probabilidad conjunta de X y Y a partir del producto de las funciones de probabilidad marginal.

EJEMPLO 5-9

En un embarque muy grande de piezas, se sabe que el 1% no cumple con las especificaciones. El proveedor inspecciona una muestra aleatoria de 30 piezas, y la variable aleatoria X denota el número de piezas de la muestra que no cumplen con las especificaciones. El comprador inspecciona otra muestra aleatoria de 20 piezas; la variable aleatoria Y es el número de piezas de esta muestra que no cumplen con las especificaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que $X \leq 1$ y $Y \leq 1$?

Aunque las muestras se toman sin remplazo, si el embarque es relativamente grande en comparación con el tamaño de las muestras, entonces pueden calcularse probabilidades aproximadas suponiendo que el muestreo se hace con remplazo y que X y Y son independientes. Con esta hipótesis, la distribución de probabilidad marginal de X es binomial con $n = 30$ y $p = 0.01$, mientras que la de Y es también binomial con $n = 20$ y $p = 0.01$.

La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(X \leq 1, Y \leq 1) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) \\ &\quad + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) \\ &= f_{XY}(0, 0) + f_{XY}(1, 0) + f_{XY}(0, 1) + f_{XY}(1, 1) \end{aligned}$$

De la independencia de X y Y

$$\begin{aligned} P(X \leq 1, Y \leq 1) &= f_X(0) f_Y(0) + f_X(1) f_Y(0) + f_X(0) f_Y(1) + f_X(1) f_Y(1) \\ &= [(0.99)^{30}][(0.99)^{20}] \\ &\quad + [30(0.01)^1(0.99)^{29}][(0.99)^{20}] \\ &\quad + [(0.99)^{30}][20(0.01)^1(0.99)^{19}] \\ &\quad + [30(0.01)^1(0.99)^{29}][20(0.01)^1(0.99)^{19}] \\ &= 0.948 \end{aligned}$$

Asimismo, nótese que $P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X \leq 1)P(Y \leq 1)$, dado que X y Y son independientes. Si en cada inspección se permite una pieza que no cumple con las especificaciones, entonces la probabilidad de que el embarque sea aceptado es 0.948, incluso si el 1% de las partes no cumple con las especificaciones. Si el proveedor y el comprador cambian sus políticas con respecto a la regla de que el embarque es aceptable sólo si no se encuentra ninguna pieza fuera de especificaciones en la muestra, entonces la probabilidad de aceptarlo sigue siendo bastante grande. Esto es,

$$P(X = 0, Y = 0) = 0.605$$

Este ejemplo muestra que la inspección no es un medio eficaz para alcanzar la calidad.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5-1

5-1 Demuestre que la siguiente función satisface las propiedades de una función de probabilidad conjunta.

x	y	$f_{XY}(x, y)$
1.5	2	1/8
1.5	3	1/4
2.5	4	1/2
3	5	1/8

5-2. **Continuación del ejercicio 5-1.** Calcule las probabilidades siguientes.

a. $P(X < 2.5, Y < 3)$

b. $P(X < 2.5)$

c. $P(Y < 3)$

d. $P(X > 1.8, Y > 4.7)$

5-3. **Continuación del ejercicio 5-1.** Determine $E(X)$ y $E(Y)$.

5-4. **Continuación del ejercicio 5-1.**

a. Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X.

b. Determine la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1.5$.

c. Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 2$.

5-5. Calcule el valor de c que hace que la función $f(x, y) = c(x + y)$ sea una función de probabilidad conjunta sobre los nueve puntos con $x = 1, 2, 3$ y $y = 1, 2, 3$.

5-6. **Continuación del ejercicio 5-5.** Calcule las probabilidades siguientes.

a. $P(X = 1, Y < 4)$

b. $P(X = 1)$

c. $P(Y = 2)$

d. $P(X < 2, Y < 2)$

5-7. **Continuación del ejercicio 5-5.** Determine $E(X)$ y $V(X)$.

5-8. **Continuación del ejercicio 5-5.**

a. Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X.

b. Determine la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1$.

c. Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 2$.

5-9. Demuestre que la siguiente función satisface las propiedades de una función de probabilidad conjunta.

x	y	$f_{XY}(x, y)$
-1	-2	1/8
-0.5	-1	1/4
0.5	1	1/2
1	2	1/8

5-10. **Continuación del ejercicio 5-9.** Calcule las siguientes probabilidades.

a. $P(X < 0.5, Y < 1.5)$

b. $P(X < 0.5)$

c. $P(Y < 1.5)$

d. $P(X > 0.25, Y < 4.5)$

5-11. **Continuación del ejercicio 5-9.** Determine $E(X)$ y $E(Y)$.

5-12. **Continuación del ejercicio 5-9.**

a. Determine el rango de la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X.

b. Determine el rango de la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1$.

5-13. De un gran lote de impresoras descompuestas, se toman cuatro. A continuación se analiza y se clasifica cada una de acuerdo con la presencia de un defecto grande o pequeño. Sean X y Y las variables aleatorias que denotan el número de impresoras que tienen defectos grandes y pequeños, respectivamente. Determine el rango de la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

5-14. En la transmisión de información digital, la probabilidad de que un bit tenga una distorsión alta, moderada o baja es 0.01, 0.04 y 0.95, respectivamente. Suponga que se transmiten tres bits y que la cantidad de distorsión de cada uno es independiente. Sean X y Y las variables aleatorias que denotan el número de bits, de los tres transmitidos, que tienen una distorsión alta o moderada, respectivamente.

a. ¿Cuál es el rango de la probabilidad conjunta de X y Y?

b. Calcule $P(X = 3, Y = 0)$.

c. Determine $P(X = 2, Y = 1)$.

d. Determine $P(X = 2, Y = 0)$.

5-15. En la fabricación de una cinta magnética, se coloca un rollo de cinta de 24 pulgadas en carretes de 48 y media pulgadas. Sean las variables aleatorias X y Y el número de carretes defectuosos en un rollo producido por un proveedor local y por uno internacional, respectivamente. Suponga que el número de carretes defectuosos de los dos proveedores son independientes, y que la proporción de carretes defectuosos de los proveedores local e internacional son 2 y 3%, respectivamente.

a. Describa el rango de la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

b. ¿Cuál es la distribución de probabilidad marginal de X? ¿Cuál la de Y?

c. ¿Cuál es el valor de $P(X = 0, Y = 0)$?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que tanto X como Y sean menores o iguales que uno?

5-16. **Continuación del ejercicio 5-15.** ¿Cuál es el valor de $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$?

5-17. **Continuación del ejercicio 5-1.** ¿Son independientes las variables aleatorias del ejercicio 5-1? Explique su respuesta.

5-18. **Continuación del ejercicio 5-5.** ¿Son independientes las variables aleatorias del ejercicio 5-5? Explique su respuesta.

5-19. **Continuación del ejercicio 5-9.** ¿Son independientes las variables aleatorias del ejercicio 5-9? Explique su respuesta.

5-20. **Continuación del ejercicio 5-14.** ¿Son independientes las variables aleatorias del ejercicio 5-14? Explique su respuesta.

5-2 MÚLTIPLES VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

5-2.1 Distribuciones de probabilidad conjunta

En algunos casos, se tienen definidas más de dos variables aleatorias en un experimento aleatorio. Por ejemplo, supóngase que, en el ejemplo 5-1, la calidad de cada bit recibido se clasifica aún más en cuatro clases: excelente, buena, aceptable o pobre, denotadas por E, B, A y P, respectivamente.

Sean las variables aleatorias X_1, X_2, X_3 y X_4 el número de bits que son E, B, A y P, respectivamente, en una transmisión de 20 bits. En este ejemplo, el interés está en la distribución de probabilidad conjunta de cuatro variables aleatorias. La distribución de probabilidad conjunta de X_1, X_2, X_3 y X_4 puede especificarse mediante una **función de probabilidad conjunta** $f_{X_1X_2X_3X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)$. Dado que cada uno de los 20 bits clasificados cae en una de las cuatro clases, sólo los valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 tales que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ reciben una probabilidad positiva en la función de probabilidad de X_1, X_2, X_3 y X_4. Para los demás valores, la función de probabilidad es cero.

Dadas las variables aleatorias discretas $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$, la **distribución de probabilidad conjunta** de $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$ es una descripción del conjunto de puntos $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)$ en el rango de $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$, junto con la probabilidad de cada punto. Una función de probabilidad conjunta es una extensión sencilla de la función de probabilidad bivariada.

Definición

La **función de probabilidad conjunta** de $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$ es

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_p = x_p)$$

para todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ en el rango de $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$. (5-7)

Una distribución de probabilidad marginal es una extensión sencilla del resultado obtenido para el caso de dos variables aleatorias.

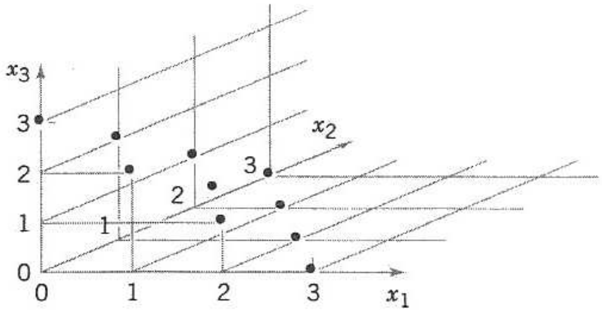


Figura 5-5 Distribución de probabilidad conjunta de X_1, X_2 y X_3.

Definición

Si $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$ son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, entonces la **función de probabilidad marginal** de cualquier X_i es

$$f_{X_i}(x_i) = P(X_i = x_i)$$
$$= \sum_{R_{x_i}} f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

donde

R_{x_i} denota el conjunto de puntos en el rango de $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p)$ para los que $X_i = x_i$. (5-8)

EJEMPLO 5-10

La figura 5-5 contiene la distribución de probabilidad conjunta de tres variables aleatorias X_1, X_2, X_3. El rango son los enteros no negativos para los que $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. La distribución de probabilidad marginal de X_2 se obtiene de la siguiente manera:

$$P(X_2 = 0) = f_{X_1X_2X_3}(3, 0, 0) + f_{X_1X_2X_3}(0, 0, 3) + f_{X_1X_2X_3}(1, 0, 2) + f_{X_1X_2X_3}(2, 0, 1)$$
$$P(X_2 = 1) = f_{X_1X_2X_3}(2, 1, 0) + f_{X_1X_2X_3}(0, 1, 2) + f_{X_1X_2X_3}(1, 1, 1)$$
$$P(X_2 = 2) = f_{X_1X_2X_3}(1, 2, 0) + f_{X_1X_2X_3}(0, 2, 1)$$
$$P(X_2 = 3) = f_{X_1X_2X_3}(0, 3, 0)$$

Además, $E(X_i)$ y $V(X_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, pueden obtenerse a partir de la distribución de probabilidad marginal de X_i, o de la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de la siguiente manera:

$$E(X_i) = \sum_R x_i f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

y

$$V(X_i) = \sum_R (x_i - \mu_{X_i})^2 f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

donde R es el conjunto de todos los puntos que están en el rango de $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

Con varias variables aleatorias, el interés puede recaer en la distribución de probabilidad de algún subconjunto de todas las variables. La distribución de probabilidad de $X_1, X_2, \ldots, X_k$, con $k < p$, puede obtenerse a partir de la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_p$, como sigue.

Definición

Si $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$ son variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta $f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, entonces la función de probabilidad marginal de $X_1, X_2, \ldots, X_k$, con $k < p$, es

$$\begin{aligned} f_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) \\ &= \sum_{R_{x_1 x_2 \ldots x_k}} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) \end{aligned}$$

donde

$R_{x_1 x_2 \ldots x_k}$ denota el conjunto de todos los puntos en el rango de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ para los que $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k$. (5-9)

Esto es, $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k)$ es la suma de las probabilidades de todos los puntos del rango de $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$ para los que $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k$. Más adelante se proporciona un ejemplo.

Distribuciones de probabilidad condicional

Las distribuciones de probabilidad condicional para múltiples variables aleatorias pueden obtenerse mediante una extensión de las ideas utilizadas para el caso con dos variables aleatorias discretas. Por ejemplo, la función de probabilidad condicional conjunta de X_1, X_2, X_3 dadas X_4, X_5 es

$$f_{X_1 X_2 X_3 | x_4 x_5}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,/\, f_{X_4 X_5}(x_4, x_5)$$

para $f_{X_4 X_5}(x_4, x_5) > 0$.

La función de probabilidad condicional conjunta de X_1, X_2, X_3 dadas X_4, X_5 proporciona las probabilidades condicionales en todos los puntos en el rango de X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 para los que $X_4 = x_4$ y $X_5 = x_5$.

Por otra parte, también es posible determinar distribuciones de probabilidad tales como la distribución de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 condicionada sobre X_4 y X_5 al dividir la función de probabilidad de X_1, X_2, X_4 y X_5 entre la función de probabilidad de X_4 y X_5,

$$f_{X_1 X_2 | x_4 x_5}(x_1, x_2) = f_{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5}(x_1, x_2, x_4, x_5) \,/\, f_{X_4 X_5}(x_4, x_5)$$

para $f_{X_4 X_5}(x_4, x_5) > 0$.

El concepto de independencia también puede extenderse al caso en que se tienen múltiples variables aleatorias discretas.

Definición

Las variables aleatorias discretas $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son **independientes** si y sólo si

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_p}(x_p)$$

para toda $x_1, x_2, \ldots, x_p$, (5-10)

De modo similar al resultado que se tiene para variables aleatorias bivariadas, la independencia implica que $f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_p}(x_p)$ para *toda* $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Si se encuentra un punto para el que la igualdad no se cumple, entonces $X_1, X_2, \ldots, X_p$ no son independientes.

5-2.2 Distribución de probabilidad multinomial

Una distribución de probabilidad conjunta para múltiples variables aleatorias discretas que es de gran utilidad, es una extensión de la binomial. El experimento aleatorio que genera la distribución de probabilidad consiste en una serie de ensayos independientes. Sin embargo, los resultados de cada ensayo pueden clasificarse en una de p clases. La clasificación de los bits recibidos mencionada en un ejemplo anterior, es una muestra de este tipo de experimento.

EJEMPLO 5-11

Supóngase que se tiene interés en determinar una probabilidad como la siguiente. De los 20 bits recibidos, ¿cuál es la probabilidad de que la calidad de 14 sea excelente; de 3, buena; de 2, aceptable y de 1, pobre? Supóngase que las clasificaciones de cada uno de los bits son eventos independientes y que las probabilidades de E, B, A y P son 0.6, 0.3, 0.08 y 0.02, respectivamente. Una secuencia de 20 bits que produce el número especificado de bits en cada clase, puede representarse como *EEEEEEEEEEEEEEBBBAAP*. Si se utiliza la independencia, se tiene que la probabilidad de esta secuencia es

$$P(EEEEEEEEEEEEEEBBBAAP) = 0.6^{14}0.3^{3}0.08^{2}0.02^{1} = 2.708 \times 10^{-9}$$

Es evidente que todas las secuencias que están formadas por el mismo número de letras E, B, A y P tienen la misma probabilidad. En consecuencia, la probabilidad pedida puede hallarse al multiplicar 2.708×10^{-9} por el número de secuencias con 14 letras E, tres letras B, dos letras A y una P. Del apéndice I, el número de secuencias es

$$\frac{20!}{14!3!2!1!} = 2325600$$

Por tanto, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(14 \text{ letras } E, \text{ tres letras } B, \text{ dos letras } A, \text{ una } P) &= 2325600(2.708 \times 10^{-9}) \\ &= 0.0063 \end{aligned}$$

El ejemplo 5-11 conduce a la siguiente generalización de un experimento binomial y una distribución binomial.

Distribución multinomial

Supóngase que un experimento aleatorio consiste de una serie de n ensayos. También supóngase que

(1) el resultado de cada ensayo se clasifica en una de k clases;

(2) la probabilidad de que un ensayo genere un resultado en la clase 1, la clase 2, . . . , la clase k, es constante en todos los ensayos e igual a $p_1, p_2, \ldots, p_k$, respectivamente;

(3) los ensayos son independientes.

Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ que denotan el número de ensayos que caen en la clase 1, en la clase 2, . . . , en la clase k, respectivamente, tienen una **distribución multinomial** con una función de probabilidad conjunta

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_p!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

para $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ y $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. (5-11)

La distribución multinomial se considera una extensión multivariable de la distribución binomial.

EJEMPLO 5-12

En el ejemplo 5-11, sean las variables aleatorias X_1, X_2, X_3 y X_4 el número de bits que son E, A, B y P, respectivamente, en una transmisión de 20 bits. La probabilidad de recibir 12 que sean E, 6 B, 2 E y 0 P es

$$P(X_1 = 12, X_2 = 6, X_3 = 2, X_4 = 0)$$

$$= \frac{20!}{12!6!2!0!} 0.6^{12}0.3^{6}0.08^{2}0.02^{0}$$

$$= 0.0358$$

Cada ensayo de un experimento aleatorio multinomial puede considerarse como generador o no de un resultado en la clase i, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Dado que la variable aleatoria X_i es el número de ensayos cuyo resultado pertenece a la clase i, X_i tiene una distribución binomial.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ tienen una distribución multinomial, la distribución de probabilidad marginal de X_i es binomial con

$$E(X_i) = np_i \quad \text{y} \quad V(X_i) = np_i(1 - p_i). \tag{5-12}$$

EJEMPLO 5-13

En el ejemplo 5-12, la distribución de probabilidad marginal de X_2 es binomial con $n = 20$ y $p = 0.3$.

Por otra parte, la distribución de probabilidad marginal conjunta de X_2 y X_3 se obtiene de la siguiente manera. La $P(X_2 = x_2, X_3 = x_3)$ es la probabilidad de que exactamente el resultado de x_2 ensayos sea B y que el de x_3 sea A. El resultado de los demás $n - x_2 - x_3$ ensayos debe ser E o P. En consecuencia, el resultado de cada ensayo del experimento puede considerarse como perteneciente a una de tres clases: $\{B\}$, $\{A\}$, o $\{E, P\}$, con probabilidades 0.3, 0.08 y 0.6 + 0.02 = 0.62, respectivamente. Con estas nuevas clases, es posible considerar que los ensayos comprenden un nuevo experimento multinomial. Por tanto,

$$f_{X_2X_3}(x_2, x_3) = P(X_2 = x_2, X_3 = x_3)$$

$$= \frac{n!}{x_2!x_3!\,(n - x_2 - x_3)!}(0.3)^{x_2}(0.08)^{x_3}(0.62)^{n-x_2-x_3}$$

La distribución de probabilidad conjunta de otros conjuntos de variables se encuentra de la misma manera.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5-2

5-21. Suponga que las variables aleatorias X, Y y Z tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0.05
1	1	2	0.10
1	2	1	0.15
1	2	2	0.20
2	1	1	0.20
2	1	2	0.15
2	2	1	0.10
2	2	2	0.05

Calcule lo siguiente:

a. $P(X = 1)$

b. $P(X = 1, Y = 2)$

c. $P(Z < 1.5)$

d. $P(X = 1 \quad \text{o} \quad Z = 2)$

e. $E(X)$

5-22. **Continuación del ejercicio 5-21.** Determine lo siguiente:

a. $P(X = 1|Y = 2)$

b. $P(X = 1, Y = 1 \mid Z = 2)$

c. $P(X = 1 \mid Y = 2, Z = 2)$

5-23. **Continuación del ejercicio 5-21.** Calcule la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 1$ y $Z = 2$.

5-24. La clasificación de una plancha de ferrita se hace con base en el número de huecos; la clasificación es alto, medio o bajo. El 5% de las planchas se clasifican como alto; el 80%, medio, y el 15%, bajo. Se toma una muestra de 20 planchas para someterlas a examen. Sean X, Y y Z el número de planchas clasificadas de manera independiente como alto, medio o bajo, respectivamente.

a. ¿Cuáles son los nombres y los valores de los parámetros de la distribución de probabilidad conjunta de X, Y y Z?

b. ¿Cuál es el rango de la distribución de probabilidad conjunta de X, Y, Z?

c. ¿Cuáles son los nombres y los valores de los parámetros de la distribución de probabilidad marginal de X?

d. Calcule $E(X)$ y $V(X)$.

5-25. **Continuación del ejercicio 5-24.** Calcule lo siguiente:

a. $P(X = 1, Y = 17, Z = 3)$

b. $P(X \leq 1, Y = 17, Z = 3)$

c. $P(X \leq 1)$

5-26. **Continuación del ejercicio 5-24.** Determine lo siguiente:

a. $P(X = 2, Z = 3 \mid Y = 17)$

b. $P(X = 2 \mid Y = 17)$

5-27. Un pedido de 15 impresoras contiene cuatro con una característica de mejoramiento de gráficas, cinco con memoria adicional y seis con ambas características. De este conjunto se eligen al azar cuatro impresoras, sin remplazo. Sean X, Y y Z las variables aleatorias que denotan el número de impresoras en la muestra que tienen mejoramiento de gráficas, memoria adicional o ambas características, respectivamente.

a. Describa el rango de la distribución de probabilidad conjunta de X, Y y Z.

b. ¿Es multinomial la distribución de probabilidad de X, Y y Z? Explique su respuesta.

c. Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 2$.

5-28. **Continuación del ejercicio 5-27.** Calcule lo siguiente:

a. $P(X = 1, Y = 2, Z = 1)$

b. $P(X = 1, Y = 1)$

c. $E(X)$ y $V(X)$

5-29. **Continuación del ejercicio 5-27.** Determine lo siguiente:

a. $P(X = 1, Y = 2 \mid Z = 1)$

b. $P(X = 2 \mid Y = 2)$

c. Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 0$ y $Z = 3$.

5-30. Se inspecciona una muestra de cuatro hornos electrónicos que se cayeron al ser embarcados, y se les clasifica de acuerdo con el tipo de defectos que presentan: grandes, menores o ninguno. En el pasado, 60% de los hornos que se cayeron tuvieron un defecto grande; 30% un defecto menor, y 10% ningún defecto. Suponga que los defectos en los cuatro hornos se presentan de manera independiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que, de los cuatro hornos que forman la muestra, dos tengan un defecto grande y dos uno menor?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún horno tenga un defecto?

5-31. **Continuación del ejercicio 5-30.** Determine la función de probabilidad conjunta del número de hornos que tienen un defecto mayor y del número de hornos que tienen un defecto menor.

5-32. En la transmisión de información digital, la probabilidad de que un bit sufra una distorsión alta, moderada o baja es 0.01, 0.04 y 0.95, respectivamente. Suponga que se transmiten tres bits y que la cantidad de distorsión en cada uno de ellos es independiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que dos bits tengan una distorsión alta y uno una distorsión moderada?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres bits tengan una distorsión baja?

5-33. **Continuación del ejercicio 5-32.** Sea X el número de bits con distorsión alta, de los tres transmitidos. ¿Cuál es la distribución de probabilidad, la media y la varianza de X?

5-3 DOS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

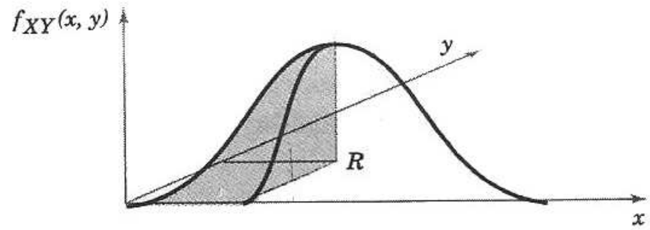
5-3.1 Distribuciones de probabilidad conjunta

La presentación que se hará de la distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias continuas será similar al estudio hecho con dos variables aleatorias discretas. Como ejemplo, supóngase que la variable aleatoria continua X denota la longitud de una dimensión de una pieza moldeada por inyección, y que la variable aleatoria continua Y denota la longitud de otra dimensión. El espacio muestral del experimento aleatorio consiste de puntos en el espacio bidimensional.

Es posible estudiar cada variable aleatoria por separado. Sin embargo, dado que las dos variables aleatorias son dimensiones de la misma pieza, es probable que pequeñas variaciones en el proceso de moldeado por inyección (tales como las variaciones de presión y temperatura) generen valores para X y Y en regiones específicas del espacio bidimensional. Por ejemplo, un ligero aumento en la presión puede generar piezas para las que X y Y son mayores que las dimensiones deseadas, mientras que una ligera disminución en la presión puede dar origen a piezas en las que tanto X como Y son menores que las dimensiones deseadas. En consecuencia, con base en las variaciones de presión, lo que se espera es que la probabilidad de una pieza con una X mucho mayor que el valor deseado y una Y mucho menor que el valor especificado, sea pequeña. El conocimiento de la distribución de probabilidad conjunta de X y Y proporciona información que no resulta obvia a partir de las distribuciones de probabilidad marginal.

La distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias continuas X y Y puede especificarse al proporcionar un método para el cálculo de la probabilidad de que X y Y tomen un valor en cualquier región R del espacio bidimensional. Es posible definir (de manera análoga a la función de densidad de probabilidad de una sola variable aleatoria continua) una **función de densidad de probabilidad conjunta** en el espacio bidimensional. La doble integral de $f_{XY}(x, y)$ sobre una región R proporciona la probabilidad de que (X, Y) tome un valor en R. Esta integral puede interpretarse como el volumen bajo la superficie $f_{XY}(x, y)$ sobre la región R.

La figura 5-6 presenta la gráfica de una función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y. La probabilidad de que (X, Y) tome un valor en la región R es igual al volumen de la región sombreada de la figura 5-6. Es así como la función de densidad de probabilidad conjunta puede emplearse para determinar las probabilidades de X y Y.



La probabilidad de que (X, Y) esté en la región R está determinada por el volumen de $f_{XY}(x, y)$ sobre la región R.

Figura 5-6 Función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y.

Definición

Una **función de densidad de probabilidad conjunta** para dos variables aleatorias continuas X y Y, denotada por $f_{XY}(x, y)$, satisface las siguientes propiedades.

(1) $f_{XY}(x, y) \geq 0$ para toda x, y

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy = 1$

(3) para cualquier región R del espacio bidimensional,

$$P([X, Y] \in R) = \iint_R f_{XY}(x, y)\, dx\, dy \qquad (5\text{-}13)$$

En general, $f_{XY}(x, y)$ se define sobre todo el espacio bidimensional al suponer que $f_{XY}(x, y) = 0$ para todos los puntos donde $f_{XY}(x, y)$ no está especificada.

EJEMPLO 5-14

En una copiadora, sea X la variable aleatoria que denota el tiempo de vida de un componente, en horas, y Y la variable aleatoria que denota el tiempo de vida de otro componente, también en horas. Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y es $f_{XY}(x, y) = 2 \times 10^{-6} e^{-0.001x - 0.002y}$ para $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Verifíquese que $f_{XY}(x, y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos componentes fallen en menos de 1000 horas de uso?

La figura 5-7 presenta la gráfica de $f_{XY}(x, y)$. La propiedad (2) de la ecuación 5-13 puede verificarse de la siguiente manera:

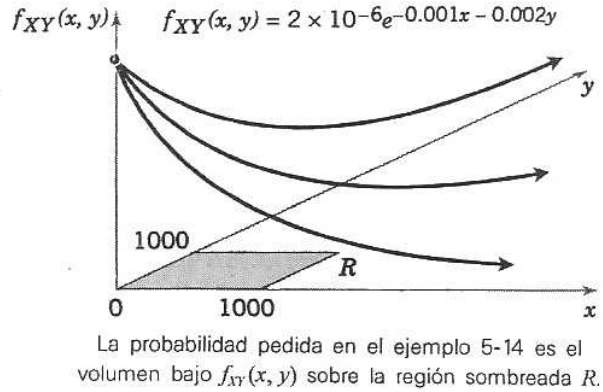


Figura 5-7 Función de densidad de probabilidad conjunta para el tiempo de vida de los componentes electrónicos del ejemplo 5-14.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} 2 \times 10^{-6}e^{-0.001x-0.002y}\, dx\, dy$$

$$= 2 \times 10^{-6}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-0.002y}\, dy\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-0.001x}\, dx\right)$$

$$= 2 \times 10^{-6}\left(\frac{1}{0.001}\right)\left(\frac{1}{0.002}\right)$$

$$= 1$$

La probabilidad de que ambos componentes fallen en menos de 1000 horas de uso, está representada por el volumen sobre la región sombreada de la figura 5-7.

$$P(X \leq 1000, Y \leq 1000)$$

$$= \int_{0}^{1000}\int_{0}^{1000} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy$$

$$= 2 \times 10^{-6}\left(\int_{0}^{1000} e^{-0.001x}\, dx\right)\left(\int_{0}^{1000} e^{-0.002y}\, dy\right)$$

$$= 2 \times 10^{-6}\left(\frac{1 - e^{-1}}{0.001}\right)\left(\frac{1 - e^{-2}}{0.002}\right)$$

$$= 2 \times 10^{-6}\,(632.12)(432.33)$$

$$= 0.547$$

5-3.2 Distribuciones de probabilidad marginal

De modo similar al caso de variables aleatorias discretas conjuntas, pueden hallarse las distribuciones de probabilidad marginal de X y Y a partir de la distribución de probabilidad conjunta.

Definición

Si la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas X y Y es $f_{XY}(x, y)$, entonces las **funciones de densidad de probabilidad marginal** de X y Y son

$$f_X(x) = \int_{R_x} f_{XY}(x, y)\, dy$$
$$f_Y(y) = \int_{R_y} f_{XY}(x, y)\, dx \qquad (5\text{-}14)$$

donde

R_x denota el conjunto de todos los puntos del rango de (X, Y) para los que $X = x$, y
R_y denota el conjunto de todos los puntos del rango de (X, Y) para los que $Y = y$.

Una probabilidad donde sólo aparece una variable aleatoria, por ejemplo, $P(a < X < b)$, puede obtenerse a partir de la distribución de probabilidad marginal de X, o de la distribución de probabilidad conjunta de X y Y. Por ejemplo, $P(a < X < b)$ es igual a $P(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \int_a^b \int_{R_x} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{R_x} f_{XY}(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_a^b f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

La distribución de probabilidad marginal de las variables aleatorias X y Y de la figura 5-6 aparece en la figura 5-8.

EJEMPLO 5-15

Para las variables aleatorias que denotan tiempos de vida útil del ejemplo 5-14, encuéntrese la probabilidad de que el primer componente funcione más de 2000 horas.

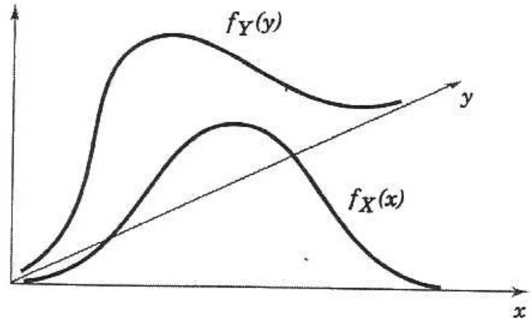
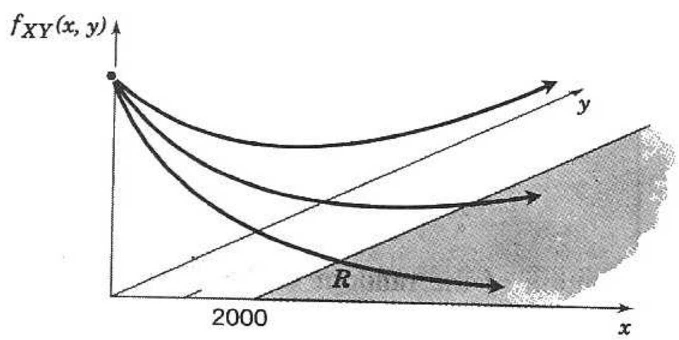


Figura 5-8 Distribuciones de probabilidad marginal de las variables aleatorias X y Y de la figura 5-6.

Esta probabilidad es

$$
\begin{aligned}
P(X > 2000) &= P(X > 2000 \quad \text{y} \quad -\infty < Y < \infty) \\
&= \int_{2000}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx \\
&= 2 \times 10^{-6} \left[\int_{2000}^{\infty} e^{-0.001x}\, dx \right] \left[\int_{0}^{\infty} e^{-0.002y}\, dy \right] \\
&= 2 \times 10^{-6} \left[-\frac{e^{-0.001x}}{0.001} \Bigg|_{2000}^{\infty} \times -\frac{e^{-0.002y}}{0.002} \Bigg|_{0}^{\infty} \right] \\
&= 2 \times 10^{-6} [135.33][500] \\
&= 0.135
\end{aligned}
$$

Esta probabilidad se ilustra en la figura 5-9.



La probabilidad de que $X > 2000$ en el ejemplo 5-15 es el volumen bajo $f_{XY}(x, y)$ sobre la región sombreada R.

Figura 5-9 Función de densidad de probabilidad conjunta para el tiempo de vida de los componentes electrónicos del ejemplo 5-15.

Otra opción es calcular la probabilidad pedida a partir de la distribución de probabilidad marginal de X. Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= 2 \times 10^{-6} \left[\int_0^{\infty} e^{-0.001x - 0.002y}\, dy \right] \\
&= 2 \times 10^{-6}\, e^{-0.001x} \left[\left. \frac{-e^{-0.002y}}{0.002} \right|_0^{\infty} \right] \\
&= 2 \times 10^{-6}\, e^{-0.001x}\, [500] \\
&= 0.001\, e^{-0.001x}
\end{aligned}
$$

La distribución de probabilidad marginal de X es exponencial con $E(X) = 1000$. Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
P(X > 2000) &= 1 - F_X(x) \\
&= e^{-0.001(2000)} = e^{-2} = 0.135
\end{aligned}
$$

5-3.3 Distribuciones de probabilidad condicional

De manera análoga al caso de las variables aleatorias discretas, puede definirse la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = x$.

Definición

Dadas las variables aleatorias continuas X y Y con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$, la **función de densidad de probabilidad condicional** de Y dado $X = x$ es

$$f_{Y|x}(y) = f_{XY}(x, y) \,/\, f_X(x) \quad \text{para } f_X(x) > 0 \tag{5-15}$$

La función $f_{Y|x}(y)$ se utiliza para determinar las probabilidades de los posibles valores de Y dado que $X = x$. Sea R_x el conjunto de todos los puntos en el rango de (X, Y) para los que $X = x$. La función de densidad de probabilidad condicional proporciona las probabilidades condicionales para los valores de Y que están en el conjunto R_x.

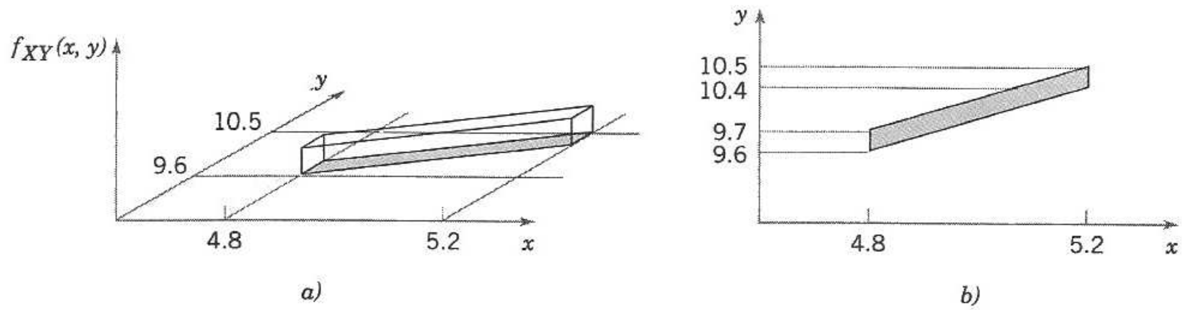


Figura 5-10 Función de densidad de probabilidad conjunta para las longitudes de dos de las dimensiones de piezas moldeadas por inyección.

> Dado que la función de probabilidad condicional $f_{Y|x}(y)$ es una función de probabilidad para toda y en R_x, satisface las siguientes propiedades.
>
> (1) $f_{Y|x}(y) \geq 0$
>
> (2) $\int_{R_x} f_{Y|x}(y) = 1$
>
> (3) $P(Y \in B \mid X = x) = \int_B f_{Y|x}(y)\, dy$ para cualquier conjunto B en el rango de Y (5-16)

Es importante establecer la región en la que la función de densidad de probabilidad conjunta, marginal o condicional no es cero. Los siguientes ejemplos ilustran esta situación.

EJEMPLO 5-16

Supóngase que la variable aleatoria continua X denota la longitud de una de las dimensiones de una pieza moldeada por inyección, y que la variable aleatoria continua Y denota la longitud de otra dimensión de la misma pieza. Supóngase además que la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ es constante sobre la región R identificada por $4.8 < x < 5.2$ y $2x < y < 2x + 0.1$. Esta región aparece en las figuras 5-10*a* y 5-10*b*.

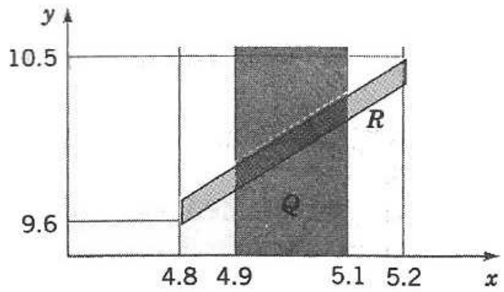
Sea c el valor constante, no conocido, de $f_{XY}(x, y)$. Ya que la función de densidad de probabilidad conjunta debe satisfacer la propiedad (2) de la ecuación 5-13,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{4.8}^{5.2} \int_{2x}^{2x+0.1} c\, dy\, dx$$

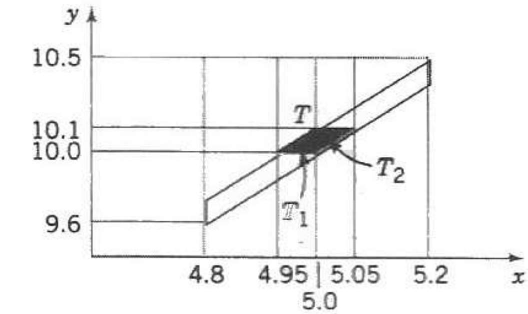
Una vez efectuada la integración, se tiene que $c = 25$.

Determínese $P(4.9 < X < 5.1)$. Esto representa la probabilidad de que la dimensión X cumpla las especificaciones. Esta probabilidad es el volumen bajo la $f_{XY}(x, y)$ sobre la región $4.9 < x < 5.1$, la cual aparece indicada con una Q en la figura 5-11*a*. Sin embargo, $f_{XY}(x,$



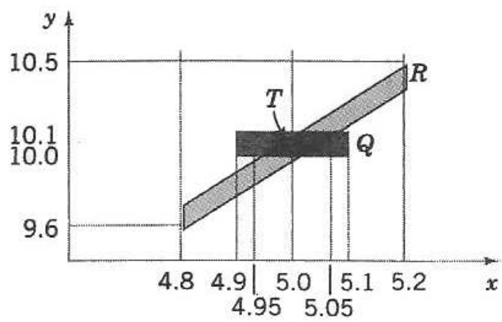
$P(4.9 < X < 5.1)$ es el volumen de $f_{XY}(x, y)$ sobre la región de sombreado más oscuro, donde Q intersecta a R.

a)



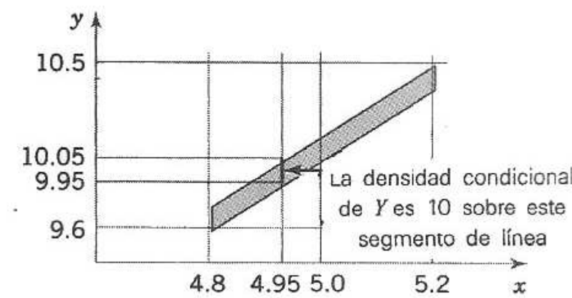
$P(10.0 < Y < 10.1)$ está determinada por la integración de $f_{XY}(x, y) = 25$ sobre la región sombreada.

b)



$P(4.9 < X < 5.1, 10.0 < Y < 10.1)$ está determinada por la integración de $f_{XY}(x, y) = 25$ sobre la región sombreada T, que es la intersección de Q y R.

c)



Dado que $X = 4.975$, la distribución de probabilidad condicional de Y es constante desde $9.95 = 2(4.975)$ hasta $10.05 = 2(4.975) + 0.1$.

d)

Figura 5-11 Figuras para el ejemplo 5-16.

y) es igual a cero, excepto sobre la región R. Por consiguiente, el volumen es la integral de la constante 25 sobre la intersección de Q y R. Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
P(4.9 < X < 5.1) &= \int_{4.9}^{5.1} \int_{2x}^{2x+0.1} f_{XY}(x, y)\, dy\, dx \\
&= \int_{4.9}^{5.1} \left[\int_{2x}^{2x+0.1} 25\, dy \right] dx \\
&= 25 \int_{4.9}^{5.1} 0.1\, dx \\
&= 25\,[0.1 \times 0.2] = 0.5
\end{aligned}
$$

Determínese $P(10.0 < Y < 10.1)$. La probabilidad pedida está representada por el volumen de $f_{XY}(x, y)$ sobre la región sombreada T de la figura 5-11*b*. El volumen puede hallarse al particionar T en dos subregiones, T_1 y T_2, tales que $T = T_1 \cup T_2$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(10.0 < Y < 10.1) &= 25 \text{ por el área de } T_1 + 25 \text{ por el área de } T_2 \\
&= \int_{4.95}^{5.0} \left[\int_{10.0}^{2x+0.1} 25\, dy \right] dx \\
&\quad + \int_{5.0}^{5.05} \left[\int_{2x}^{10.1} 25\, dy \right] dx \\
&= 25 \left[\int_{4.95}^{5.0} (2x + 0.1 - 10.0)\, dx \right] \\
&\quad + 25 \left[\int_{5.0}^{5.05} (10.1 - 2x)\, dx \right] \\
&= 0.0625 + 0.0625 \\
&= 0.125
\end{aligned}
$$

Si las especificaciones para X y Y son (4.9 a 5.1) y (10.0 a 10.1) milímetros, respectivamente, *determínese la probabilidad de que una pieza cumpla con ambas especificaciones*. Esto es, calcule $P(4.9 < X < 5.1 \text{ y } 10.0 < Y < 10.1)$.

Sea Q el conjunto de puntos (x, y) tales que $4.9 < x < 5.1$ y $10.0 < y < 10.1$. De la figura 5-11*c*, se observa que la intersección de Q y R es la misma región T del ejemplo anterior. Por tanto, la probabilidad pedida es precisamente la integral de $f_{XY}(x, y) = 25$ sobre T, la que, como ya se determinó antes, es 0.125.

Determínese la función de densidad de probabilidad condicional de Y dado que $X = x$, y encuéntrese la probabilidad de que la dimensión Y cumpla con las especificaciones dado que $X = 4.975$. Ya se ha determinado que $f_{Y|x}(y) = f_{XY}(x, y)/f_X(x)$. Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{2x}^{2x+0.1} f_{XY}(x, y)\, dy \\
&= 25(0.1) = 2.5
\end{aligned}
$$

para $4.8 < x < 5.2$. Por consiguiente, la función de densidad de probabilidad marginal de X es constante e igual a 2.5 para los valores de x en los que $f_{XY}(x, y)$ es positiva. Así,

$$
f_{Y|x}(y) = 25/2.5 = 10 \quad \text{para } 2x < y < 2x + 0.1
$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad condicional de Y dado que $X = x$ también es una constante, y su valor es 10 sobre la región $2x < y < 2x + 0.1$. Es cero para toda y que no satisface $2x < y < 2x + 0.1$.

La probabilidad de que Y cumpla con las especificaciones dado que $X = 4.975$ es $P(10.0 < Y < 10.1 \mid X = 4.975)$. Ahora bien,

$$f_{Y|4.975}(y) = 10 \text{ para } 2(4.975) < y < 2(4.975) + 0.1$$

esto es, para $9.95 < y < 10.05$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(10.0 < Y < 10.1 \mid X = 4.975) &= \int_{10.0}^{10.1} f_{Y|4.975}(y)\, dy \\ &= \int_{10.0}^{10.05} 10\, dy \\ &\quad + \int_{10.05}^{10.1} 0\, dy \\ &= (0.05)(10) = 0.5 \end{aligned}$$

La última integral es cero porque la $f_{Y|4.975}(y)$ es cero a menos que $9.95 < y < 10.05$. La figura 5-11*d* ilustra este cálculo.

Definición

Sea R_x el conjunto de todos los puntos en el rango de (X, Y) para los que $X = x$. La **media condicional** de Y dado $X = x$, denotada por $E(Y|x)$ o $\mu_{Y|x}$, es

$$E(Y \mid x) = \int_{R_x} y\, f_{Y|x}(y)$$

y la **varianza condicional** de Y dado $X = x$, denotada por $V(Y|x)$ o $\sigma^2_{Y|x}$, es

$$V(Y \mid x) = \int_{R_x} (y - \mu_{Y|x})^2 f_{Y|x}(y) \qquad (5\text{-}17)$$

EJEMPLO 5-17

Para las variables aleatorias del ejemplo 5-16, determínese $E(Y|x = 5.0)$.

Del ejemplo 5-16, $f_{Y|x}(y) = 10$ para $2x < y < 2x + 0.1$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} E(Y \mid x = 5) &= \int_{10}^{10.1} 10y\, dy \\ &= 5y^2 \Big|_{10}^{10.1} = 10.05 \end{aligned}$$

5-3.4 Independencia

La definición de independencia para variables aleatorias continuas es similar a la dada para las variables aleatorias discretas. Si $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ para toda x y y, entonces X y Y son **independientes**.

> Para las variables aleatorias continuas X y Y, si se cumple cualquiera de las siguientes propiedades, entonces también se cumplen las demás, por lo que se dice que X y Y son **independientes**.
>
> **(1)** $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ para toda x y y
>
> **(2)** $f_{Y|x}(y) = f_Y(y)$ para toda x y y con $f_X(x) > 0$
>
> **(3)** $f_{X|y}(x) = f_X(x)$ para toda x y y con $f_Y(y) > 0$
>
> **(4)** $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ para cualesquiera regiones A y B en el rango de X y Y, respectivamente. (5-18)

La independencia implica que $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ para *toda* x y y. Si se encuentra un par (x, y) donde la igualdad no se cumpla, entonces X y Y no son independientes.

EJEMPLO 5-18

En el ejemplo 5-16, la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ de X y Y es 25 sobre la región $4.80 < x < 5.20$ y $2x < y < 2x + 0.1$. También se determinó que la función de densidad de probabilidad condicional de Y dado que $X = 4.975$ es $f_{Y|4.975}(y) = 10$ para $9.95 < y < 10.05$. Al seguir un razonamiento similar, la función de densidad de probabilidad condicional de Y dado que $X = 5.1$ es $f_{Y|5.1}(y) = 10$ para $10.2\ (= 2(5.1)) < y < 10.3\ (= 2(5.1) + 0.1)$. El conocimiento de X cambia el rango donde la función de densidad de probabilidad condicional de Y es positiva. Esto es, $f_{Y|x}(y)$ cambia con x. Por consiguiente, X y Y no son independientes en virtud de la propiedad (2) de la ecuación 5-18.

El hecho de que estas variables no sean independientes puede determinarse con rapidez al notar que el rango de (X, Y), que aparece en la figura 5-10, no es rectangular. En consecuencia, el conocimiento de X cambia el intervalo de valores donde Y recibe una probabilidad positiva.

EJEMPLO 5-19

En el ejemplo 5-14, X denota el tiempo de vida, en horas, de un componente electrónico de una copiadora, mientras que Y denota el tiempo de vida de un segundo componente, también en horas. La función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y es $f_{XY}(x, y) = 2 \times 10^{-6}e^{-0.001x - 0.002y}$ para $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Demuéstrese que X y Y son independientes y determínese $P(X > 1000, Y < 1000)$.

La función de densidad de probabilidad marginal de X es

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} 2 \times 10^{-6} e^{-0.001x-0.002y}\, dy$$

$$= 0.001\, e^{-0.001x} \text{ para } x > 0$$

La función de densidad de probabilidad marginal de Y es

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} 2 \times 10^{-6} e^{-0.001x-0.002y}\, dx$$

$$= 0.002\, e^{-0.002y} \text{ para } y > 0$$

Por consiguiente, $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ para toda x y y, con lo que X y Y son independientes.

En consecuencia, puede aplicarse la propiedad (4) de la ecuación 5-18 con el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} P(X > 1000, Y < 1000) &= P(X > 1000)P(Y < 1000) \\ &= e^{-1}(1 - e^{-2}) \\ &= 0.318 \end{aligned}$$

A menudo, con base en el conocimiento del sistema bajo estudio, se supone que las variables aleatorias son independientes. Entonces, las probabilidades que involucran a ambas variables pueden obtenerse a partir de las distribuciones de probabilidad marginal.

EJEMPLO 5-20

Sean X y Y las variables aleatorias que denotan las longitudes de dos dimensiones de una pieza maquinada, respectivamente. Supóngase que X y Y son independientes y, además, que la distribución de X es normal con media 10.5 milímetros y varianza 0.0025 (milímetro)^2, y la distribución de Y también es normal con media 3.2 milímetros y varianza 0.0036 (milímetro)^2. Determínese la probabilidad de que $10.4 < X < 10.6$ y $3.15 < Y < 3.25$.

Dado que X y Y son independientes,

$$P(10.4 < X < 10.6, 3.15 < Y < 3.25) = P(10.4 < X < 10.6)P(3.15 < Y < 3.25)$$

$$= P\left(\frac{10.4 - 10.5}{0.05} < Z < \frac{10.6 - 10.5}{0.05}\right) P\left(\frac{3.15 - 3.2}{0.06} < Z < \frac{3.25 - 3.2}{0.06}\right)$$

$$= P(-2 < Z < 2)P(-0.833 < Z < 0.833)$$

$$= 0.566$$

donde Z denota una variable aleatoria normal estándar.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5-3

5-34. Determine el valor de c tal que la función $f(x, y) = cxy$, para $0 < x < 3$ y $0 < y < 3$, cumpla con las propiedades de una función de densidad de probabilidad conjunta.

5-35. **Continuación del ejercicio 5-34.** Determine lo siguiente.

- **a.** $P(X < 2.5, Y < 3)$
- **b.** $P(X < 2.5)$
- **c.** $P(1 < Y < 2.5)$
- **d.** $P(X > 1.8, 1 < Y < 2.5)$
- **e.** $E(X)$
- **f.** $E(Y)$

5-36. **Continuación del ejercicio 5-34.**

- **a.** Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X.
- **b.** Determine la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1.5$.
- **c.** Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 2$.

5-37. Determine el valor de c que hace que la función $f(x, y) = c(x + y)$ sea una función de densidad de probabilidad conjunta sobre el rango $0 < x < 3$ y $x < y < x + 2$.

5-38. **Continuación del ejercicio 5-37.** Obtenga lo siguiente:

- **a.** $P(X < 1, Y < 2)$
- **b.** $P(1 < X < 2)$
- **c.** $P(Y > 2)$
- **d.** $P(X < 2, Y < 2)$
- **e.** $E(X)$

5-39. **Continuación del ejercicio 5-37.**

- **a.** Determine la distribución de probabilidad marginal de X.
- **b.** Determine la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1$.
- **c.** Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 2$.

5-40. El tiempo entre la presentación de problemas con el terminado de la superficie en un proceso de galvanización, está distribuido de manera exponencial con una media de 40 horas. Una planta opera tres líneas de galvanización que se supone trabajan de manera independiente.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las líneas experimente un problema con el acabado de las superficies en un lapso de 40 horas de operación?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que las tres líneas experimenten problemas con el acabado de la superficie en un lapso entre 20 y 40 horas de operación?

5-41. Se utilizan dos métodos para medir la rugosidad superficial con la finalidad de evaluar un producto de papel. Las mediciones se registran como una desviación a partir del valor nominal de la rugosidad de la superficie. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones puede describirse mediante una distribución uniforme sobre el interior de la región $0 < x < 4$, $0 < y$, y $x - 1 < y < x + 1$. Esto es, $f(x, y) = c$ para (x, y) tal que $0 < x < 4$, $0 < y$, y $x - 1 < y < x + 1$.

a. Determine el valor de c para el que $f(x, y)$ es una función de densidad de probabilidad conjunta.

b. Determine $P(X < 0.5, Y < 0.5)$.

c. Obtenga $P(X < 0.5)$.

d. Calcule $E(X)$ y $E(Y)$.

e. Obtenga la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 1$.

5-42. La función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y es

$$\frac{1}{1.2\pi} e^{\frac{-1}{0.72}[(x-1)^2 - 1.6(x-1)(y-2) + (y-2)^2]} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \text{ y } -\infty < y < \infty.$$

a. Determine la distribución de probabilidad marginal de X. [*Sugerencia:* Complete el cuadrado en el exponente de la integral sobre y, y utilice el hecho de que la integral de una función de densidad de probabilidad normal es uno.]

b. Obtenga $E(X)$.

5-43. **Continuación del ejercicio 5-42.** Determine la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1$. ¿Cuál es el nombre de esta distribución de probabilidad?

5-4 MÚLTIPLES VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Tal como sucede con las variables aleatorias discretas, en algunos casos, se definen más de dos variables aleatorias continuas en un experimento aleatorio.

EJEMPLO 5-21

Durante un proceso de producción, por rutina se miden muchas dimensiones de una pieza maquinada. Sean las variables aleatorias X_1, X_2, X_3 y X_4 las longitudes de cuatro dimensiones de una pieza. Entonces, en este estudio, existen al menos cuatro variables aleatorias de interés.

La distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$ puede especificarse al proporcionar un método para calcular la probabilidad de que $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$ tomen un valor en una región R del espacio de dimensión p. Una **función de densidad de probabilidad conjunta** $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ se emplea para determinar la probabilidad de que $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p)$ tome un valor en una región R mediante la integral múltiple de $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sobre la región R.

Definición

Una **función de densidad de probabilidad conjunta** de las variables aleatorias continuas $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$, denotada por $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, satisface las siguientes propiedades:

(1) $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \geq 0$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p = 1$

(3) para cualquier región B del espacio de dimensión p,

$$P[(X_1, X_2, \ldots, X_p) \in B] = \int\int_B\cdots\int f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p \quad (5\text{-}19)$$

Comúnmente se define $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sobre todo el espacio de dimensión p suponiendo que $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$ en todos los puntos donde $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ no está especificada.

EJEMPLO 5-22

En un ensamble electrónico, las variables aleatorias X_1, X_2, X_3, X_4 denotan el tiempo de duración, en horas, de cuatro componentes. Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta de estas variables es

$$f_{X_1X_2X_3X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9 \times 10^{-2}\, e^{-0.001x_1 - 0.002x_2 - 0.0015x_3 - 0.003x_4}$$
$$\text{para } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo funcione durante más de 1000 horas sin ninguna falla?

La probabilidad pedida es $P(X_1 > 1000, X_2 > 1000, X_3 > 1000, X_4 > 1000)$, la cual es igual a la integral múltiple de $f_{X_1X_2X_3X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sobre la región $x_1 > 1000$, $x_2 > 1000$, $x_3 > 1000$, $x_4 > 1000$. La función de densidad de probabilidad conjunta puede escribirse como un producto de funciones exponenciales, y cada integral es la integral simple de una función exponencial. En consecuencia,

$$\begin{aligned} P(X_1 > 1000, X_2 > 1000, X_3 > 1000, X_4 > 1000) &= e^{-1-2-1.5-3} \\ &= 0.00055 \end{aligned}$$

Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta de algunas variables aleatorias es una constante, por ejemplo c. En este caso especial,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$
$$= c \times (\text{volumen de la región } R \text{ que recibe una probabilidad positiva}) = 1$$

por la propiedad (2) de la ecuación 5-19. Por otra parte, por la propiedad (3) de la ecuación 5-19

$$P[X_1, X_2, \ldots, X_p) \in B]$$
$$= \int\int_B\cdots\int f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p = c \times \text{ volumen } (B \cap R)$$
$$= \frac{\text{volumen } (B \cap R)}{\text{volumen de la región } R \text{ que recibe una probabilidad positiva}}$$

Cuando la función de densidad de probabilidad conjunta es constante, la probabilidad de que las variables aleatorias tomen un valor en la región B es precisamente el cociente del volumen de la región $B \cap R$ con respecto al volumen total para el que la probabilidad es positiva.

EJEMPLO 5-23

Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas X y Y es constante sobre la región $x^2 + y^2 \leq 4$. Determínese la probabilidad de que $X^2 + Y^2 \leq 1$.

La región que recibe la probabilidad positiva es un círculo de radio 2. Por tanto, el área de esta región es 4π. El área de la región $x^2 + y^2 \leq 1$ es π. En consecuencia, la probabilidad pedida es $\pi/(4\pi) = 1/4$.

Definición

Si la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas $X_1, X_2, \ldots, X_p$ es $f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, entonces la **función de densidad de probabilidad marginal** de X_i es

$$f_{X_i}(x_i) = \int\int_{R_{x_i}}\cdots\int f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_p$$

donde

R_{x_i} denota el conjunto de todos los puntos en el rango de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ para los que $X_i = x_i$ (5-20)

Al igual que en el caso de dos variables aleatorias, una probabilidad donde sólo aparece una variable aleatoria, por ejemplo, $P(a < X_i < b)$, puede obtenerse a partir de la distribución de probabilidad marginal de X_i, o de la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Esto es,

$$P(a < X_i < b) = P(-\infty < X_1 < \infty, \ldots, -\infty < X_{i-1} < \infty, a < X_i < b \\ -\infty < X_{i+1} < \infty, \ldots, -\infty < X_p < \infty)$$

Por otra parte, $E(X_i)$ y $V(X_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, pueden obtenerse a partir de la distribución de probabilidad marginal de X_i, o de la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_p$, de la siguiente manera:

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$

y

$$V(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{X_i})^2 f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots x_p)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p \tag{5-21}$$

La distribución de probabilidad de un subconjunto de variables tales como $X_1, X_2, \ldots, X_k$, $k < p$, puede obtenerse a partir de la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_p$, como sigue.

Definición

Si la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas $X_1, X_2, \ldots, X_p$ es $f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, entonces la **función de densidad de probabilidad** de $X_1, X_2, \ldots, X_k$, $k < p$, es

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int\int_{R_{x_1 x_2 \ldots x_k}} \cdots \int f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_{k+1} dx_{k+2} \ldots dx_p$$

donde $R_{x_1 x_2 \ldots x_k}$ denota el conjunto de todos los puntos en el rango de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ para los que $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k$ (5-22)

Asimismo, las distribuciones de probabilidad condicional para múltiples variables aleatorias continuas pueden desarrollarse mediante una extensión de las ideas utilizadas en el caso de dos variables aleatorias continuas. Por ejemplo, la función de densidad de probabilidad condicional conjunta de X_1, X_2, X_3 dadas X_4, X_5 es

$$f_{X_1 X_2 X_3 \mid x_4 x_5}(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1 X_2 X_3 X_4 X_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \,/\, f_{X_4 X_5}(x_4, x_5)$$

para $f_{X_4 X_5}(x_4, x_5) > 0$. Por otra parte, la distribución de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 condicionada a X_4 y X_5 es

$$f_{X_1 X_2 \mid x_4 x_5}(x_1 x_2) = f_{X_1 X_2 X_4 X_5}(x_1, x_2, x_4, x_5) / f_{X_4 X_5}(x_4, x_5)$$

para $f_{X_4 X_5}(x_4, x_5) > 0$.

El concepto de independencia puede extenderse al caso de múltiples variables aleatorias continuas.

Definición

Las variables aleatorias continuas $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son **independientes** si y sólo si

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_p}(x_p) \quad \text{para toda } x_1, x_2, \ldots, x_p \tag{5-23}$$

De manera similar al resultado que se tiene para el caso de dos variables aleatorias, la independencia implica que $f_{X_1 X_2 \ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_p}(x_p)$ para *toda* $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Si se encuentra un punto para el que la igualdad no se cumple, entonces $X_1, X_2, \ldots, X_p$ no son independientes. Se deja como ejercicio demostrar que si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son independientes, entonces $P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_p \in A_p) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2) \ldots P(X_p \in A_p)$ para cualesquiera regiones $A_1, A_2, \ldots, A_p$ en el rango de $X_1, X_2, \ldots, X_p$, respectivamente.

EJEMPLO 5-24

En el capítulo 3 se demostró que una variable aleatoria binomial negativa con parámetros p y r puede representarse como una suma de r variables aleatorias geométricas $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Cada una de éstas representa los ensayos adicionales necesarios para obtener el siguiente éxito. Dado que los ensayos de un experimento binomial son independientes, entonces $X_1, X_2, \ldots, X_r$ son variables aleatorias independientes.

EJEMPLO 5-25

Supóngase que X_1, X_2 y X_3 representan el espesor, en micrometros, de un sustrato, de una capa activa y de una capa de recubrimiento de un producto químico, respectivamente. Supóngase además que X_1, X_2 y X_3 son independientes y que tienen una distribución normal con $\mu_1 = 10000$, $\mu_2 = 1000$, $\mu_3 = 80$, $\sigma_1 = 250$, $\sigma_2 = 20$ y $\sigma_3 = 4$. Las especificaciones para el espesor del sustrato, para la capa activa y para la capa de recubrimiento son $9200 < x_1 < 10800$, $950 < x_2 < 1050$, y $75 < x_3 < 85$, respectivamente. ¿Qué proporción de productos químicos satisface todas las especificaciones de espesor? ¿Cuál de los tres espesores tiene la menor probabilidad de cumplir con las especificaciones?

La probabilidad pedida es $P(9200 < X_1 < 10800, 950 < X_2 < 1050, 75 < X_3 < 85)$. Dado que las variables aleatorias son independientes,

$$\begin{aligned} &P(9200 < X_1 < 10800, 950 < X_2 < 1050, 75 < X_3 < 85) \\ &= P(9200 < X_1 < 10800)P(950 < X_2 < 1050)P(75 < X_3 < 85) \end{aligned}$$

Después de estandarizar, la expresión anterior se convierte en

$$P(-3.2 < Z < 3.2)P(-2.5 < Z < 2.5)P(-1.25 < Z < 1.25)$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar. De la tabla correspondiente a la distribución normal estándar, lo anterior es igual a

$$(0.99862)(0.98758)(0.78870) = 0.7778$$

El espesor de la capa de recubrimiento es el que tiene la menor probabilidad de satisfacer las especificaciones. En consecuencia, la prioridad debe ser reducir la variabilidad en esta parte del proceso.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5-4

5-44. Suponga que las variables aleatorias X, Y y Z tienen la función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y, z) = 8xyz$ para $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ y $0 < z < 1$. Calcule lo siguiente:

- **a.** $P(X < 0.5)$
- **b.** $P(X < 0.5, Y < 0.5)$
- **c.** $P(z < 1.5)$
- **d.** $P(X < 0.5 \text{ o } Z < 2)$
- **e.** $E(X)$

5-45. **Continuación del ejercicio 5-44.** Obtenga lo siguiente:

- **a.** $P(X < 0.5 \mid Y = 0.5)$
- **b.** $P(X < 0.5, Y < 0.5 \mid Z = 0.8)$

5-46. **Continuación del ejercicio 5-44.**

- **a.** Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 0.5$ y $Z = 0.8$.
- **b.** Obtenga $P(X < 0.5 \mid Y = 0.5, Z = 0.8)$.

5-47. Suponga que las variables aleatorias X, Y y Z tienen la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XYZ}(x, y, z) = c$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 < 4$ y $0 < z < 4$. Calcule lo siguiente:

- **a.** la constante c de modo que $f_{XYZ}(x, y, z)$ sea una función de densidad de probabilidad.
- **b.** $P(X^2 + Y^2 < 2)$

c. $P(Z < 2)$

d. $E(X)$

5-48. **Continuación del ejercicio 5-47.** Calcule lo siguiente:

a. $P(X < 1 \mid Y = 1)$

b. $P(X^2 + Y^2 < 1 \mid Z = 1)$

5-49 **Continuación del ejercicio 5-47.** Determine la distribución de probabilidad condicional de Z dado que $X = 1$ y $Y = 1$.

5-50 El rendimiento en libras en un determinado día de producción tiene una distribución normal con media de 1500 libras y varianza de 10 000 libras cuadradas. Suponga que los rendimientos de días diferentes son variables aleatorias independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el rendimiento de la producción sea mayor que 1400 libras en cinco días de la semana entrante?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el rendimiento de la producción sea mayor que 1400 libras al menos en cuatro de los cinco días de la semana entrante?

5-51 Los pesos de los tabiques de adobe utilizados para construcción tienen una distribución normal con una media de tres libras y desviación estándar de 0.25 libras. Suponga que los pesos de los tabiques son independientes y que se toma al azar una muestra de 20.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los tabiques de la muestra tengan un peso mayor que 2.75 libras?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tabique más pesado de la muestra tenga un peso mayor que 3.75 libras?

5-5 COVARIANZA, CORRELACIÓN Y LA DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIADA

5-5.1 Covarianza y correlación

Cuando se definen dos o más variables aleatorias en un espacio de probabilidad, es útil describir la forma en que varían juntas; esto es, resulta útil tener una medida de la relación que existe entre las variables. Una medida común de la relación que existe entre dos variables aleatorias es la **covarianza**. Para definir la covarianza es necesario describir el valor esperado del producto de dos variables aleatorias. Supóngase que X y Y son dos variables aleatorias discretas. El valor esperado o media de $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ se define de la siguiente manera.

Definición

Si X y Y son dos variables aleatorias discretas con función de probabilidad $f_{XY}(x, y)$, entonces

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_R (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{XY}(x, y) \tag{5-24}$$

donde R es el conjunto de todos los puntos del rango de (X, Y). Si las variables aleatorias son continuas, entonces es necesario remplazar la sumatoria anterior con una integral.

Esto es, $E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ es precisamente el promedio ponderado del producto de $x - \mu_X$ y $y - \mu_Y$ para cada punto en el rango de (X, Y). El valor de $E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ representa el valor promedio del producto de $X - \mu_X$ y $Y - \mu_Y$ que se espera en una secuencia larga de ensayos repetidos del experimento aleatorio.

EJEMPLO 5-26

Para la distribución de probabilidad conjunta del par de variables aleatorias de la figura 5-12, calcúlese $E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$.

El resultado se obtiene multiplicando $x - \mu_X$, $y - \mu_Y$ y $f_{XY}(x, y)$ para cada punto en el rango de (X, Y). Para ello, primero se obtienen μ_X y μ_Y,

$$\mu_X = 1 \times 0.3 + 3 \times 0.7 = 2.4$$

y

$$\mu_Y = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 = 2.0$$

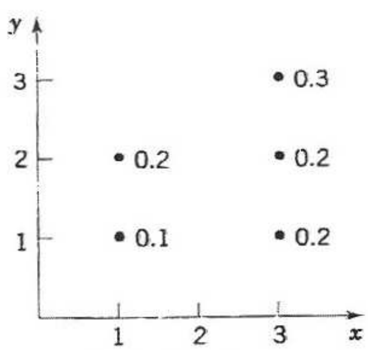


Figura 5-12 Distribución conjunta de X y Y para el ejemplo 5-26.

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = {} & (1 - 2.4)(1 - 2.0) \times 0.1 \\
& + (1 - 2.4)(2 - 2.0) \times 0.2 + (3 - 2.4)(1 - 2.0) \times 0.2 \\
& + (3 - 2.4)(2 - 2.0) \times 0.2 \\
& + (3 - 2.4)(3 - 2.0) \times 0.3 = 0.2
\end{aligned}
$$

Definición

La **covarianza** entre las variables aleatorias X y Y, denotada por cov(X, Y) o σ_{XY}, es

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X\mu_Y \qquad (5\text{-}25)$$

La covarianza está definida por la misma expresión, para variables aleatorias tanto discretas como continuas.

Si los puntos en la distribución de probabilidad conjunta de X y Y que reciben una probabilidad positiva tienden a caer sobre una línea de pendiente positiva (o negativa), entonces σ_{XY} es positiva (o negativa). Si los puntos tienden a caer en una línea de pendiente positiva, entonces X tiende a ser mayor que μ_X cuando Y es mayor que μ_Y. Por consiguiente, el producto de los términos $x - \mu_X$ y $y - \mu_Y$ tiende a ser positivo. Sin embargo, si los puntos tienden a caer a lo largo una línea de pendiente negativa, entonces $x - \mu_X$ tiende a ser positivo cuando $y - \mu_Y$ es negativo, y viceversa. En consecuencia, el producto de $x - \mu_X$ y $y - \mu_Y$ tiende a ser negativo. En este sentido, la covarianza entre X y Y describe la variación entre dos variables aleatorias. La figura 5-13 presenta ejemplos de pares de variables aleatorias con covarianzas positiva, negativa y cero.

La covarianza es una medida de **asociación lineal** entre las variables aleatorias. Si la relación entre las variables aleatorias es no lineal, entonces es posible que la covarianza no sea tan sensible a dicha relación. Esto se ilustra en la figura 5-13(d). Los únicos puntos que no tienen probabilidad cero son los que están sobre el círculo. Aunque existe una relación identificable entre las variables, la covarianza es cero.

A continuación se demuestra, para el caso de variables aleatorias continuas, la igualdad de las dos expresiones para la covarianza en la ecuación 5-25. Al escribir las esperanzas como integrales

$$
\begin{aligned}
E[(Y - \mu_Y)(X - \mu_X)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{XY}(x, y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [xy - \mu_X y - x\mu_Y + \mu_X\mu_Y] f_{XY}(x, y)\, dx\, dy
\end{aligned}
$$

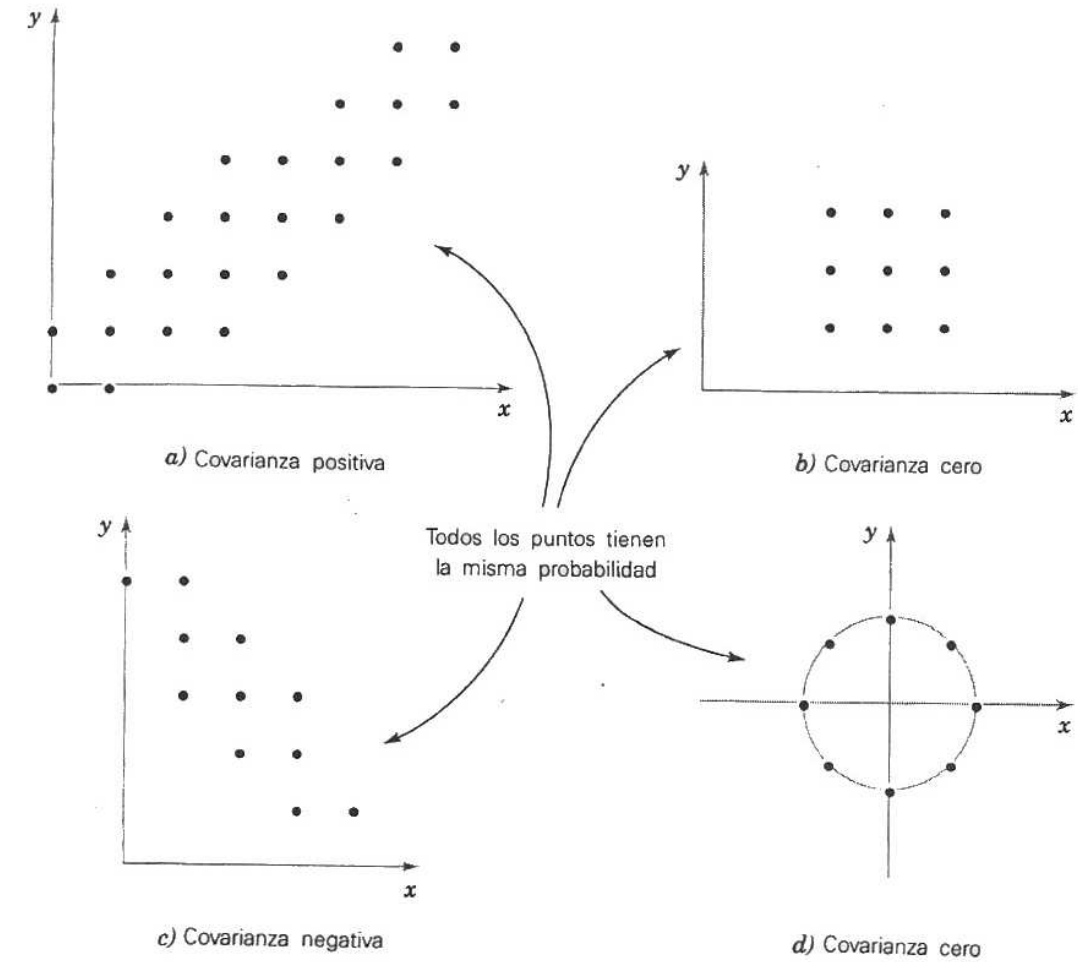


Figura 5-13 Distribuciones de probabilidad conjunta y el signo de la covarianza entre X y Y.

Ahora bien,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mu_X y f_{XY}(x, y)\, dx\, dy = \mu_X \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y)\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy}\right]$$

$$= \mu_X \mu_Y$$

Por tanto,

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu X)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, dx\, dy - \mu_X\mu_Y - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, dx\, dy - \mu_X\mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

EJEMPLO 5-27

En el ejemplo 5-1, las variables aleatorias X y Y representan el número de bits aceptables y dudosos, respectivamente, de los cuatro recibidos durante una comunicación digital. ¿Es positiva o negativa la covarianza de X y Y?

Dado que X y Y son el número de bits aceptables y dudosos de entre los cuatro recibidos, $X + Y \leq 4$. Si X está cerca de 4, entonces Y debe estar cerca de cero. Por tanto, X y Y tienen una covarianza negativa. Esto puede verificarse a partir de la distribución de probabilidad conjunta de la figura 5-1.

Existe otra medida de relación entre dos variables aleatorias que a menudo es más fácil de interpretar que la covarianza.

Definición

La **correlación** entre las variables aleatorias X y Y, denotada como ρ_{XY}, es

$$\rho_{XY} = \text{cov}(X, Y)/[(V(X)V(Y)]^{1/2} = \sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y) \qquad (5\text{-}26)$$

Dado que $\sigma_X > 0$ y $\sigma_Y > 0$, si la covarianza entre X y Y es positiva, negativa o cero, la correlación entre X y Y es positiva, negativa o cero, respectivamente. Puede demostrarse el siguiente resultado.

Para dos variables aleatorias X y Y cualesquiera

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq +1 \qquad (5\text{-}27)$$

La correlación precisamente escala la covarianza por la desviación estándar de cada variable. En consecuencia, la correlación es una cantidad sin dimensiones que puede emplearse para comparar las relaciones lineales entre pares de variables que tienen unidades distintas.

Si los puntos en la distribución de probabilidad conjunta de X y Y que reciben una probabilidad positiva tienden a caer a lo largo de una línea con pendiente positiva (o negativa), entonces ρ_{XY} es próximo a +1 (o −1). Si ρ_{XY} es igual a +1 o −1, entonces puede demostrarse que los puntos en la distribución de probabilidad conjunta que reciben una probabilidad positiva caen exactamente a lo largo de una línea recta. Dos variables aleatorias están

correlacionadas si tienen una correlación distinta de cero. De manera similar a la covarianza, la correlación es una medida de la **relación lineal** entre variables aleatorias.

EJEMPLO 5-28

Para las variables aleatorias discretas X y Y con la distribución conjunta de la figura 5-14, determínese σ_{XY} y ρ_{XY}.

La figura 5-14 contiene los cálculos para $E(XY)$, $E(X)$ y $V(X)$. Dado que la distribución de probabilidad marginal de Y es la misma que la de X, $E(Y) = 1.8$ y $V(Y) = 1.36$. En consecuencia,

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 4.5 - (1.8)(1.8) = 1.26$$

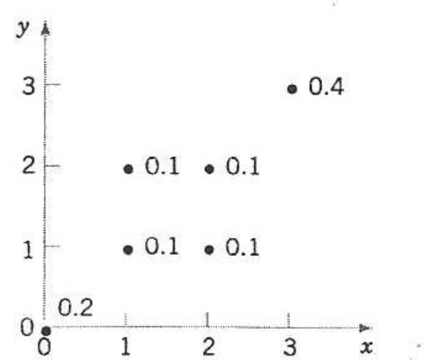
Por otra parte,

$$\rho_{XY} = \sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y) = 1.26/[(1.36^{1/2})(1.36^{1/2})] = 0.926$$

EJEMPLO 5-29

Supóngase que la variable aleatoria X tiene la siguiente distribución: $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.6$, $P(X = 3) = 0.2$. Sea $Y = 2X + 5$. Esto es, $P(Y = 7) = 0.2$, $P(Y = 9) = 0.6$, $P(Y = 11) = 0.2$. Determínese la correlación entre X y Y. Consulte la figura 5-15.

Dado que X y Y están relacionadas de manera lineal, $\rho = 1$. Este resultado puede verificarse mediante cálculo directo; ¡inténtelo!



$E(XY) = 0 \times 0 \times 0.2 + 1 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 2 \times 0.1 + 2 \times 1 \times 0.1$
$+ 2 \times 2 \times 0.1 + 3 \times 3 \times 0.4 = 4.5$

$E(X) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.4 = 1.8$

$V(X) = (0 - 1.8)^2 \times 0.2 + (1 - 1.8)^2 \times 0.2 + (2 - 1.8)^2 \times 0.2$
$+ (3 - 1.8)^2 \times 0.4 = 1.36$

Figura 5-14 Cálculos para determinar la covarianza del ejemplo 5-28.

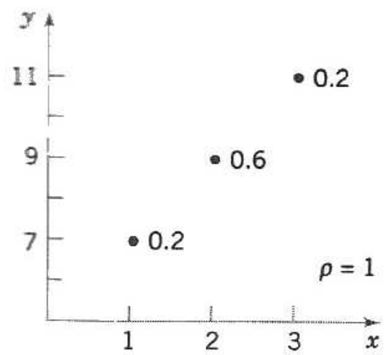


Figura 5-15 Función de densidad de probabilidad conjunta del ejemplo 5-29.

Para variables aleatorias independientes, no se espera ninguna relación en su distribución de probabilidad conjunta. El siguiente resultado se deja como ejercicio para el lector.

> Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces
>
> $$\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0 \tag{5-28}$$

EJEMPLO 5-30

Para las dos variables aleatorias de la figura 5-16, demuéstrese que $\sigma_{XY} = 0$.

Las dos variables aleatorias de este ejemplo son variables aleatorias continuas. En este caso, $E(XY)$ está definida como la doble integral sobre el rango de (X, Y). Esto es,

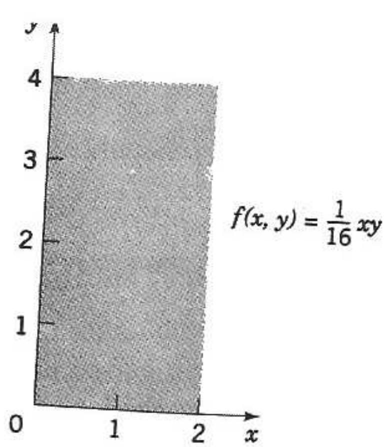


Figura 5-16 Variables aleatorias con covarianza cero del ejemplo 5-30.

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^4 \int_0^2 xy f_{XY}(x, y)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{16} \int_0^4 \left[\int_0^2 x^2 y^2\, dx \right] dy \\
&= \frac{1}{16} \int_0^4 y^2 \left[x^3/3 \Big|_0^2 \right] \\
&= \frac{1}{16} \int_0^4 y^2\, [8/3]\, dy \\
&= \frac{1}{6} \left[y^3/3 \Big|_0^4 \right] \\
&= \frac{1}{6}\, [64/3] \\
&= 32/9
\end{aligned}
$$

Asimismo,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^4 \int_0^2 x f_{XY}(x, y)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{16} \int_0^4 \left[\int_0^2 x^2\, dx \right] dy \\
&= \frac{1}{16} \int_0^4 \left[x^3/3 \Big|_0^2 \right] dy \\
&= \frac{1}{16} \left[y^2/2 \Big|_0^4 \right] [8/3] \\
&= \frac{1}{6}\, [16/2] \\
&= 4/3
\end{aligned}
$$

y

$$E(Y) = \int_0^4 \int_0^2 y f_{XY}(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^4 y^2 \left[\int_0^2 x\, dx \right] dy$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^4 y^2 \left[x^2/2 \Big|_0^2 \right] dy$$

$$= \frac{2}{16} \left[y^3/3 \Big|_0^4 \right]$$

$$= \frac{1}{8} [64/3]$$

$$= 8/3$$

Por tanto,

$$E(XY) - E(X)E(Y) = 32/9 - (4/3)(8/3) = 0$$

También puede demostrarse que estas dos variables aleatorias son independientes.

Sin embargo, si la correlación entre dos variables aleatorias es cero, *no es posible* concluir de inmediato que las variables son independientes. Un ejercicio al final del capítulo proporciona un ejemplo de esto.

5-5.2 Distribución normal bivariada

La extensión de una distribución normal a dos variables aleatorias da origen a una distribución de probabilidad bivariada importante.

EJEMPLO 5-31

Al inicio de este capítulo se presentó como ejemplo de dos variables aleatorias la longitud de varias dimensiones de una pieza moldeada por inyección. Cada longitud bien puede modelarse mediante una distribución normal. Sin embargo, dado que todas las mediciones provienen de la misma pieza, es común que las variables aleatorias no sean independientes. En muchas aplicaciones es importante contar con una distribución de probabilidad para dos variables aleatorias normales que no son independientes. Tal como se planteó al inicio del

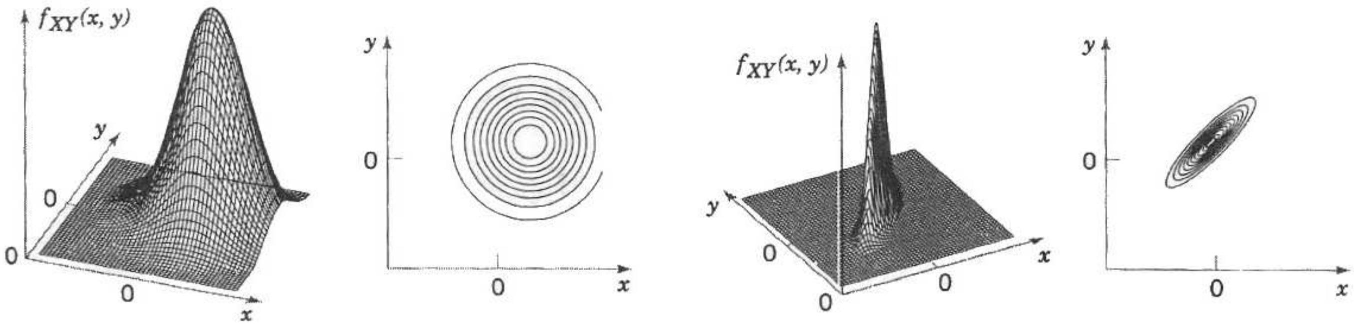


Figura 5-17 Ejemplos de distribuciones normales bivariadas.

capítulo, si las especificaciones para X y Y son (2.95 a 3.05) y (7.60 a 7.80) milímetros, respectivamente, entonces el interés puede recaer en calcular la probabilidad de que una pieza cumpla con ambas especificaciones; esto es, $P(2.95 < X < 3.05, 7.60 < Y < 7.80)$.

Definición

La función de densidad de probabilidad de una distribución normal bivariada es

$$f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-0.5}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)}$$

para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$, con parámetros $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y > 0$, $-\infty < \mu_X < \infty$, $-\infty < \mu_Y < \infty$ y $-1 < \rho < 1$. (5-29)

Se deja como ejercicio demostrar que la integral de $f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho)$ es uno. Asimismo, la función de densidad de probabilidad normal bivariada es positiva sobre todo el plano de los números reales.

La figura 5-17 ilustra varios ejemplos de distribuciones normales bivariadas, junto con la gráfica de contorno correspondiente. Cada curva sobre la gráfica de contorno es un conjunto de puntos para los que la función de densidad de probabilidad es constante. Como puede observarse, la función de densidad de probabilidad normal bivariada es constante sobre elipses en el plano (x, y). (Puede considerarse al círculo como un caso especial de la elipse.) El centro de cada elipse está en el punto (μ_X, μ_Y). Si $\rho > 0$ ($\rho < 0$), el eje mayor de cada elipse tiene una pendiente positiva (negativa), respectivamente. Si $\rho = 0$, el eje mayor de la elipse está alineado con cualquiera de los ejes coordenados, x o y.

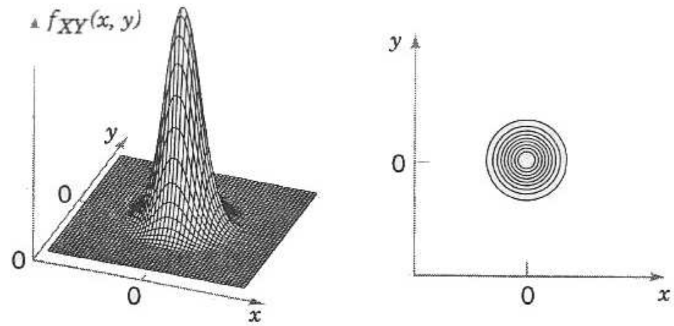


Figura 5-18 Función de densidad de probabilidad normal bivariada del ejemplo 5-32.

EJEMPLO 5-32

Se reconoce que la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5(x^2+y^2)}$ es un caso especial de una distribución normal bivariada con $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 1$, $\mu_X = 0$, $\mu_Y = 0$ y $\rho = 0$. La gráfica de esta función de densidad de probabilidad aparece en la figura 5-18. Nótese que la gráfica de contorno consiste de círculos concéntricos alrededor del origen.

Puede demostrarse el siguiente resultado si se completa el cuadrado en el exponente de la expresión anterior. Los detalles se dejan como ejercicio para el lector.

> Si X y Y tienen una distribución normal bivariada con una densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho)$, entonces las *distribuciones de probabilidad marginal* de X y Y son normales con medias μ_X y μ_Y, y desviaciones estándar σ_X y σ_Y, respectivamente. (5-30)

La figura 5-19 ilustra el hecho de que las distribuciones de probabilidad marginal de X y Y son normales. Por otra parte, tal como la notación lo sugiere, ρ representa la correlación entre X y Y. El siguiente resultado se deja como ejercicio para el lector.

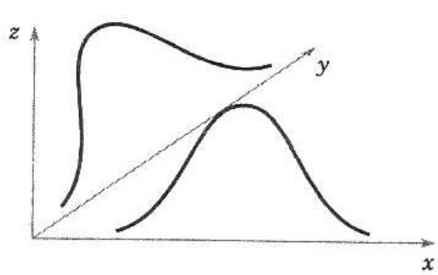


Figura 5-19 Funciones de densidad de probabilidad marginal de una distribución normal bivariada.

Si X y Y tienen una distribución normal bivariada con densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho)$, entonces la correlación entre X y Y es ρ. (5-31)

De las gráficas de contorno de la figura 5-17, se observa que a medida que ρ varía desde cero hasta +1 o −1, las elipses se vuelven más estrechas alrededor del eje mayor. Esto ilustra el hecho de que la probabilidad está más concentrada alrededor de una línea en el plano (x, y) y muestra de manera gráfica una correlación mayor entre las variables. Si $\rho = -1$ o $+1$, entonces toda la probabilidad está concentrada sobre una línea en el plano (x, y). Esto es, la probabilidad de que X y Y tomen un valor que no esté sobre la línea es cero. En este caso, la densidad de probabilidad normal bivariada no está definida.

En el caso especial en que X y Y tienen una distribución normal bivariada, si $\rho = 0$, entonces X y Y son independientes. Los detalles se dejan como ejercicio para el lector.

Si X y Y tienen una distribución normal bivariada con $\rho = 0$, entonces X y Y son independientes. (5-32)

Un uso importante de la distribución normal bivariada es calcular probabilidades que involucran a dos variables aleatorias normales que están correlacionadas.

EJEMPLO 5-33

Supóngase que, en el ejemplo 5-31, las dimensiones X y Y de una pieza moldeada por inyección tienen una distribución normal bivariada con $\sigma_X = 0.04$, $\sigma_Y = 0.08$, $\mu_X = 3.00$, $\mu_Y = 7.70$ y $\rho = 0.8$. Entonces, la probabilidad de que una pieza cumpla con ambas especificaciones es

$$P(2.95 < X < 3.05,\ 7.60 < Y < 7.80)$$

Esta probabilidad puede obtenerse al integrar $f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho)$ sobre la región $2.95 < x < 3.05$ y $7.60 < y < 7.80$, tal como se muestra en la figura 5-20. Desafortunadamente, a menudo no existe solución en forma cerrada para probabilidades relacionadas con distribuciones normales bivariadas. En este caso, la integración debe hacerse numéricamente.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5-5

5-52. Determine la covarianza y la correlación de la siguiente distribución de probabilidad conjunta.

x	y	$f(x, y)$
1	3	1/8
1	4	1/4
2	5	1/2
3	6	1/8

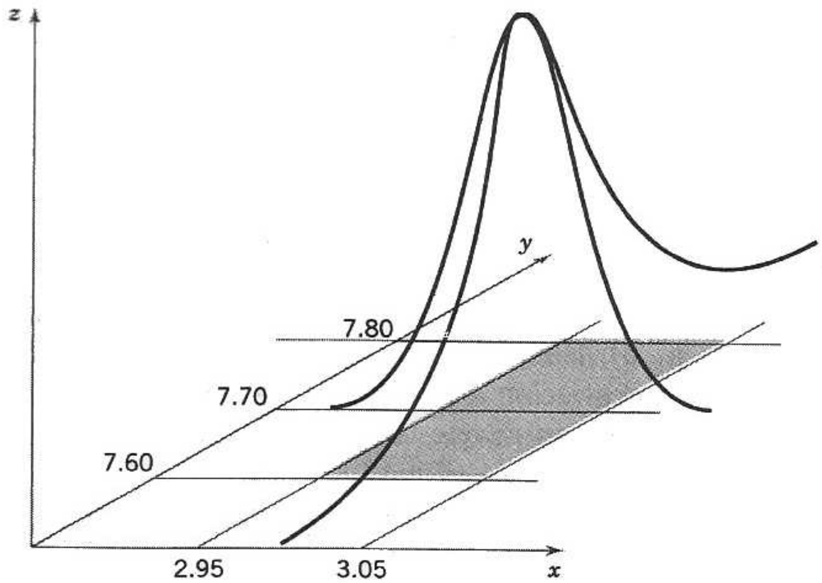


Figura 5-20 Probabilidad de que una pieza moldeada por inyección cumpla con las especificaciones, vista como una probabilidad normal bivariada.

5-53. Determine la covarianza y la correlación de la siguiente distribución de probabilidad conjunta, $f(x, y) = e^{-x-y}$ para $x > 0$ y $y > 0$.

5-54. Determine la covarianza y la correlación de la distribución de probabilidad conjunta de la figura 5-4.

5-55. Determine la covarianza y la correlación de la distribución de probabilidad conjunta de la figura 5-10.

5-56. Determine la covarianza y la correlación de la distribución de probabilidad conjunta de la figura 5-12.

5-57. Suponga que X y Y son variables aleatorias continuas independientes. Demuestre que $\sigma_{XY} = 0$.

5-58. La distribución de probabilidad conjunta de X y Y es

x	y	$f_{XY}(x, y)$
−1	0	1/4
0	−1	1/4
0	1	1/4
1	0	1/4

Demuestre que la correlación entre X y Y es cero, pero que X y Y no son independientes.

5-59. Suponga que la correlación entre X y Y es ρ. Para las constantes a, b, c y d, ¿cuál es la correlación entre las variables aleatorias $U = aX + b$ y $V = cY + d$?

5-60. Sean X y Y la concentración y la viscosidad de un producto químico. Suponga que X y Y tienen una distribución normal bivariada con $\sigma_X = 4$, $\sigma_Y = 1$, $\mu_X = 2$, $\mu_Y = 1$ y $\rho = 0.8$. Dibuje una gráfica de contornos de la función de densidad de probabilidad conjunta.

5-61. Sean X y Y dos dimensiones de una pieza moldeada por inyección. Suponga que X y Y tienen una distribución normal bivariada con $\sigma_X = 0.04$, $\sigma_Y = 0.08$, $\mu_X = 3.00$, $\mu_Y = 7.70$ y $\rho = 0$. Determine $P(2.95 < X < 3.05, 7.60 < Y < 7.80)$.

5-62. Demuestre que la integral de la función de densidad de probabilidad $f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho)$ de una distribución normal bivariada es uno. [*Sugerencia*: Complete el cuadrado en el exponente y utilice el hecho de que la integral de una función de densidad de probabilidad normal para una sola variable es uno.]

5-63. Si X y Y tienen una distribución normal bivariada con función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho)$, demuestre que la *distribución de probabilidad marginal* de X es normal con media μ_X y desviación estándar σ_X. [*Sugerencia*: Complete el cuadrado en el exponente y haga uso del hecho de que la integral de una función de densidad de probabilidad normal para una sola variable es uno.]

5-64. Si X y Y tienen una distribución normal bivariada con densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y; \sigma_X, \sigma_Y, \mu_X, \mu_Y, \rho)$, demuestre que la correlación entre X y Y es ρ. [*Sugerencia*: Complete el cuadrado en el exponente.]

5-6 COMBINACIONES LINEALES DE VARIABLES ALEATORIAS

En ocasiones se define una variable aleatoria como una función de varias variables aleatorias. Por ejemplo, si las variables aleatorias X_1 y X_2 denotan la longitud y el ancho, respectivamente, de una pieza, entonces $Y = 2X_1 + 2X_2$ es una variable aleatoria que representa el perímetro de la pieza. Como otro ejemplo, recuérdese que la variable aleatoria binomial negativa del capítulo 3 fue representada como la suma de varias variables aleatorias geométricas.

En esta sección se desarrollan resultados para variables aleatorias que son combinaciones lineales de variables aleatorias.

Definición

Dadas las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_p$, y las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$, entonces

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p \tag{5-33}$$

es una **combinación lineal** de $X_1, X_2, \ldots, X_p$.

Ahora bien, $E(Y)$ puede obtenerse a partir de la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de la siguiente manera. Supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son variables aleatorias continuas. Se puede utilizar un cálculo análogo para variables aleatorias discretas.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_px_p)f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p$$

$$= c_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1 f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p$$

$$+ c_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_2 f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p$$

$$+ ,\ldots,$$

$$+ c_p\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_p f_{X_1X_2\ldots X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p$$

Haciendo uso de la ecuación 5-21 para cada uno de los términos de esta expresión, se obtiene lo siguiente.

Si $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p$, entonces $E(Y) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \cdots + c_pE(X_p)$ (5-34)

Por otra parte, se deja como ejercicio para el lector demostrar lo siguiente.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son variables aleatorias independientes y $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p$, entonces

$$V(Y) = c_1^2V(X_1) + c_2^2V(X_2) + \cdots + c_p^2V(X_p) \qquad (5\text{-}35)$$

Nótese que los resultados para la varianza requieren que las variables aleatorias sean independientes. Para ver por qué la independencia es importante, considérese el siguiente ejemplo sencillo. Sea X_1 cualquier variable aleatoria y defínase $X_2 = -X_1$. Es evidente que X_1 y X_2 no son independientes. De hecho, $\rho_{XY} = -1$. Ahora bien, $Y = X_1 + X_2$ es cero con probabilidad uno. Por tanto, $V(Y) = 0$, sin importar las varianzas de X_1 y X_2.

EJEMPLO 5-34

Los resultados de las ecuaciones 5-34 y 5-35 pueden emplearse para obtener la media y la varianza de una variable aleatoria binomial negativa.

En el capítulo 3 se determinó que si Y es una variable aleatoria binomial negativa con parámetros p y r, entonces $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$, donde cada X_i es una variable aleatoria geométrica con parámetro p. Por consiguiente, $E(X_i) = 1/p$ y $V(X_i) = (1-p)/p^2$. De la ecuación

5-34, $E(Y) = r/p$. Por otra parte, en el capítulo 3 se estableció que $X_1, X_2, \ldots, X_r$ son independientes. Por tanto, de la ecuación 5-35, $V(Y) = r(1-p)/p^2$.

Puede emplearse un enfoque similar al del ejemplo anterior para verificar las fórmulas para la media y la varianza de una variable aleatoria Erlang del capítulo 4. A continuación se considera otra combinación lineal.

EJEMPLO 5-35

Supóngase que las variables aleatorias X_1 y X_2 denotan la longitud y el ancho, respectivamente, de una pieza. Supóngase además que $E(X_1) = 2$ centímetros, con una desviación estándar de 0.1 centímetros, y que $E(X_2) = 5$ centímetros con desviación estándar de 0.2 centímetros. También, supóngase que X_1 y X_2 son independientes. Entonces, $Y = 2X_1 + 2X_2$ es una variable aleatoria que representa el perímetro de la pieza. De la ecuación 5-34,

$$E(Y) = 2(2) + 2(5) = 14 \text{ cm}$$

y de la ecuación 5-35,

$$V(Y) = 2^2(0.1^2) + 2^2(0.2^2) = 0.04 + 0.16 = 0.20 \text{ cm}^2$$

Por tanto, la desviación estándar de Y es $0.20^{1/2} = 0.447$.

En los capítulos que siguen, a menudo será muy útil la combinación lineal que representa el promedio de p variables aleatorias con medias y varianzas idénticas. A continuación se hace hincapié en los resultados que corresponden a este caso especial.

> Si $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_p)/p$ con $E(X_i) = \mu$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, entonces
>
> $$E(\overline{X}) = \mu$$
>
> Además, si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ también son independientes con $V(X_i) = \sigma^2$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, entonces
>
> $$V(\overline{X}) = \sigma^2/p \qquad (5\text{-}36)$$

La conclusión para $E(\overline{X})$ en la ecuación 5-36 es evidente. La conclusión para $V(\overline{X})$ se obtiene de la siguiente manera. Al hacer uso de la ecuación 5-35, con $c_i = 1/p$ y $V(X_i) = \sigma^2$, se tiene que

$$V(\overline{X}) = (1/p)^2\,\sigma^2 \times p \text{ términos} = \sigma^2/p$$

Otro resultado útil con respecto a combinaciones lineales de variables aleatorias es una propiedad reproductiva que es válida para variables aleatorias normales independientes.

Propiedad reproductiva de la distribución normal

Si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son *variables aleatorias normales independientes* con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$, para $i = 1, 2, \ldots, p$, entonces

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p$$

es una variable aleatoria normal con

$$E(Y) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_p\mu_p$$

y

$$V(Y) = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_p^2\sigma_p^2 \qquad (5\text{-}37)$$

La media y la varianza de Y se desprenden de manera inmediata de las ecuaciones 5-34 y 5-35. El hecho de que Y tenga una distribución normal puede obtenerse a partir de las funciones generadoras estudiadas en el apéndice II.

EJEMPLO 5-36

En el ejemplo 5-35, las variables aleatorias X_1 y X_2 denotan la longitud y el ancho, respectivamente, de una pieza. Supóngase que X_1 es normal con $E(X_1) = 2$ centímetros y desviación estándar de 0.1 centímetros, y que X_2 es normal con $E(X_2) = 5$ centímetros y desviación estándar de 0.2 centímetros. Asimismo, supóngase que X_1 y X_2 son independientes. Calcúlese la probabilidad de que el perímetro sea mayor que 14.5 centímetros.

Así, $Y = 2X_1 + 2Y_2$ es una variable aleatoria que representa el perímetro de la pieza. De la ecuación 5-37, Y tiene una distribución normal. Del ejemplo 5-35, $E(Y) = 14$ centímetros y la desviación estándar de Y es $0.20^{1/2} = 0.447$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} P(Y > 14.5) &= P[(Y - \mu_Y)/\sigma_Y > (14.5 - 14)/0.447] \\ &= P(Z > 1.12) = 0.13 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5-37

Una máquina de llenado automático llena latas de una bebida suave. El volumen promedio de llenado es 12.1 onzas de líquido, y la desviación estándar es de 0.05 onzas de líquido. Supóngase que el volumen de llenado de las latas son variables aleatorias normales independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar 10 latas, el volumen promedio de este proceso sea menor que 12 onzas de líquido?

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ el volumen de llenado de las 10 latas. El volumen promedio (denotado por $\overline{X}$) es una variable aleatoria normal con

$$E(\overline{X}) = 12.1 \quad \text{y} \quad V(\overline{X}) = \frac{0.05^2}{10}\,\text{cm}^2 = 0.00025$$

En consecuencia,

$$P(\overline{X}' < 12) = P[(\overline{X} - \mu_{\overline{X}})/\sigma_{\overline{X}} < (12 - 12.1)/0.0158]$$
$$= P(Z < -6.32) = 0$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5-6

5-65. Si X y Y son variables aleatorias normales independientes con $E(X) = 0$, $V(X) = 4$, $E(Y) = 10$ y $V(Y) = 9$. Calcule lo siguiente:

a. $E(2X + 3Y)$

b. $V(2X + 3Y)$

c. $P(2X + 3Y < 30)$

d. $P(2X + 3Y < 40)$

5-66. Suponga que la variable aleatoria X representa la longitud, en pulgadas, de un pieza perforada. Sea Y la longitud de la pieza en milímetros. Si $E(X) = 5$ pulgadas, ¿cuál es la media de Y?

5-67. La envoltura de plástico para un disco magnético está formada por dos hojas. El espesor de cada una tiene una distribución normal con media 1.5 milímetros y desviación estándar de 0.1 milímetros. Las hojas son independientes.

a. Determine la media y la desviación estándar del espesor total de las dos hojas.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el espesor total sea mayor que 3.3 milímetros?

5-68. El ancho del marco de una puerta tiene una distribución normal con media 24 pulgadas y desviación estándar de 1/8 de pulgada. El ancho de la puerta tiene una distribución normal con media 23 y 7/8 pulgadas y desviación estándar de 1/16 pulgadas. Suponga independencia.

a. Determine la media y la desviación estándar de la diferencia entre el ancho del marco y el de la puerta.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre el ancho del marco y el de la puerta sea mayor que 1/4 de pulgada?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la puerta no quepa en el marco?

5-69. Un componente en forma de U está formado por tres piezas, A, B y C. La figura 5-21 ilustra el componente. La longitud de A tiene una distribución normal con media de 10 milímetros y desviación estándar de 0.1 milímetros. El espesor de las piezas B y C está distribuido normalmente con media de 2 milímetros y desviación estándar de 0.05 milímetros. Suponga que todas las dimensiones son independientes.

a. Determine la media y la desviación estándar de la longitud del hueco D.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el hueco D sea menor que 5.9 milímetros?

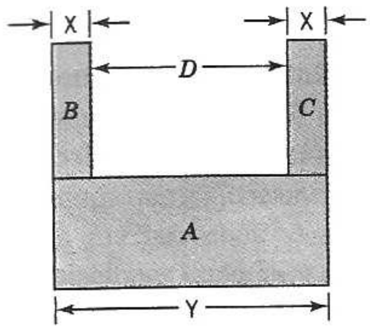


Figura 5-21 Figura para el ejercicio 5-69.

5-70. El llenado de las latas de una bebida suave lo hace una máquina de llenado automática, con una desviación estándar de 0.5 onzas de líquido. Suponga que los volúmenes con que se llenan las latas son variables aleatorias normales independientes.

a. ¿Cuál es la desviación estándar del volumen de llenado promedio de 100 latas?

b. Si el volumen de llenado promedio es 12.1 onzas, ¿cuál es la probabilidad de que el volumen de llenado promedio de 100 latas sea menor que 12 onzas de líquido?

c. ¿Cuál debe ser el valor del volumen de llenado promedio para que la probabilidad sea 0.005 de que el promedio en 100 latas sea menor que 12 onzas de líquido?

5-71. El espesor de la película fotoprotectora en un proceso de fabricación de semiconductores tiene una media de 10 micrometros y una desviación estándar de 1 micrometro. Supóngase que el espesor tiene una distribución normal, y que el espesor entre diferentes obleas es independiente.

a. Calcule la probabilidad de que espesor promedio de 10 obleas sea mayor que 11 o menor que 9 micrometros.

b. Determine el número de obleas que es necesario medir para que la probabilidad sea 0.01 de que el espesor promedio sea mayor que 11 micrometros.

5-7 DESIGUALDAD DE CHEBYCHEV

En el capítulo 4 se demostró que si X es una variable aleatoria normal con media μ y desviación estándar σ, entonces $P(\mu - 1.96\sigma < X < \mu + 1.96\sigma) = 0.95$. Este resultado relaciona la probabilidad de una variable aleatoria normal con la magnitud de la desviación estándar. El matemático Chebychev desarrolló, en 1867, un resultado similar e interesante que se aplica a cualquier variable aleatoria discreta o continua.

Desigualdad de Chebychev

Para cualquier variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2,

$$P(|X - \mu| \geq c\sigma) \leq 1/c^2$$

Tabla 5-1 Porcentaje de la distribución mayor que c desviaciones estándar a partir de la media

c	Regla de Chebychev para cualquier distribución de probabilidad	Distribución normal
1.5	menor que 44.4%	13.4%
2	menor que 25.0%	4.6%
3	menor que 11.1%	0.27%
4	menor que 6.3%	0.01%

Este resultado se interpreta de la siguiente manera. La probabilidad de que una variable aleatoria difiera de su media al menos en c desviaciones estándar, es menor o igual que $1/c^2$. Nótese que la regla es útil sólo cuando $c > 1$.

Por ejemplo, emplear $c = 2$ implica que la probabilidad de que *cualquier* variable aleatoria difiera de su media al menos por dos desviaciones estándar, no es mayor que 1/4. Se sabe que, para una variable aleatoria normal, esta probabilidad es menor que 0.05. Asimismo, utilizar $c = 3$, implica que la probabilidad de que cualquier variable aleatoria difiera de su media al menos por tres desviaciones estándar, no es mayor que 1/9. La desigualdad de Chebychev proporciona una relación entre la desviación estándar y la dispersión de la distribución de probabilidad de cualquier variable aleatoria. La demostración se deja como ejercicio para el lector.

La tabla 5-1 presenta una comparación entre las probabilidades calculadas con la regla de Chebychev y las calculadas para una variable aleatoria normal.

EJEMPLO 5-38

El proceso de taladrar agujeros en tarjetas de circuito impreso, produce diámetros con una desviación estándar de 0.01 milímetros. ¿Cuántos diámetros es necesario medir para que la probabilidad sea al menos 8/9 de que el promedio de los diámetros medidos se encuentre a no más de 0.005 milímetros del diámetro promedio μ del proceso?

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ las variables aleatorias que denotan los diámetros de los n agujeros. El diámetro promedio medido es $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. Supóngase que las X son variables aleatorias independientes. De la ecuación 5-36, $E(\overline{X}) = \mu$ y $V(\overline{X}) = 0.01^2/n$. En consecuencia, la desviación estándar de $\overline{X}$ es $(0.01^2/n)^{1/2}$. Al aplicar la desigualdad de Chebychev a $\overline{X}$,

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq c(0.01^2/n)^{1/2}) \leq 1/c^2$$

Sea $c = 3$. Entonces,

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 3(0.01^2/n)^{1/2}) \leq 1/9$$

Por tanto,

$$P(|\overline{X} - \mu| < 3(0.01^2/n)^{1/2}) \geq 8/9$$

Por consiguiente, la probabilidad de que $\overline{X}$ esté a no más de $3(0.01^2/n)^{1/2}$ de μ es al menos 8/9. Finalmente, se elige n de modo tal que $3(0.01^2/n)^{1/2} = 0.005$. Esto es,

$$n = 3^2[0.01^2/0.005^2] = 36$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5-7

5-72. El espesor de la película fotoprotectora en un proceso de fabricación de semiconductores tiene una media de 10 micrometros y una desviación estándar de 1 micrometro. Acote la probabilidad de que el espesor sea menor que 6 o mayor que 14 micrometros.

5-73. Suponga que X tiene una distribución uniforme continua dentro del rango $0 < x < 10$. Utilice la regla de Chebychev para acotar la probabilidad de que X difiera de su media por más de dos desviaciones estándar y compare el resultado con el valor real de la probabilidad.

5-74. Suponga que X tiene una distribución exponencial con media 20. Utilice la regla de Chebychev para acotar la probabilidad de que X difiera de su media por más de dos y tres desviaciones estándar, y compare los resultados con el valor real de la probabilidad en cada caso.

5-75. Suponga que X tiene una distribución Poisson con media λ. Utilice la regla de Chebychev para acotar la probabilidad de que X difiera de su media por más de dos y tres desviaciones estándar, y compare los resultados con el valor real de la probabilidad en cada caso.

5-76. Considere el proceso de taladrar agujeros en tarjetas de circuito impreso. Suponga que la desviación estándar de los diámetros es 0.01 y que éstos son independientes. Suponga además que se utiliza el promedio de 500 diámetros para estimar la media del proceso.

a. Si la probabilidad de que el promedio medido se encuentre dentro de alguna cota alrededor de la media del proceso, es al menos de 15/16, ¿cuál es el valor de la cota?

b. Si se supone que los diámetros tienen una distribución normal, determine una cota tal que la probabilidad de que el promedio medido esté más cercano a la media del proceso que la cota, sea al menos de 15/16.

Ejercicios complementarios

5-77. Demuestre que la siguiente función satisface las propiedades de una función de probabilidad conjunta.

x	y	$f(x, y)$
0	1	1/8
1	0	1/8
1	1	1/4
2	2	1/2

5-78. **Continuación del ejercicio 5-77.** Determine las siguientes probabilidades:

a. $P(X < 0.5, Y < 1.5)$

b. $P(X \leq 1)$

c. $P(Y < 1.5)$

d. $P(X > 0.5, Y < 1.5)$

5-79. **Continuación del ejercicio 5-77.** Calcule $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ y $V(Y)$.

5-80. **Continuación del ejercicio 5-77.**

a. Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X.

b. Determine la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1$.

5-81. **Continuación del ejercicio 5-77.** ¿X y Y son independientes? Explique su respuesta.

5-82. **Continuación del ejercicio 5-77.** Calcule la correlación entre X y Y.

5-83. El par de torsión necesario para retirar los tornillos de una placa de metal se clasifica como alto, moderado o bajo. Históricamente, la probabilidad asignada a la clasificación alto, moderado y bajo es 0.6, 0.3 y 0.1, respectivamente. Suponga que se examinan 20 tornillos y que la clasificación de los pares aplicados es independiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el par aplicado a 12, 6 y 2 tornillos sea clasificado como alto, moderado y bajo, respectivamente?

b. ¿Cuál es la distribución marginal del número de tornillos a los que se les aplicó un par bajo?

c. ¿Cuál es el número esperado de tornillos donde el par aplicado será clasificado como bajo?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de tornillos en los que el par aplicado será clasificado como bajo, sea mayor que dos?

5-84. **Continuación del ejercicio 5-83.**

a. ¿Cuál es la distribución condicional del número de tornillos donde el par aplicado será clasificado como bajo, si 16 de los pares son clasificados como altos?

b. ¿Cuál es el número esperado condicional de tornillos donde la clasificación del par será baja dado que 16 de los pares son clasificados como altos?

c. El número de tornillos donde la clasificación del par es alto y el de tornillos donde el par es bajo, ¿constituyen variables aleatorias independientes?

5-85. Para evaluar el apoyo técnico de un fabricante de computadoras, se lleva una cuenta del número de veces que suena el teléfono antes de que un representante de servicio conteste la llamada. Históricamente, el 70% de las llamadas son contestadas cuando el teléfono suena dos veces o menos; el 25% después de que el teléfono suena tres o cuatro veces, y el resto de las llamadas requieren que el teléfono suene cinco veces o más. Suponga que usted llama al fabricante 10 veces y que las llamadas son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ocho de las llamadas sean contestadas después de que el teléfono suena dos veces o menos; una, después de que el teléfono suena tres o cuatro veces, y una, después de que el teléfono suena cinco veces o más?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las diez llamadas sean contestadas después de que el teléfono suena cuatro veces o menos?

c. ¿Cuál es el número esperado de llamadas que serán contestadas después de que el teléfono suena cuatro veces o menos?

5-86. **Continuación del ejercicio 5-85.**

a. ¿Cuál es la distribución condicional del número de llamadas que necesitarán que el teléfono suene cinco veces o más, dado que ocho llamadas fueron contestadas después de que el teléfono sonó dos veces o menos?

b. ¿Cuál es el número esperado condicional de llamadas que necesitarán que el teléfono suene cinco veces o más, dado que ocho llamadas fueron contestadas después de que el teléfono sonó dos veces o menos?

c. El número de llamadas contestadas después de que el teléfono suena dos veces o menos y el de aquellas que requieren que el teléfono suene cinco veces o más, ¿son variables aleatorias independientes?

5-87 Calcule el valor de c tal que la función $f(x, y) = cx^2y$ para $0 < x < 3$ y $0 < y < 2$ satisfaga las propiedades de una función de densidad de probabilidad conjunta.

5-88. **Continuación del ejercicio 5-87.** Calcule lo siguiente:

a. $P(X < 1, Y < 1)$

b. $P(X < 2.5)$

c. $P(1 < Y < 2.5)$

d. $P(X > 2, 1 < Y < 1.5)$

e. $E(X)$

f. $E(Y)$

5-89. **Continuación del ejercicio 5-87.**

a. Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X.

b. Calcule la distribución de probabilidad condicional de Y dado que $X = 1$.

c. Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que $Y = 1$.

5-90. La distribución conjunta de las variables aleatorias continuas X, Y y Z es constante sobre la región $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 < z < 4$.

a. Determine $P(X^2 + Y^2 \leq 0.5)$.

b. Obtenga $P(X^2 + Y^2 \leq 0.5, Z < 2)$.

c. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad condicional conjunta de X y Y dado que $Z = 1$?

d. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad marginal de X?

5-91. **Continuación del ejercicio 5-90.**

a. Determine la media condicional de Z dado que $X = 0$ y $Y = 0$.

b. En general, determine la media condicional de Z dado que $X = x$ y $Y = y$.

5-92. Suponga que X y Y son variables aleatorias uniformes continuas independientes para $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$. Utilice la función de densidad de probabilidad conjunta para determinar la probabilidad de que $|X - Y| < 0.5$.

5-93. El tiempo de vida de seis componentes importantes de una copiadora son variables aleatorias exponenciales independientes con medias de 8000, 10 000, 10 000, 20 000, 20 000 y 25 000 horas, respectivamente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de todos los componentes sea mayor que 5000 horas?

b. ¿Cuál es la covarianza entre los componentes cuya duración media es de 5000 horas y los de 25 000 horas?

5-94. Los problemas de contaminación en la fabricación de semiconductores pueden dar origen a un defecto funcional, a uno menor o a ningún defecto en el producto final. Suponga que 20%, 50% y 30% de los problemas de contaminación dan origen a defectos funcionales, menores o a ningún defecto, respectivamente. Suponga además que los efectos de 10 problemas de contaminación son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los 10 problemas de contaminación den como resultado dos defectos funcionales y cinco defectos menores?

b. ¿Cuál es la distribución del número de problemas de contaminación que no dan como resultado ningún defecto?

c. ¿Cuál es el número esperado de problemas de contaminación que dan como resultado ningún defecto?

5-95. El peso de los ladrillos de adobe utilizados en construcción tiene una distribución normal con media de 3 libras y desviación estándar de 0.25 libras. Suponga que los pesos de los ladrillos son independientes, y que se toma una muestra aleatoria de 25 ladrillos. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso promedio de la muestra sea menor que 2.95 libras?

5-96. La longitud y el ancho, en pulgadas, de los paneles utilizados para puertas interiores están denotados por X y Y, respectivamente. Suponga que X y Y son variables aleatorias uniformes continuas independientes para $17.75 < x < 18.25$ y $4.75 < y < 5.25$, respectivamente. Mediante la integración de la función de densidad de probabilidad conjunta sobre la región apropiada, determine la probabilidad de que el área del panel sea mayor que 90 pulgadas.

5-97. El peso de un caramelo pequeño tiene una distribución normal con media 0.1 onzas y desviación estándar de 0.01 onzas. Suponga que se colocan 16 caramelos en un paquete y que los pesos de éstos son independientes.

a. ¿Cuáles son la media y la varianza del peso neto del paquete?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 1.6 onzas?

c. Si se colocan 17 caramelos en cada paquete, ¿cuál es la probabilidad de que el peso neto de un paquete sea menor que 1.6 onzas?

5-98. El tiempo para que un sistema automatizado localice una pieza en un almacén, tiene una distribución normal con media de 45 segundos y desviación estándar de 30 segundos. Suponga que se hacen pedidos independientes por 10 piezas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos?

5-99. El ensamble mecánico empleado en el motor de un automóvil tiene cuatro componentes importantes. Los pesos de los componentes son independientes y están distribuidos normalmente con las siguientes medias y desviaciones estándar (en onzas):

componente	**media**	**desviación estándar**
tapa izquierda	4	0.4
tapa derecha	5.5	0.5
ensamble de cojinetes	10	0.2
ensamble de tornillos	8	0.5

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso de un ensamble sea mayor que 29.5 onzas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso promedio de ocho ensambles independientes sea mayor que 29 onzas?

5-100. Suponga que X y Y tienen una distribución normal bivariada con $\sigma_X = 4$, $\sigma_Y = 1$, $\mu_X = 4$, $\mu_Y = 4$, y $\rho = -0.2$. Dibuje una gráfica de contornos de la función de densidad de probabilidad conjunta.

EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

5-101. Demuestre la regla de Chebychev. Defina la variable aleatoria Y como sigue.

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } |X - \mu| \geq c\sigma \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a. Determine $E(Y)$.

b. Demuestre que $(X-\mu)^2 \geq (X-\mu)^2 Y \geq c^2\sigma^2 Y$.

c. Utilice la parte (**b**) para demostrar que $E[(X-\mu)^2] \geq c^2\sigma^2 E[Y]$.

d. Haga uso de la parte (**c**) para completar la deducción de la desigualdad de Chebychev.

5-102. Demuestre que si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son variables aleatorias continuas independientes, entonces $P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_p \in A_p) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)\ldots P(X_p \in A_p)$ para cualesquiera regiones $A_1, A_2, \ldots, A_p$ en el rango de $X_1, X_2, \ldots, X_p$, respectivamente.

5-103. Demuestre que si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son variables aleatorias independientes y $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_pX_p$, entonces

$$V(Y) = c_1^2V(X_1) + c_p^2V(X_2) + \cdots + c_p^2V(X_p)$$

Puede suponer que las variables aleatorias son continuas.

5-104. Demuestre que si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0$$

Puede suponer que las variables aleatorias son continuas.

5-105. Suponga que la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas X y Y es una constante sobre el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$. Demuestre que X y Y son independientes.

5-106. Suponga que el rango de las variables continuas X y Y es $0 < x < a$ y $0 < y < b$. También suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y) = g(x)h(y)$, donde $g(x)$ es una función sólo de x y $h(y)$ es una función sólo de y. Demuestre que X y Y son independientes.

5-107. Con la finalidad de evaluar generadores de números seudoaleatorios, se grafican pares de variables aleatorias uniformes continuas como puntos en el cuadrado unitario $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$. Sea la región R formada por el conjunto de todos los puntos del cuadrado unitario tales que $x - 0.5 < y < x + 0.5$. Para verificar una correlación entre las variables aleatorias que forman cada par, se obtiene la proporción de puntos que hay en R. Si las variables aleatorias del par son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que un punto caiga dentro de la región R?

6 Estimación puntual

6-1 INFERENCIA ESTADÍSTICA

El campo de la inferencia estadística está formado por los métodos utilizados para tomar decisiones o para obtener conclusiones sobre una **población**. Estos métodos utilizan la información contenida en una **muestra** de la población para obtener conclusiones. La figura 6-1 indica la relación que existe entre una población y una muestra. Este capítulo da inicio al estudio de los métodos estadísticos utilizados para inferencia y toma de decisiones.

La inferencia estadística puede dividirse en dos grandes áreas: **estimación de parámetros** y **prueba de hipótesis**. Como ejemplo de un problema de estimación de parámetros, supóngase que un ingeniero de estructuras analiza la resistencia a la tensión de un componente empleado en la carrocería de un automóvil. Puesto que la variabilidad existe de manera natural en la resistencia a la tensión entre distintos componentes, debido a

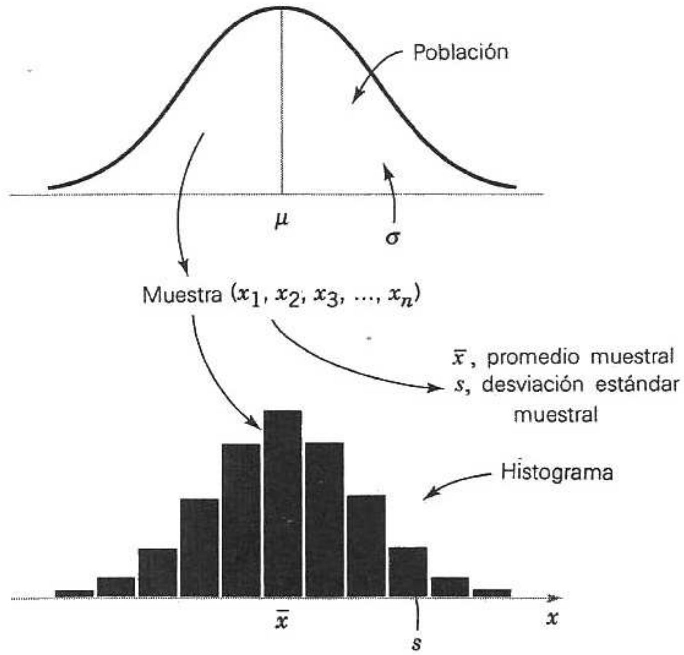


Figura 6-1 Relación entre una población y una muestra.

diferencias en los lotes de materia prima, en el proceso de fabricación y en los procedimientos de medición (por ejemplo), el ingeniero está interesado en estimar la resistencia a la tensión promedio de los componentes. El conocimiento de las propiedades de muestreo estadísticas del estimador utilizado, permite al ingeniero establecer la precisión del valor estimado.

Ahora considérese una situación donde pueden emplearse dos temperaturas de reacción diferentes en un proceso químico, t_1 y t_2. El ingeniero establece la conjetura de que la temperatura t_1 dará como resultado rendimientos mayores que t_2. La prueba estadística de hipótesis es un marco de referencia para resolver problemas de este tipo. En este caso, la hipótesis es que el rendimiento promedio con la temperatura t_1 es mayor que el rendimiento promedio con la temperatura t_2. Nótese que no se hace hincapié en la estimación de los rendimientos; en su lugar, la atención se centra en obtener conclusiones sobre la hipótesis planteada.

Este capítulo comienza con un estudio de las **muestras aleatorias** (un concepto clave en la inferencia estadística), y luego presenta métodos para estimar parámetros. El capítulo termina con un análisis de las **distribuciones de muestreo**, lo que permite cuantificar el error en una estimación. El capítulo 7 extiende el estudio de la estimación a ciertas clases de estimaciones por intervalos conocidos como intervalos de confianza e intervalos de tolerancia, mientras que en el capítulo 8 se presentan métodos para la prueba estadística de hipótesis.

6-2 MUESTREO ALEATORIO

En muchos problemas estadísticos, es necesario utilizar una muestra de observaciones tomadas de la población de interés con objeto de obtener conclusiones sobre ella. A continuación se presenta la definición formal de algunos términos.

Definición

Una **población** está formada por la totalidad de las observaciones en las cuales se tiene cierto interés.

En cualquier problema particular, la población puede ser pequeña, grande pero finita o infinita. El número de observaciones en la población recibe el nombre de **tamaño de la población**. Por ejemplo, el ingreso de los habitantes de una ciudad de Estados Unidos, y el número de botellas con un contenido menor de bebida en un día de producción de una compañía refresquera, son poblaciones de tamaño finito. Las observaciones obtenidas al medir todos los días el nivel de monóxido de carbono, es una población de tamaño infinito. Por otra parte, un ingeniero de estructuras puede considerar que la población de resistencias a la tensión tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Puede hacerse referencia a este hecho diciendo que es una **población normal** o que es una población normalmente distribuida.

En muchos problemas de inferencia estadística, es imposible o poco práctico observar toda la población. Por ejemplo, no es posible probar la resistencia a la tensión de todos los elementos estructurales de las carrocerías, ya que esto se lleva mucho tiempo y tiene un costo alto. Por otra parte, algunos (quizás muchos) de los elementos estructurales todavía no existen en el momento en que tiene que tomarse una decisión, así que, en gran medida, la población debe verse como algo **conceptual**. En consecuencia, se depende de un subconjunto de las observaciones provenientes de la población que sean de ayuda para tomar decisiones sobre ésta.

Definición

Una **muestra** es un subconjunto de observaciones seleccionadas de una población.

Para que las inferencias sean válidas, la muestra debe ser representativa de la población. A menudo resulta atractivo seleccionar las observaciones más convenientes como muestra o ejercitar el juicio en la selección de la muestra. Es frecuente que estos procedimientos introduzcan un *sesgo* en la muestra, lo que trae como consecuencia que el parámetro de interés sea subestimado (o sobrestimado) por la muestra. Por otra parte, no es posible describir de manera estadística el comportamiento de una muestra de este tipo. Para evitar estas dificultades, es deseable seleccionar una **muestra aleatoria** como el resultado de un mecanismo aleatorio. En consecuencia, la selección de una muestra es un experimento aleatorio, y cada observación de la muestra es el valor observado de una variable aleatoria. Las observaciones en la población determinan la distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

Para definir una muestra aleatoria, sea X la variable aleatoria que representa el resultado de tomar una observación de la población. Sea $f(x)$ la función de densidad de probabilidad de X. Supóngase que cada observación en la muestra se obtiene de manera independiente, bajo las mismas condiciones. Esto es, las observaciones de la muestra se obtienen al observar X de manera independiente bajo condiciones que no cambian, digamos, n veces. Sea X_i la variable aleatoria que representa la i-ésima réplica. Entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria, donde los valores numéricos obtenidos son $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Las variables aleatorias en una muestra aleatoria son independientes, con la misma distribución de probabilidad $f(x)$ debido a que cada observación se obtiene bajo las mismas condiciones. Esto es, las funciones de densidad de probabilidad marginal de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$, respectivamente, y por independencia, la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra aleatoria es $f_{X_1X_2} \ldots X_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1)f(x_2) \ldots f(x_n)$.

Definición

Las variables aleatorias $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño n, si a) las X_i son variables aleatorias independientes, y b) todas las X_i tienen la misma distribución de probabilidad.

Para ilustrar esta definición, supóngase que se investiga la duración efectiva de un componente electrónico utilizado en un marcapaso cardiaco, y que la duración del componente tiene una distribución normal. Entonces se espera que cada una de las observaciones de la duración del componente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ en una muestra aleatoria de n componentes, sean variables aleatorias independientes con la misma distribución normal. Después de recopilar los datos, los valores numéricos de los tiempos de duración observados se denotan por $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

El propósito principal de la toma de una muestra aleatoria es obtener información sobre los parámetros no conocidos de la población. Supóngase, por ejemplo, que se desea alcanzar una conclusión acerca de la población de habitantes de Estados Unidos que prefieren una marca particular de refresco. Sea p el valor no conocido de esta proporción. Resulta poco práctico interrogar a cada persona de la población para determinar el verdadero valor de p. Para hacer una inferencia con respecto a la proporción verdadera p, un procedimiento más razonable consiste en seleccionar una muestra aleatoria (de un tamaño apropiado) y utilizar la proporción observada $\hat{p}$ de personas en la muestra que prefieren cierta marca de refresco.

La proporción de la muestra, $\hat{p}$, se calcula dividiendo el número de personas de la muestra que prefieren una marca particular de refresco entre el tamaño total de la muestra, n. Por tanto, $\hat{p}$ es una función de los valores observados en la muestra aleatoria. Puesto que es posible obtener muchas muestras aleatorias de una población, el valor de $\hat{p}$ cambiará de una a otra. Esto es, $\hat{p}$ es una variable aleatoria. Esta variable aleatoria se conoce como **estadística**.

Definición

Una **estadística** es cualquier función de las observaciones contenidas en una muestra aleatoria.

Hasta el momento, en este libro ya se han considerado varias estadísticas. Por ejemplo, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n, entonces la media muestral $\overline{X}$, la varianza muestral S^2, y la desviación estándar muestral S, son estadísticas. El proceso de obtener conclusiones sobre poblaciones con base en datos contenidos en una muestra, hace un uso considerable de estas estadísticas.

Puesto que una estadística es una variable aleatoria, ésta tiene una distribución de probabilidad. Se conoce como **distribución de muestreo** a la distribución de probabilidad de una estadística. La noción de una distribución de muestreo es muy importante y será estudiada con mayor detalle más adelante, en este capítulo.

Una aplicación muy importante de la estadística es obtener **estimaciones puntuales** de parámetros tales como la media y la varianza de la población. Cuando se estudian problemas de inferencia, es conveniente tener un símbolo general para representar el parámetro de interés; para ello se hará uso de la letra griega θ (theta). El objetivo de la estimación puntual es seleccionar un número, con base en los datos de la muestra, que sea el valor más plausible de θ. El valor numérico de alguna estadística de la muestra es el que será utilizado como estimación puntual.

En general, si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$, caracterizada por el parámetro no conocido θ, y si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X de tamaño n, entonces la estadística $\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ recibe el nombre de **estimador puntual de θ**. Nótese que $\hat{\Theta}$ es una variable aleatoria, ya que es una función de variables aleatorias. Después de que se ha seleccionado la muestra, $\hat{\Theta}$ toma un valor numérico particular $\hat{\theta}$ denominado **estimación puntual** de θ.

Definición

Una **estimación puntual** de algún parámetro θ de la población es un valor numérico $\hat{\theta}$ de la estadística $\hat{\Theta}$.

Como ejemplo, supóngase que la variable aleatoria X tiene una distribución normal con media no conocida μ. La media muestral es un estimador puntual de la media no conocida μ de la población. Esto es, $\hat{\mu} = \overline{X}$. Después de tomar la muestra, el valor numérico $\overline{x}$ es la estimación puntual de μ. Por tanto, si $x_1 = 25$, $x_2 = 30$, $x_3 = 29$ y $x_4 = 31$, entonces la estimación puntual de μ es

$$\overline{x} = \frac{25 + 30 + 29 + 31}{4} = 28.75$$

De manera similar, si la varianza σ^2 de la población también es desconocida, un estimador puntual de σ^2 es la varianza muestral S^2, y el valor numérico $s^2 = 6.9$ calculado a partir de los datos contenidos en la muestra, recibe el nombre de estimación puntual de σ^2.

Los problemas de estimación se presentan con gran frecuencia en la ingeniería. A menudo es necesario estimar

- La media μ de una población
- La varianza σ^2 (o desviación estándar σ) de una población
- La proporción p de objetos de una población que pertenecen a cierta clase de interés

- La diferencia entre medias de dos poblaciones, $\mu_1 - \mu_2$
- La diferencia entre proporciones de dos poblaciones, $p_1 - p_2$

Estimadores puntuales razonables de estos parámetros, son los siguientes:

- Para μ, el estimado es $\hat{\mu} = \bar{x}$, la media muestral.
- Para σ^2, el estimado es $\hat{\sigma}^2 = s^2$, la varianza muestral.
- Para p, es estimado es $\hat{p} = x/n$, la proporción muestral, donde x es el número de objetos en una muestra aleatoria de tamaño n que pertenece a la clase de interés.
- Para $\mu_1 - \mu_2$, el estimado es $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, la diferencia entre las medias muestrales de dos muestras aleatorias independientes.
- Para $p_1 - p_2$, el estimado es $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, la diferencia entre las proporciones de las dos muestras, calculadas a partir de dos muestras aleatorias independientes.

Pueden tenerse varias opciones para el estimador puntual de un parámetro. Por ejemplo, si se desea estimar la media de una población, pueden considerarse como estimadores puntuales la media muestral, la mediana muestral, o quizás el promedio de las observaciones más grande y más pequeña. Para decidir cuál es el mejor estimador puntual para un parámetro en particular, es necesario examinar las propiedades estadísticas de éstos y desarrollar algunos criterios para comparar estimadores.

6-3 PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

6-3.1 Estimadores insesgados

Un estimador debe estar "próximo" en algún sentido al valor verdadero del parámetro desconocido. De manera formal, se dice que $\hat{\Theta}$ es un estimador insesgado de θ si el valor esperado de $\hat{\Theta}$ es igual a θ. Esto equivale a afirmar que la media de la distribución de probabilidad de $\hat{\Theta}$ (o la media de la distribución de muestreo de $\hat{\Theta}$) es igual a θ.

Definición

El estimador puntual $\hat{\Theta}$ es un **estimador insesgado** para el parámetro θ, si

$$E(\hat{\Theta}) = \theta \qquad (6\text{-}1)$$

Si el estimador no es insesgado, entonces la diferencia

$$E(\hat{\Theta}) - \theta \qquad (6\text{-}2)$$

es conocida como **sesgo** del estimador $\hat{\Theta}$.

Cuando un estimador es insesgado, $E(\hat{\Theta}) - \theta = 0$; esto es, el sesgo es cero.

EJEMPLO 6-1

Supóngase que X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población representada por X. Demuéstrese que la media muestral $\overline{X}$ y la varianza muestral S^2 son estimadores insesgados de μ y σ^2, respectivamente.

Primero se considera la media muestral. En la ecuación 5-36 del capítulo 5, se demostró que $E(\overline{X}) = \mu$. Por tanto, la media muestral $\overline{X}$ es un estimador insesgado de la media poblacional μ.

Ahora considérese la varianza muestral. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{n-1} E \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \\
&= \frac{1}{n-1} E \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + \overline{X}^2 - 2\overline{X}X_i) \\
&= \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right]
\end{aligned}
$$

La última igualdad se desprende de la ecuación 5-34 del capítulo 5. Sin embargo, dado que $E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2$ y $E(\overline{X}^2) = \mu^2 + \sigma^2/n$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\mu^2 + \sigma^2) - n(\mu^2 + \sigma^2/n)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}(n\mu^2 + n\sigma^2 - n\mu^2 - \sigma^2) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, la varianza muestral S^2 es un estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2. Sin embargo, puede demostrarse que la desviación estándar muestral S es un estimador sesgado de la desviación estándar de la población. Para muestras grandes, este sesgo es poco significativo.

En ocasiones existen varios estimadores insesgados del parámetro de la población muestral. Por ejemplo, supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ de

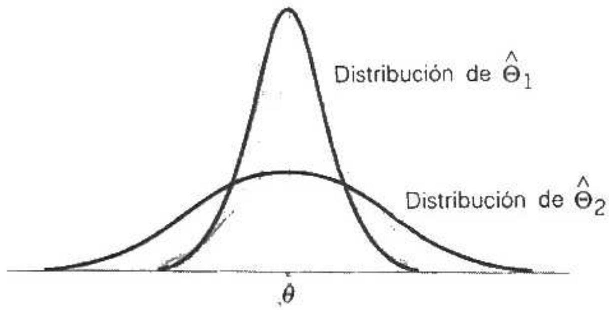


Figura 6-2 Distribuciones de muestreo de dos estimadores insesgados $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$.

una población normal, y se obtienen los datos $x_1 = 12.8$, $x_2 = 9.4$, $x_3 = 8.7$, $x_4 = 11.6$, $x_5 = 13.1$, $x_6 = 9.8$, $x_7 = 14.1$, $x_8 = 8.5$, $x_9 = 12.1$, $x_{10} = 10.3$. Ahora, la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{12.8 + 9.4 + 8.7 + 11.6 + 13.1 + 9.8 + 14.1 + 8.5 + 12.1 + 10.3}{10}$$
$$= 11.04$$

mientras que la mediana muestral es

$$\tilde{x} = \frac{10.3 + 11.6}{2} = 10.95$$

y la media ajustada al 10% (la cual se obtiene al descartar de la muestra el 10% más grandes y el más pequeño antes de hacer el promedio) es

$$\bar{x}_{tr(10)} = \frac{8.7 + 9.4 + 9.8 + 10.3 + 11.6 + 12.1 + 12.8 + 13.1}{8}$$
$$= 10.98$$

Puede demostrarse que todas estas cantidades son estimadores insesgados de μ. Puesto que no hay un estimador insesgado único, no es posible depender exclusivamente de esta propiedad para seleccionar el estimador. Se necesita un método para seleccionar uno de entre varios estimadores insesgados.

6-3.2 Varianza y error cuadrático medio de un estimador puntual

Supóngase que $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son estimadores insesgados de θ. Esto indica que la distribución de cada estimador está centrada en el verdadero valor de θ. Sin embargo, las varianzas de estas distribuciones pueden ser diferentes. La figura 6-2 ilustra esta situación. Puesto que $\hat{\Theta}_1$ tiene una varianza más pequeña que $\hat{\Theta}_2$, entonces es más probable que el estimador $\hat{\Theta}_1$ produzca un estimado más cercano al verdadero valor de θ. Cuando se elige uno de entre varios estimadores, un principio lógico de estimación es seleccionar el estimador que tenga la menor varianza.

Definición

Si se consideran todos los estimadores insesgados de θ, el que tiene la menor varianza recibe el nombre de **estimador insesgado de varianza mínima** (EIVM).

En ocasiones el EIVM también se conoce como EIUVM, donde la letra U representa "uniforme", lo que significa "para todo θ".

A veces es necesario utilizar un estimador sesgado. En tales casos, puede ser importante el error cuadrático medio del estimador. El **error cuadrático medio** de un estimador $\hat{\Theta}$ es el cuadrado esperado de la diferencia entre $\hat{\Theta}$ y θ.

Definición

El **error cuadrático medio** de un estimador $\hat{\Theta}$ del parámetro θ está definido como

$$\text{ECM}(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta} - \theta)^2 \tag{6-3}$$

El error cuadrático medio puede rescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\text{ECM}(\hat{\Theta}) &= E[\hat{\Theta} - E(\hat{\Theta})]^2 + [\theta - E(\hat{\Theta})]^2 \\ &= V(\hat{\Theta}) + (\text{sesgo})^2\end{aligned}$$

Esto es, el error cuadrático medio de $\hat{\Theta}$ es igual a la varianza del estimador más el cuadrado del sesgo. Si $\hat{\Theta}$ es un estimador insesgado de θ, el error cuadrático medio de $\hat{\Theta}$ es igual a la varianza de $\hat{\Theta}$.

El error cuadrático medio es un criterio importante para comparar dos estimadores. Sean $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ dos estimadores del parámetro θ, y $\text{ECM}(\hat{\Theta}_1)$ y $\text{ECM}(\hat{\Theta}_2)$ los errores cuadráticos medios de $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$. Entonces, la **eficiencia relativa** de $\hat{\Theta}_2$ con respecto a $\hat{\Theta}_1$ se define como

$$\frac{\text{ECM}(\hat{\Theta}_1)}{\text{ECM}(\hat{\Theta}_2)} \tag{6-4}$$

Si la eficiencia relativa es menor que uno, entonces puede concluirse que $\hat{\Theta}_1$ es un estimador más eficiente de θ que $\hat{\Theta}_2$, en el sentido de que tiene un error cuadrático medio más pequeño.

Por ejemplo, supóngase que se desea estimar la media μ de una población. Se tiene una muestra aleatoria de n observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y se quiere comparar dos estimadores posibles de μ: la media muestral $\overline{X}$ y una observación de la muestra, por ejemplo X_i. Nóte-

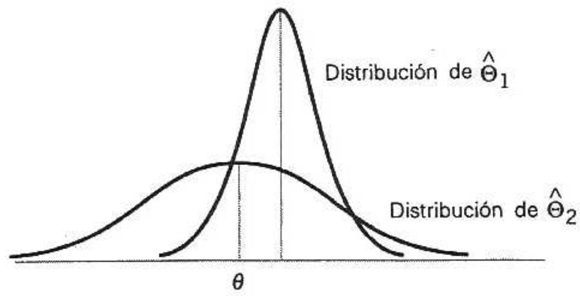


Figura 6-3 Estimador sesgado $\hat{\Theta}_1$ que tiene una varianza más pequeña que el estimador insesgado $\hat{\Theta}_2$.

se que $\overline{X}$ y X_i son estimadores insesgados de μ; en consecuencia, el error cuadrático medio de ambos estimadores es simplemente la varianza. Para la media muestral, se tiene que, de la ecuación 5-36, $\text{ECM}(\overline{X}) = V(\overline{X}) = \sigma^2/n$. Por consiguiente, la **eficiencia relativa** de X_i con respecto a $\overline{X}$ es

$$\frac{\text{ECM}(\hat{\Theta}_1)}{\text{ECM}(\hat{\Theta}_2)} = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2} = \frac{1}{n}$$

Puesto que $(1/n) < 1$ para muestras de tamaño $n \geq 2$, puede concluirse que la media muestral es un mejor estimador de μ que una sola observación X_i.

A veces se encuentra que es preferible utilizar estimadores sesgados que estimadores insesgados, ya que tienen un error cuadrático menor. Es decir, es posible reducir de manera considerable la varianza del estimador mediante la introducción de un sesgo relativamente pequeño. Ya que la reducción en la varianza es mayor que el cuadrado del sesgo, se obtiene un estimador mejorado desde el punto de vista del error cuadrático medio. Por ejemplo, la figura 6-3 presenta la distribución de probabilidad de un estimador sesgado $\hat{\Theta}_1$ que tiene una varianza más pequeña que el estimador insesgado $\hat{\Theta}_2$. Un estimado que se basa en $\hat{\Theta}_1$ puede estar más cerca del valor real de θ que el basado en $\hat{\Theta}_2$. En el capítulo 10 se presenta una aplicación de la estimación sesgada, al momento de estudiar el análisis de regresión.

Un estimador $\hat{\Theta}$ que tiene un error cuadrático medio menor o igual que el error cuadrático medio de cualquier otro estimador, para todos los valores del parámetro θ, recibe el nombre de **estimador óptimo** de θ. La existencia de este tipo de estimadores es rara.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6-3

6-1. Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño $2n$ tomada de una población X, que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Sean

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i \quad \text{y} \quad \overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

dos estimadores de μ. ¿Cuál es el mejor estimador de μ? Explique su elección.

6-2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_7}{7}$$

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}$$

a. ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?

b. ¿Cuál estimador es el "mejor"? ¿En qué sentido es mejor?

6-3. Suponga que $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son estimadores insesgados del parámetro θ. Se sabe que $V(\hat{\Theta}_1) = 10$ y $V(\hat{\Theta}_2) = 4$. ¿Cuál estimador es "mejor" y en qué sentido lo es?

6-4. Calcule la eficiencia relativa de los dos estimadores del ejercicio 6-2.

6-5. Calcule la eficiencia relativa de los dos estimadores del ejercicio 6-3.

6-6. Suponga que $\hat{\Theta}_1$ y $\hat{\Theta}_2$ son estimadores del parámetro θ. Se sabe que $E(\hat{\Theta}_1) = \theta$, $E(\hat{\Theta}_2) = \theta/2$, $V(\hat{\Theta}_1) = 10$, $V(\hat{\Theta}_2) = 4$. ¿Qué estimador es "mejor"? ¿En qué sentido lo es?

6-7. Suponga que $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$ y $\hat{\Theta}_3$ son estimadores de θ. Se sabe que $E(\hat{\Theta}_1) = E(\hat{\Theta}_2) = \theta$, $E(\hat{\Theta}_3) \neq \theta$, $V(\hat{\Theta}_1) = 12$, $V(\hat{\Theta}_2) = 10$ y $E(\hat{\Theta}_3 - \theta)^2 = 6$. Haga una comparación de estos tres estimadores. ¿Cuál prefiere? ¿Por qué?

6-8. De una población que tiene media μ y varianza σ^2, se toman tres muestras aleatorias de tamaños $n_1 = 20$, $n_2 = 10$ y $n_3 = 8$. Sean S_1^2, S_2^2, S_3^2 las varianzas muestrales. Demuestre que $S^2 = (20S_1^2 + 10S_2^2 + 8S_3^2)/38$ es un estimador insesgado de σ^2.

6-9.
a. Demuestre que $\Sigma_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2/n$ es un estimador sesgado de σ^2.

b. Determine la magnitud del sesgo en el estimador.

c. ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño n de la muestra?

6-10. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n.

a. Demuestre que $\overline{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.

b. Determine la magnitud del sesgo en este estimador.

c. ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño n de la muestra?

6-4 MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Uno de los mejores métodos para obtener un estimador puntual de un parámetro es el método de máxima verosimilitud. Tal como su nombre lo implica, el estimador será el valor del parámetro que maximiza la **función de verosimilitud**.

Definición

Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x, \theta)$, donde θ es un parámetro desconocido. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los valores observados en una muestra aleatoria de tamaño n. La **función de verosimilitud** de la muestra es

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) \tag{6-5}$$

Nótese que la función de verosimilitud es ahora una función del parámetro desconocido θ. El **estimador de máxima verosimilitud** de θ es el valor de θ que maximiza la función de verosimilitud $L(\theta)$.

En el caso de una variable aleatoria discreta, la interpretación de la función de verosimilitud es clara. La función de verosimilitud de la muestra $L(\theta)$ es precisamente la probabilidad

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

Esto es, $L(\theta)$ es la probabilidad de obtener los valores muestrales $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Por tanto, en el caso discreto, el estimador de máxima verosimilitud es un estimador que maximiza la probabilidad de ocurrencia de los valores muestrales.

EJEMPLO 6-2

Sea X una variable aleatoria de Bernoulli. La función de probabilidad es

$$f_X(x; p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde p es el parámetro por estimar. La función de verosimilitud de una muestra de tamaño n es

$$\begin{aligned} L(p) &= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}\ldots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\ &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

Se observa que si $\hat{p}$ maximiza $L(p)$, entonces $\hat{p}$ también maximiza $ln\, L(p)$. Por consiguiente,

$$ln\, L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln\, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-p)$$

Ahora bien,

$$\frac{d\,ln\,L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{1 - p}$$

Al igualar a cero la expresión anterior y resolver para p, se tiene que $\hat{p} = (1/n)\ \Sigma_{i=1}^{n}\ x_i$. En consecuencia, el estimador de máxima verosimilitud de p es

$$\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Supóngase que este estimador se aplica en la siguiente situación: se eligen al azar n objetos de una línea de producción, y cada uno se clasifica como defectuoso (en cuyo caso $x_i = 1$) o no defectuoso (en cuyo caso $x_i = 0$). Entonces $\Sigma_{i=1}^{n}\ x_i$ es el número de objetos defectuosos en la muestra, y $\hat{p}$ es la **proporción de objetos defectuosos en la muestra.** El parámetro p es la **proporción de objetos defectuosos en la población**; de manera intuitiva, parece razonable utilizar $\hat{p}$ como a un estimado de p.

Si bien la interpretación de la función de verosimilitud dada anteriormente está confinada al caso de una variable aleatoria discreta, el método de máxima verosimilitud puede extenderse con facilidad a una distribución continua. A continuación se proporciona un ejemplo de estimación de máxima verosimilitud para la distribución normal.

EJEMPLO 6-3

Sea X una variable aleatoria con distribución normal, con μ desconocida y varianza σ^2 conocida. La función de verosimilitud de una muestra de tamaño n es

$$\begin{aligned} L(\mu) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(1/2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$ln\,L(\mu) = -(n/2)ln(2\pi\sigma^2) - (2\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

y

$$\frac{d\,ln\,L(\mu)}{d\mu} = (\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)$$

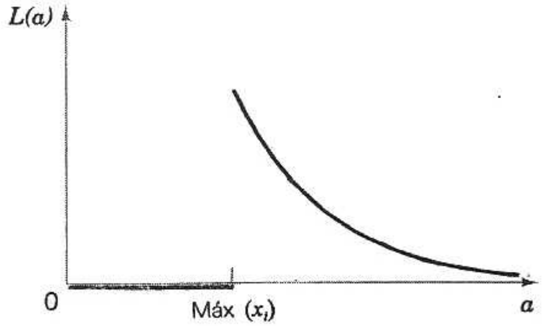


Figura 6-4 Función de verosimilitud para la distribución uniforme del ejemplo 6-4.

Al igualar con cero este último resultado y resolver para μ, se tiene que

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}$$

Por tanto, la media muestral es el estimador de máxima verosimilitud de μ.

A menudo el método de máxima verosimilitud es el método de estimación que más prefieren los matemáticos estadísticos, ya que usualmente es más fácil de utilizar y produce estimadores con buenas propiedades estadísticas. Sin embargo, a veces se presentan algunas dificultades. Por ejemplo, no siempre es fácil maximizar la función de verosimilitud debido a que puede ser difícil resolver la ecuación obtenida a partir de $d\,L(\theta)/d\,\theta = 0$. Por otra parte, no siempre es posible utilizar de manera directa los métodos de cálculo para determinar el máximo de $L(\theta)$. Esta situación se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6-4

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo desde 0 hasta a. Puesto que la función de densidad es $f(x) = 1/a$ para $0 \leq x \leq a$, y cero para cualquier otro valor, la función de verosimilitud de una muestra aleatoria de tamaño n es

$$L(a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a} = \frac{1}{a^n}$$

si $0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq a, \ldots, 0 \leq x_n \leq a$. Nótese que la pendiente de esta función no es cero en todo el intervalo. Esto es, siempre y cuando máx $(x_i) \leq a$, la verosimilitud es $1/a^n$, que es positiva, pero cuando $a <$ máx(x_i), la verosimilitud cae a cero, tal como se ilustra en la figura 6-4. Por consiguiente, no es posible utilizar de manera directa los métodos de cálculo debido a que el valor máximo de la función de verosimilitud se presenta en un punto de discontinuidad. Sin embargo, puesto que $d/da\ a^{-n} = -n/a^{n+1}$ es menor que cero para todos los valores de $a > 0$, a^{-n} es una función decreciente de a. Esto implica que el máximo de la función de verosimilitud $L(a)$ se presenta en el extremo izquierdo del intervalo. La figura indica de manera clara que es posible maximizar $L(a)$ haciendo $\hat{a}$ igual al

valor más pequeño que puede tomar de manera lógica, y que es máx (x_i). Es evidente que a **no puede ser** más pequeño que la observación más grande en la muestra, de modo que **resulta** razonable hacer $\hat{a}$ igual a este valor.

El método de máxima verosimilitud puede emplearse en situaciones donde existen varios parámetros desconocidos (por ejemplo, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, que es necesario estimar. En tales casos, la función de verosimilitud es una función de los k parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, y los estimadores de máxima verosimilitud $\{\hat{\Theta}_i\}$ se obtienen al igualar con cero las k derivadas parciales $\partial L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)/\partial \theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, y resolver el sistema de ecuaciones resultante.

EJEMPLO 6-5

Sea X una variable aleatoria con distribución normal, media μ y varianza σ^2, donde μ y σ^2 son desconocidas. La función de verosimilitud para una muestra aleatoria de tamaño n es

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(1/2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

y

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Las soluciones de la ecuación anterior proporcionan los estimadores de máxima verosimilitud

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Los estimadores de máxima verosimilitud no son necesariamente insesgados. Por ejemplo, nótese que el estimador de máxima verosimilitud para la σ^2 del ejemplo 6-5 no es el estimador insesgado S^2. De hecho, es fácil demostrar que

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

El sesgo es

$$E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2$$

$$= \frac{-\sigma^2}{n}$$

Dado que el sesgo es negativo, $\hat{\sigma}^2$ tiende a subestimar la verdadera varianza σ^2. Nótese que el sesgo tiende a cero a medida que n aumenta.

En general, para muestras grandes, los estimadores de máxima verosimilitud tienen buenas propiedades *asintóticas*. De manera específica, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\Theta}$ de cualquier parámetro θ es insesgado para n grande, y tiene una varianza casi tan pequeña como la que puede obtenerse con otro estimador. Esto implica que el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\Theta}$ es, de manera aproximada, el estimador insesgado de varianza mínima de θ para n grande.

Los estimadores de máxima verosimilitud también tienen una *propiedad de invarianza.* Esto es, si $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_k$, son los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, entonces el estimador de máxima verosimilitud de cualquier función $h(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ de estos parámetros, es la misma función $h(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_k)$ de los estimadores $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_k$.

EJEMPLO 6-6

En el caso de la distribùción normal, los estimadores de máxima verosimilitud de μ y s^2 eran $\hat{\mu} = \overline{X}$ y $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2/n$. Para obtener el estimador de máxima verosimilitud de la función $h(\mu, s^2) = \sqrt{\sigma^2} = s$, se sustituyen los estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ en la función h, con lo que se tiene que

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{1/2}$$

Es así como el estimador de máxima verosimilitud de la desviación estándar σ *no* es la desviación estándar muestral S.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6-4

6-11. Considere la distribución Poisson

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

6-12. Considere la distribución exponencial

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

6-13 Sea X una variable aleatoria geométrica con parámetro p. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de p, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

6-14 Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha + 1)x^{\alpha}, & 0 < x < 1 \\ 0 \quad , & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de α, basado en una muestra de tamaño n.

6-15 Considere la distribución Weibull

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\delta}\left(\dfrac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}}, & 0 < x \\ 0 \quad , & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a. Encuentre la función de verosimilitud basada en una muestra de tamaño n. Encuentre el log de la verosimilitud.

b. Demuestre que el log de la verosimilitud queda maximizado al resolver las ecuaciones

$$\beta = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} \, ln(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} ln\,(x_i)}{n} \right]^{-1}$$

$$\delta = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}}{n} \right]^{1/\beta}$$

c. ¿Qué complicaciones hay detrás de la solución de las dos ecuaciones de la parte **b**)?

6-16 Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tomada de una distribución gamma con parámetros r y λ.

a. Encuentre la función y el log de la verosimilitud.

b. Encuentre las ecuaciones que definen los estimadores de máxima verosimilitud para r y λ. ¿Pueden resolverse de manera explícita?

c. Demuestre que el estimador de máxima verosimilitud de $\mu = r/\lambda$ es $\hat{\mu} = \overline{X}$.

6-17 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias distribuidas de manera uniforme sobre el intervalo desde 0 hasta a. Recuerde que el estimador de máxima verosimilitud de a es $\hat{a}$ = máx (X_i).

a. Arguya intuitivamente de por qué $\hat{\alpha}$ no puede ser un estimador insesgado de a.

b. Suponga que $E(\hat{a}) = na/(n+1)$. ¿Es razonable que $\hat{a}$ subestime de manera consistente a a? Demuestre que el sesgo en el estimador tiende a cero a medida que n se vuelve más grande.

c. Proponga un estimador insesgado para a.

d. Sea $Y = \text{máx}\,(X_i)$. Utilice el hecho de que $Y \leq y$ si y sólo si cada $X_i \leq y$ para obtener la función de distribución acumulativa de Y. Luego demuestre que la función de densidad de probabilidad de Y es

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{ny^{n-1}}{a^n}, & 0 \leq y \leq a \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Utilice este resultado para demostrar que el estimador de máxima verosimilitud para a es sesgado.

6-5 DISTRIBUCIONES DE MUESTREO

La inferencia estadística tiene que ver con la toma de decisiones sobre una población, con base en la información contenida en una muestra aleatoria de ésta. Por ejemplo, supóngase que se tiene interés en el volumen promedio de un envase de refresco. Se requiere que el volumen promedio de la población sea 300 ml. Un ingeniero toma una muestra aleatoria de 25 envases y calcula el volumen promedio en la muestra, el cual resulta ser $\bar{x} = 298$ ml. Es probable que el ingeniero decida que la media de la población es $\mu = 300$ ml, a pesar de que la media de la muestra es 298 ml, ya que sabe que la media muestral es un estimador razonable de μ y que es muy probable obtener una media muestral de 298 ml, incluso si la media verdadera de la población es $\mu = 300$ ml. De hecho, si la media verdadera es 300 ml, entonces la prueba puede repetirse con 25 envases, quizás cada cinco minutos, lo que producirá valores de $\bar{x}$ que estarán por encima y por debajo de $\mu = 300$ ml.

La media muestral es una estadística; esto es, una variable aleatoria que depende de los resultados obtenidos en cada muestra particular. Dado que una estadística es una variable aleatoria, entonces tiene una distribución de probabilidad.

> **Definición**
>
> La distribución de probabilidad de una estadística recibe el nombre de **distribución de muestreo.**

Por ejemplo, la distribución de probabilidad de $\overline{X}$ se conoce como **distribución de muestreo de la media.**

La distribución de muestreo de una estadística depende de la distribución de la población, del tamaño de la muestra y del método utilizado para seleccionar ésta. Las secciones siguientes de este capítulo presentan algunas de las distribuciones de muestreo más importantes. Las aplicaciones de estas distribuciones serán ilustradas de manera extensa en capítulos posteriores.

6-6 DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO DE MEDIAS

Considérese la determinación de la distribución de muestreo de la media muestral $\overline{X}$. Supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal con media μ y varianza σ^2. Cada observación en esta muestra (por ejemplo, $X_1, X_2, \ldots, X_n$) es una variable aleatoria distribuida normal e independientemente, con media μ y varianza σ^2. Entonces, por la propiedad reproductiva de la distribución normal, ecuación 5-37 del capítulo 5, se concluye que la media muestral

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

tiene una distribución normal con media

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{\mu + \mu + \cdots + \mu}{n} = \mu$$

y varianza

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Si se muestrea una población que tiene una distribución de probabilidad desconocida, la distribución de muestreo de la media muestral seguirá siendo aproximadamente normal con media μ y varianza σ^2/n, si el tamaño de la muestra n es grande. Éste es uno de los teoremas más útiles en estadística; se le conoce como **teorema del límite central.** La proposición es la siguiente:

Teorema 6-1: Teorema del límite central

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población (finita o infinita) con media μ y varianza finita σ^2, y si $\overline{X}$ es la media muestral, entonces la forma límite de la distribución de

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{6-6}$$

cuando $n \to \infty$, es la distribución normal estándar.

La aproximación normal para $\overline{X}$ depende del tamaño n de la muestra. La figura 6-5*a* presenta la distribución obtenida para los lanzamientos de un dado legal de seis caras. Las probabilidades son iguales (1/6) para todos los valores obtenidos, 1, 2, 3, 4, 5 o 6. La figura 6-5*b* presenta la distribución del puntaje promedio obtenido cuando se lanzan dos dados, y las figuras 6-5*c*, 6-5*d* y 6-5*e* contienen las distribuciones de los puntajes promedio obtenidos cuando se lanzan tres, cinco y diez dados, respectivamente. Nótese que, si bien la población (un dado) está relativamente lejos de ser normal, la distribución de los promedios queda aproximada, de manera razonablemente buena, por la distribución normal, incluso

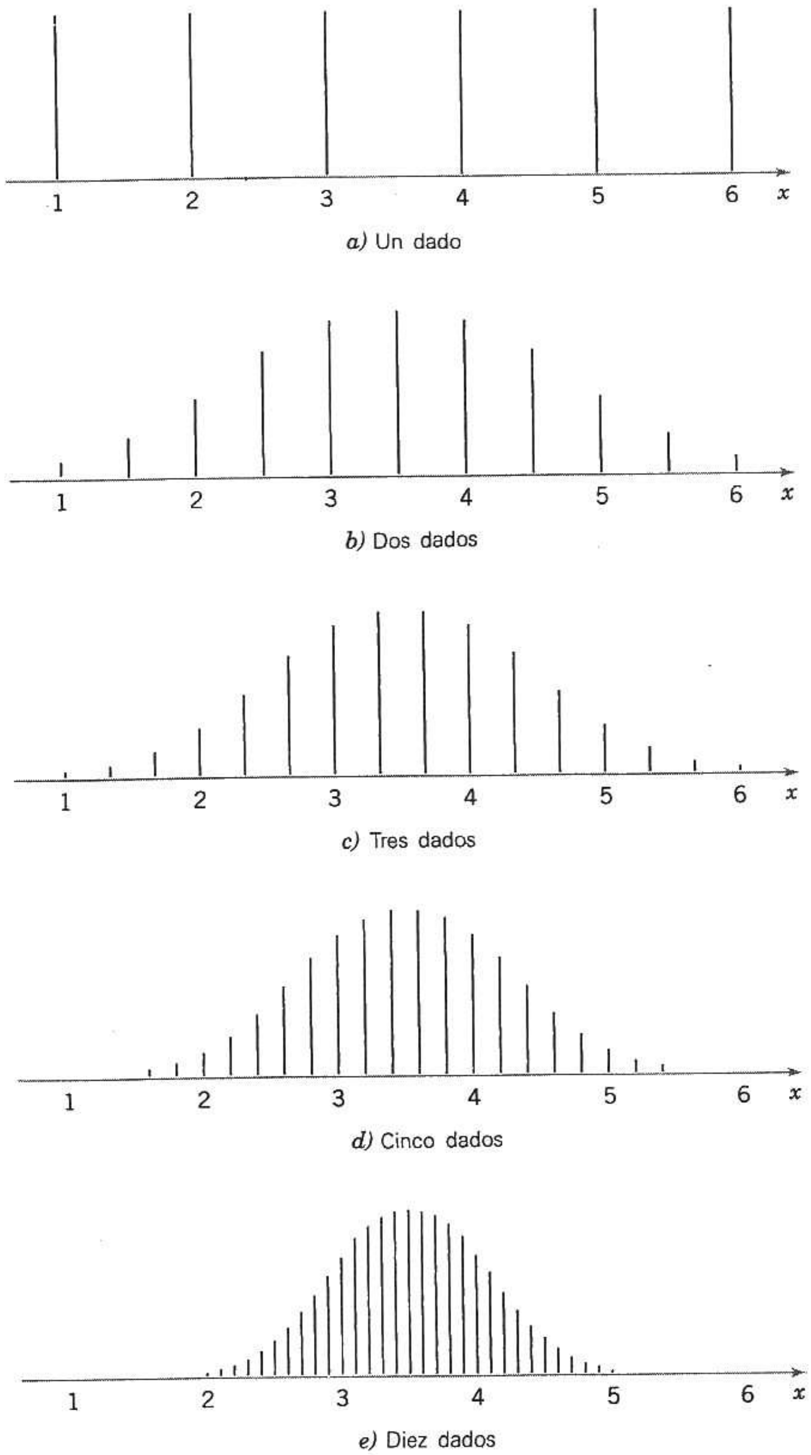


Figura 6-5 Distribuciones de puntajes promedio provenientes de un experimento de lanzamiento de dados. [Adaptado con autorización de Box, Hunter y Hunter (1978).]

para tamaños de muestra tan pequeños como cinco. (Sin embargo, las distribuciones de los lanzamientos son discretas, mientras que la normal es continua.) Aunque, en muchos casos, el teorema del límite central funciona bien para muestras pequeñas ($n = 4, 5$), en particular donde la población es continua, unimodal y simétrica, en otras situaciones se requieren

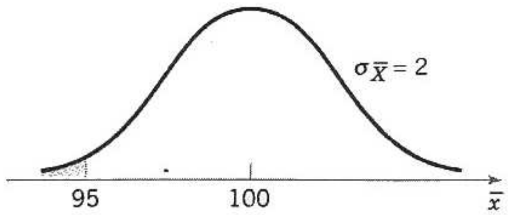


Figura 6-6 Probabilidad del ejemplo 6-7.

muestras grandes, dependiendo de la forma que tenga la población. En muchos casos de interés práctico, si $n \geq 30$, la aproximación normal será satisfactoria sin importar cuál sea la forma de la población. Si $n < 30$, el teorema del límite central funciona si la distribución de la población no está mucho muy alejada de una distribución normal.

EJEMPLO 6-7

Una compañía de electrónica fabrica resistores que tienen una resistencia promedio de 100 Ω y una desviación estándar de 10 Ω. La distribución de la resistencia es normal. Encuéntrese la probabilidad de que al tomar una muestra de $n = 25$ resistores, la resistencia promedio de éstos será menor que 95 Ω.

Nótese que la distribución de muestreo de $\overline{X}$ es normal, con media $\mu_{\overline{X}} = 100\ \Omega$ y desviación estándar de

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2.$$

Por consiguiente, la probabilidad deseada corresponde al área sombreada de la figura 6-6. Al estandarizar el punto $\overline{X} = 95$ en la figura 6-6, se tiene que

$$z = \frac{95 - 100}{2} = -2.5$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} P(\overline{X} < 95) &= P(Z < -2.5) \\ &= 0.0062 \end{aligned}$$

El ejemplo que sigue hace uso del teorema del límite central.

EJEMPLO 6-8

Supóngase que una variable aleatoria X tiene la distribución uniforme continua

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 4 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encuentre la distribución de la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño $n = 40$.

La media y la varianza de X son $\mu = 5$ y $\sigma^2 = (6 - 4)^2/12 = 1/3$. El teorema del límite central indica que la distribución de $\overline{X}$ es aproximadamente normal con media $\mu_{\overline{X}} = 5$ y varianza $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n = 1/[3(40)] = 1/120$. La figura 6-7 presenta las distribuciones de X y $\overline{X}$.

Definición

El **error estándar** de una estadística es la desviación estándar de su distribución de muestreo. Si el error estándar involucra parámetros desconocidos cuyos valores pueden estimarse, la sustitución de estas estimaciones en el error estándar da como resultado un **error estándar estimado.**

El error estándar da alguna idea sobre la **precisión de la estimación**. Por ejemplo, si la media muestral $\overline{X}$ se utiliza como estimador puntual de la media de la población μ, el error estándar de $\overline{X}$ mide cuán precisamente $\overline{X}$ estima a μ.

Supóngase que se muestrea una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Ahora la distribución de $\overline{X}$ es normal con media μ y varianza σ^2/n, de modo que el error estándar de $\overline{X}$ es

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si no se sabe qué valor tiene σ pero se sustituye la desviación estándar muestral s en la ecuación anterior, entonces el error estándar estimado de $\overline{X}$ es

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

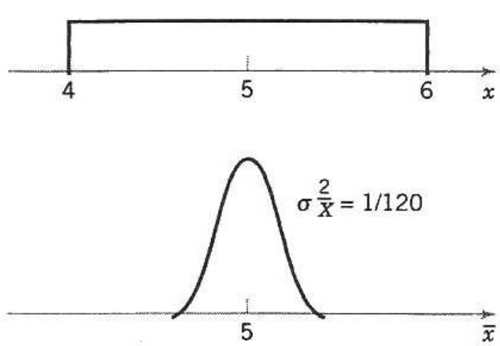


Figura 6-7 Distribuciones de X y $\overline{X}$ para el ejemplo 6-8.

EJEMPLO 6-9

Un artículo publicado en el *Journal of Heat Transfer* (Trans. ASME, Ses. C, 96, 1974, pág. 59) describe un nuevo método para medir la conductividad térmica del hierro Armco. Al utilizar una temperatura de 100°F y una potencia de entrada de 550 W, se obtienen las diez mediciones siguientes de conductividad térmica (en Btu/hr-ft-°F):

41.60, 41.48, 42.34, 41.95, 41.86,
42.18, 41.72, 42.26, 41.81, 42.04

Una estimación puntual de la conductividad térmica promedio a 100°F y 550 W es la media muestral o

$$\bar{x} = 41.924 \text{ Btu/hr-ft-°F}$$

El error estándar de la media muestral es $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, y dado que σ es desconocido, puede remplazarse por la desviación estándar muestral $s = 0.284$ para obtener el error estándar estimado de $\bar{X}$ como

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0.284}{\sqrt{10}} = 0.0898$$

Nótese que el error estándar es alrededor de 0.2% de la media muestral, lo que implica que se ha obtenido una estimación puntual relativamente precisa de la conductividad térmica.

Ahora considérese el caso donde se tienen dos poblaciones. Supóngase que la primera población tiene una media μ_1 y una varianza σ_1^2, mientras que la segunda población tiene una media μ_2 y una varianza σ_2^2. Supóngase, además, que ambas poblaciones están normalmente distribuidas. Entonces, utilizando el hecho de que las combinaciones lineales de variables aleatorias normales independientes siguen una distribución normal (véase la ecuación 5-37), puede afirmarse que la distribución de muestreo de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ es normal con media

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} \\ &= \mu_1 - \mu_2 \end{aligned} \tag{6-7}$$

y varianza

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} \\ &= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \end{aligned} \tag{6-8}$$

Si las dos poblaciones no están distribuidas de manera normal, pero el tamaño de ambas muestras n_1 y n_2 es mayor que 30, entonces puede emplearse el teorema del límite central y suponer que $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ siguen, de manera aproximada, distribuciones normales independientes. Por tanto, la distribución de muestreo de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ es aproximadamente normal con media y varianza dadas por las ecuaciones 6-7 y 6-8, respectivamente. Si n_1 o n_2 es menor que 30, entonces la distribución de muestreo de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ seguirá siendo aproximadamente normal, con media y varianza dadas por las ecuaciones 6-7 y 6-8, siempre y cuando la población de la que se toma la muestra pequeña no se aleje de manera importante de la población normal. Lo anterior puede resumirse con la siguiente definición.

Definición

Si se tienen dos poblaciones independientes con medias μ_1 y μ_2, y varianzas σ_1^2 y σ_2^2, y si $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ son las medias muestrales de dos muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 de estas poblaciones, entonces la distribución de muestreo de

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \tag{6-9}$$

es aproximadamente normal estándar, si se aplican las condiciones del teorema del límite central. Si las dos poblaciones son normales, entonces la distribución de muestreo de Z es, de manera exacta, normal estándar.

EJEMPLO 6-10

La vida eficaz de un componente utilizado en la turbina de una aeronave es una variable aleatoria con media 5000 horas y desviación estándar de 40 horas. La distribución de la vida eficaz es muy próxima a una distribución normal. El fabricante de la turbina introduce una mejora en el proceso de fabricación de este componente, que aumenta el tiempo de vida útil promedio a 5050 horas y disminuye la desviación estándar a 30 horas. Supóngase que se toma del proceso "antiguo" una muestra aleatoria de $n_1 = 16$ componentes, y una muestra aleatoria del proceso "mejorado" de $n_2 = 25$ componentes. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre las dos medias muestrales $\overline{X}_2 - \overline{X}_1$ sea al menos 25 horas? Supóngase que los procesos antiguo y mejorado pueden considerarse como poblaciones independientes.

Para resolver este problema, primero hay que notar que la distribución de $\overline{X}_1$ es normal con media $\mu_1 = 5000$ horas y desviación estándar $\sigma_1/\sqrt{n_1} = 40/\sqrt{16} = 10$ horas, y que la distribución de $\overline{X}_2$ es normal con media $\mu_2 = 5050$ horas y desviación estándar $\sigma_2/\sqrt{n_2} = 30/\sqrt{25} = 6$ horas. Ahora bien, la distribución de $\overline{X}_2 - \overline{X}_1$ es normal con media $\mu_2 - \mu_1 = 5050 - 5000 = 50$ horas y varianza $\sigma_2^2/n_2 + \sigma_1^2/n_1 = (6)^2 + (10)^2 = 136$ horas^2. La figura 6-8 contiene una gráfica de esta distribución de muestreo. La probabilidad de que $\overline{X}_2 - \overline{X}_1 \geq 25$ corresponde a la parte sombreada de la distribución normal de esta figura.

Correspondiente al valor $\overline{x}_2 - \overline{x}_1 = 25$ de la figura 6-8, se tiene que

$$z = \frac{25 - 50}{\sqrt{136}} = -2.14$$

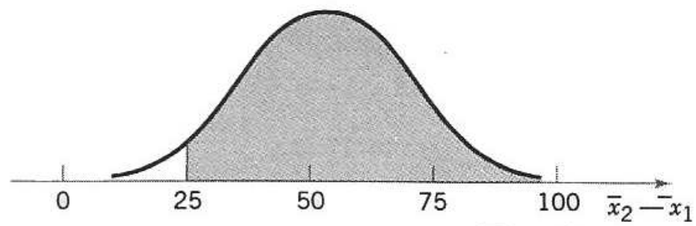


Figura 6-8 Distribución de muestreo de $\overline{X}_2 - \overline{X}_1$ del ejemplo 6-10.

con lo que se llega a

$$P(\overline{X}_2 - \overline{X}_1 \geq 25) = P(Z \geq -2.14)$$
$$= 0.9838$$

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 6-6

6-18. Se fabrica tubería PVC con un diámetro promedio de 1.01 in y desviación estándar de 0.003 in. Encuentre la probabilidad de que en una muestra aleatoria de $n = 9$ secciones de tubería, el diámetro promedio de la muestra sea mayor que 1.009 in y menor que 1.012 in.

6-19. Suponga que se toman muestras aleatorias de tamaño $n = 25$ de una población normal con media 100 y desviación estándar 10. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral se encuentre dentro del intervalo de $\mu_{\overline{X}} - 1.8\sigma_{\overline{X}}$ a $\mu_{\overline{X}} + 1.0\sigma_{\overline{X}}$?

6-20. En la fabricación de una alfombra se utiliza una fibra sintética con una resistencia a la tensión que tiene una distribución normal con media 75.5 psi y desviación estándar 3.5 psi. Encuentre la probabilidad de que en una muestra aleatoria de $n = 6$ especímenes de fibra, la media de la resistencia a la tensión en la muestra sea mayor que 75.75 psi.

6-21. Considere la fibra sintética del ejercicio anterior. ¿Cómo cambia la desviación estándar de la media muestral cuando el tamaño de la muestra aumenta desde $n = 6$ hasta $n = 49$?

6-22. La resistencia a la compresión del concreto tiene una media de 2500 psi y una desviación estándar de 50 psi. Encuentre la probabilidad de que la media muestral de una muestra aleatoria de $n = 5$ especímenes esté en el intervalo de 2499 a 2510 psi.

6-23. Considere los especímenes de concreto del ejemplo anterior. ¿Cuál es el error estándar de la media muestral?

6-24. Una población normal tiene una media de 100 y una varianza de 25. ¿De qué tamaño debe ser la muestra aleatoria que se tome de esta población para que el error estándar del promedio de la muestra sea 1.5?

6-25. Suponga que la variable aleatoria X tiene la distribución uniforme continua

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Suponga que se toma una muestra aleatoria de $n = 12$ observaciones de esta distribución. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de $\overline{X} - 6$? Encuentre la media y la varianza de esta cantidad.

6-26. Suponga que X tiene una distribución uniforme discreta

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

De esta población se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$. Encuentre la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 2.1 pero menor que 2.5. Suponga que la media muestral puede medirse hasta la décima más cercana.

6-27. El tiempo que un pasajero invierte esperando en un punto de revisión de un aeropuerto es una variable aleatoria con media de 8.2 minutos y desviación estándar de 1.5 minutos. Suponga que se observa una muestra aleatoria de $n = 49$ pasajeros. Encuentre la probabilidad de que el tiempo de espera promedio en la fila para estos clientes sea

a. Menor que 10 minutos

b. Entre 5 y 10 minutos

c. Menor que 6 minutos

6-28. Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n_1 = 16$ de una población normal que tiene una media de 75 y una desviación estándar de 8. De otra población normal se toma una muestra aleatoria de tamaño $n_2 = 9$; esta población tiene una media de 70 y una desviación estándar de 12. Sean $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ las medias de cada muestra, respectivamente. Encuentre

a. La probabilidad de que $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ sea mayor que cuatro.

b. La probabilidad de que $3.5 \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \leq 5.5$.

6-29. Una compañía que vende artículos electrónicos compara la brillantez de dos tipos diferentes de cinescopios para su uso en televisores. El cinescopio de tipo A tiene una brillantez promedio de 100 con una desviación estándar de 16, mientras que el cinescopio de tipo B tiene una brillantez promedio desconocida, pero se supone que la desviación estándar es la misma que la del cinescopio de tipo A. Se toma una muestra aleatoria de $n = 25$ cinescopios de cada tipo y se calcula $\overline{X}_B - \overline{X}_A$. Si μ_B es igual o mayor que μ_A, el fabricante adoptará el cinescopio de tipo B para utilizarlo en los televisores que fabrica. La diferencia observada es $\bar{x}_B - \bar{x}_A = 3.5$. ¿Qué decisión tomará el fabricante y por qué?

6-30. La elasticidad de un polímero es afectada por la concentración de un reactivo. Cuando se utiliza una concentración baja, la elasticidad promedio verdadera es 55, mientras que cuando se emplea una concentración alta, la elasticidad promedio es 60. La desviación estándar de la elasticidad es 4, sin importar cuál sea la concentración. Si se toman dos muestras aleatorias de tamaño 16, encuentre la probabilidad de que $\overline{X}_{\text{alta}} - \overline{X}_{\text{baja}} \geq 2$.

6-7 DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADA

La distribución ji-cuadrada es una de las distribuciones de muestreo con mayor utilidad. Está definida en términos de variables aleatorias normales.

Teorema 6-2

Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ variables aleatorias distribuidas normal e independientemente, con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$. Entonces, la variable aleatoria

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$$

tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2}, \qquad \text{para } x > 0 \tag{6-10}$$

y se dice que sigue una distribución ji-cuadrada con k grados de libertad, lo que se abrevia como χ_k^2.

Esta distribución fue mencionada en el capítulo 4 como un caso especial de la distribución gamma.

La media y la varianza de la distribución χ_k^2 son

$$\mu = k \tag{6-11}$$

y

$$\sigma^2 = 2k \tag{6-12}$$

La figura 6-9 presenta varias distribuciones ji-cuadrada. Estas distribuciones se dibujaron utilizando el procedimiento de graficación del paquete Statgraphics. Nótese que la variable aleatoria ji-cuadrada es no negativa, y que la distribución de probabilidad tiene un sesgo hacia la derecha. Sin embargo, a medida que k aumenta, la distribución se vuelve más simétrica. Conforme $k \to \infty$, la forma límite de la distribución ji-cuadrada es la distribución normal.

Los **puntos críticos** de la distribución χ_k^2 están dados en la tabla III del apéndice. Se define $\chi_{\alpha,k}^2$ como el punto o valor crítico de la variable aleatoria ji-cuadrada con k grados de libertad tal que la probabilidad de que X sea mayor que este valor es α. Esto es,

$$P(X > \chi_{\alpha,k}^2) = \int_{\chi_{\alpha,k}^2} f(u)\,du = \alpha$$

Esta probabilidad aparece como el área sombreada en la figura 6-10. Para ilustrar el empleo de la tabla III, nótese que las áreas α son los encabezados de las columnas, y que los grados de libertad k aparecen en la columna izquierda. Por tanto, el valor de χ^2 con 10 grados de libertad que tiene un área (probabilidad) de 0.05 a la derecha es $\chi_{0.05,10}^2 = 18.31$. A menudo este valor recibe el nombre de punto crítico superior del 5% de la distribución ji-cuadrada

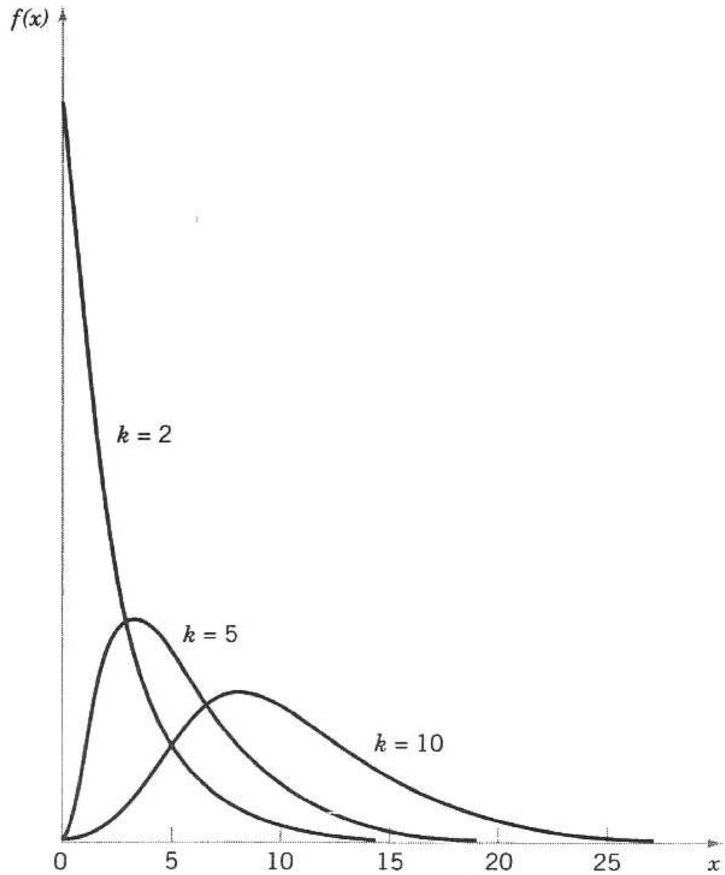


Figura 6-9 Funciones de densidad de probabilidad de varias distribuciones χ^2.

con diez grados de libertad. Todo esto puede escribirse como una proposición de probabilidad, de la siguiente manera:

$$P(X > \chi^2_{0.05,10}) = P(X > 18.31) = 0.05$$

Al igual que la distribución normal, la ji-cuadrada tiene una propiedad aditiva importante.

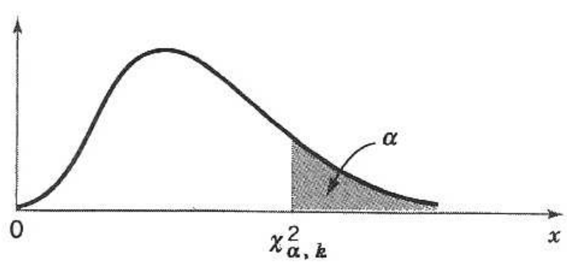


Figura 6-10 Punto crítico $\chi^2_{\alpha,k}$ de la distribución χ^2.

Teorema 6-3: Teorema de aditividad de la distribución ji-cuadrada

Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ variables aleatorias ji-cuadrada independientes con $k_1, k_2, \ldots, k_p$ grados de libertad, respectivamente. Entonces, la cantidad

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p$$

sigue una distribución ji-cuadrada con grados de libertad igual a

$$k = \sum_{i=1}^{p} k_i$$

Demostración: Nótese que una variable aleatoria ji-cuadrada con k_i grados de libertad tiene la misma distribución que la suma de cuadrados de k_i variables aleatorias normales estándar e independientes. Por consiguiente

$$Y = \sum_{i=1}^{p} Y_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} Z_{ij}^2$$

y puesto que todas las variables aleatorias Z_{ij} son independientes porque las Y_i son independientes, Y es precisamente la suma de los cuadrados de $k = \sum_{i=1}^{p} k_i$ variables aleatorias normales estándar e independientes. Del teorema 6-3, se sigue que Y es una variable aleatoria ji-cuadrada con k grados de libertad.

EJEMPLO 6-11

Como ejemplo de una variable aleatoria que sigue la distribución ji-cuadrada, supóngase que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria tomada de una población normal, con media μ y varianza σ^2. La función de la varianza muestral

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

está distribuida como χ^2_{n-1}. Esta estadística será empleada de manera extensa en los próximos capítulos. En ellos se verá que como la distribución de muestro de esta cantidad es una ji-cuadrada, entonces es posible construir estimaciones de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis estadísticas sobre la varianza de una población normal.

Para ilustrar de manera heurística por qué la distribución de muestreo de la variable aleatoria $(n-1)S^2/\sigma^2$ tiene una distribución ji-cuadrada, nótese que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \tag{6-13}$$

Si la $\overline{X}$ de la ecuación 6-13 se reemplaza por μ, entonces la distribución de

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

es χ^2_n, debido a que cada término $(X_i - \mu)/\sigma$ es una variable aleatoria normal estándar e independiente. Ahora considérese

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(X_i - \overline{X}) + (\overline{X} - \mu)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - \mu)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(\overline{X} - \mu) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu)^2\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} + \frac{(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2/n}$$

o

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \frac{(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2/n} \tag{6-14}$$

Puesto que $\overline{X}$ tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n, la cantidad $(\overline{X} - \mu)^2/(\sigma^2/n)$ está distribuida como χ^2_1. Por otra parte, puede demostrarse que las variables aleatorias $\overline{X}$ y S^2 son independientes. De hecho, la distribución normal es la única distribución para la que la media y la varianza muestrales para muestras aleatorias son independientes. Por tanto, puesto que $\Sigma_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2/\sigma^2$ está distribuida como χ^2_n, parece lógico utilizar la propiedad de aditividad de la ji-cuadrada (teorema 6-3) y concluir que la distribución de $(n-1)S^2/\sigma^2$ es χ^2_{n-1}.

6-8 DISTRIBUCIÓN *t*

Supóngase que se toma una muestra de una población normal con media μ y varianza σ^2. Si $\overline{X}$ es el promedio de las n observaciones que contiene la muestra aleatoria, entonces la distribución de $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ es una distribución normal estándar. Supóngase que la varianza de la población σ^2 es desconocida. ¿Qué sucede con la distribución de esta estadística si se remplaza σ por S? La distribución t proporciona la respuesta a esta pregunta.

Teorema 6-4

Sea Z una variable aleatoria con distribución $N(0, 1)$ y V una variable aleatoria ji-cuadrada con k grados de libertad. Si Z y V son independientes, entonces la variable aleatoria

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/k}} \tag{6-15}$$

tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)} \cdot \frac{1}{[(x^2/k) + 1]^{(k+1)/2}} \qquad -\infty < x < \infty \tag{6-16}$$

y se dice que sigue la distribución t con k grados de libertad, lo que se abrevia como t_k.

La media y la varianza de la distribución t son $\mu = 0$ y $\sigma^2 = k/(k-2)$ para $k > 2$, respectivamente.

La figura 6-11 presenta la gráfica de varias distribuciones t. La apariencia general de la distribución t es similar a la de la distribución normal estándar: ambas son simétricas y unimodales, y el valor máximo de la ordenada se alcanza en la media $\mu = 0$. Sin embargo, la distribución t tiene colas más amplias que la normal; esto es, la probabilidad de las colas es mayor que en la distribución normal. A medida que el número de grados de libertad $k \to \infty$, la forma límite de la distribución t es la distribución normal estándar. Al visualizar la distribución t, a veces es útil saber que la ordenada de la densidad en la media $\mu = 0$ es aproximadamente entre cuatro o cinco veces mayor que la ordenada de los percentiles 5 y 95. Por ejemplo, con 10 grados de libertad para t, esta relación es 4.8; con 20 grados de libertad es

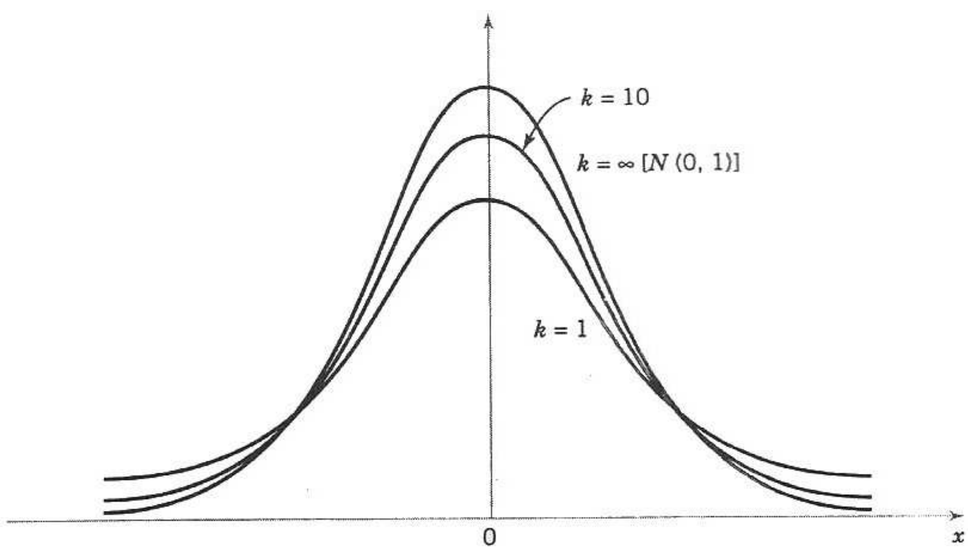


Figura 6-11 Funciones de densidad de probabilidad de varias distribuciones t.

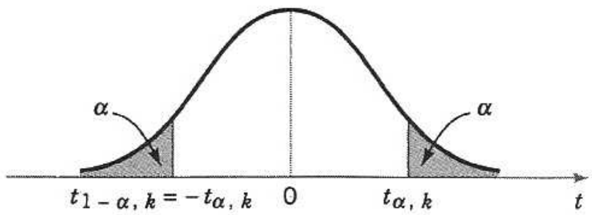


Figura 6-12 Puntos críticos de la distribución t.

de 4.3, y con 30 grados de libertad es 4.1. Por comparación, este factor es 3.9 para la distribución normal.

La tabla IV del apéndice proporciona los **puntos críticos** de la distribución t. Sea $t_{\alpha,k}$ el valor de la variable aleatoria T con k grados de libertad para el que se tiene un área (o probabilidad) α. Por tanto, $t_{\alpha,k}$ es un punto crítico en la cola superior de la distribución t con k grados de libertad. Este punto crítico aparece en la figura 6-12. En la tabla IV del apéndice, los valores de α son los encabezados de las columnas, mientras que los grados de libertad aparecen en la columna de la parte izquierda. Para ilustrar el uso de la tabla, nótese que el valor t con 10 grados de libertad que tiene un área de 0.05 a la derecha es $t_{0.05,10} = 1.812$. Esto es,

$$P(T_{10} > t_{0.05,10}) = P(T_{10} > 1.812) = 0.05$$

Puesto que la distribución t es simétrica con respecto a cero, se tiene que $t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$; esto es, el valor t que corresponde a un área de $1 - \alpha$ a la derecha (y, por tanto, un área α a la izquierda) es igual al negativo del valor t que tiene el área α en la cola derecha de la distribución. En consecuencia, $t_{0.95,10} = -t_{0.05,10} = -1.812$.

EJEMPLO 6-12

Ahora se vuelve a considerar el problema planteado al inicio de esta sección, que es la distribución de muestreo de

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{6-17}$$

Al determinar la distribución de muestreo de esta variable aleatoria, se supondrá que la muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ utilizada para calcular $\overline{X}$ y S se tomó de una distribución normal con media μ y varianza σ^2.

Después de dividir el numerador y el denominador de la ecuación 6-17 entre σ, se tiene que

$$T = \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}}{S/(\sigma\sqrt{n})} = \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n - 1}}}$$

Ahora el numerador $(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ está distribuido como una variable aleatoria normal estándar, mientras que $(n-1)S^2/\sigma^2$ está distribuida como χ^2_{n-1}. Por tanto, el denominador es la raíz cuadrada de una variable aleatoria ji-cuadrada dividida entre los grados de libertad de ésta. Finalmente, puesto que $\overline{X}$ y S^2 son independientes, entonces del teorema 6-4 se tiene que

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{6-18}$$

sigue una distribución t con $n - 1$ grados de libertad. En capítulos subsecuentes se utilizará la estadística de la ecuación 6-18 para construir intervalos de confianza y pruebas de hipótesis con respecto a la media de una distribución normal.

EJEMPLO 6-13

Al fabricante de un agente propulsor utilizado en sistemas de escape de emergencia de aeronaves, le gustaría afirmar que su producto tiene una tasa promedio de combustión de 40 in por minuto. Para investigar esta afirmación, el fabricante prueba 25 granos de propulsor seleccionados al azar, y si el valor calculado de T a partir de la ecuación 6-18 cae entre $-t_{0.05,24}$ y $t_{0.05,24}$, entonces queda satisfecho. ¿A qué conclusión debe llegar el fabricante si tiene una muestra con una media de $\bar{x} = 42.5$ in/min y una desviación estándar $s = 0.75$ in/min? Supóngase que la tasa de combustión tiene una distribución normal.

De la tabla IV del apéndice, se tiene que $t_{0.05,24} = 1.711$, de modo que si el valor t cae entre -1.711 y 1.711, el fabricante quedará satisfecho con su afirmación. Para la muestra obtenida, si $\mu = 40$, entonces

$$t = \frac{42.5 - 40}{0.75/\sqrt{25}} = 16.67$$

que es un valor que excede por mucho a 1.711. De hecho, si $\mu = 40$, entonces la probabilidad de obtener un valor de t mayor que éste es considerablemente menor que 0.05. El valor de t obtenido es un indicador de que la tasa promedio de combustión es mayor que 40 in/min. Éste es un ejemplo del uso de la distribución t para probar una hipótesis (una afirmación sobre el valor de la tasa promedio de combustión). Estos problemas se estudian de manera extensa en el capítulo 8.

6-9 DISTRIBUCIÓN F

En los capítulos que siguen se verá que una de las distribuciones más útiles en estadística es la distribución F. La variable aleatoria F se define como el cociente de dos variables aleatorias ji-cuadrada independientes, cada una divida entre sus respectivos grados de libertad. Esto es,

$$F = \frac{W/u}{Y/v}$$

donde W y Y son variables aleatorias ji-cuadrada independientes con grados de libertad u y v, respectivamente. Ahora es el momento de plantear de manera formal la distribución de muestreo de F.

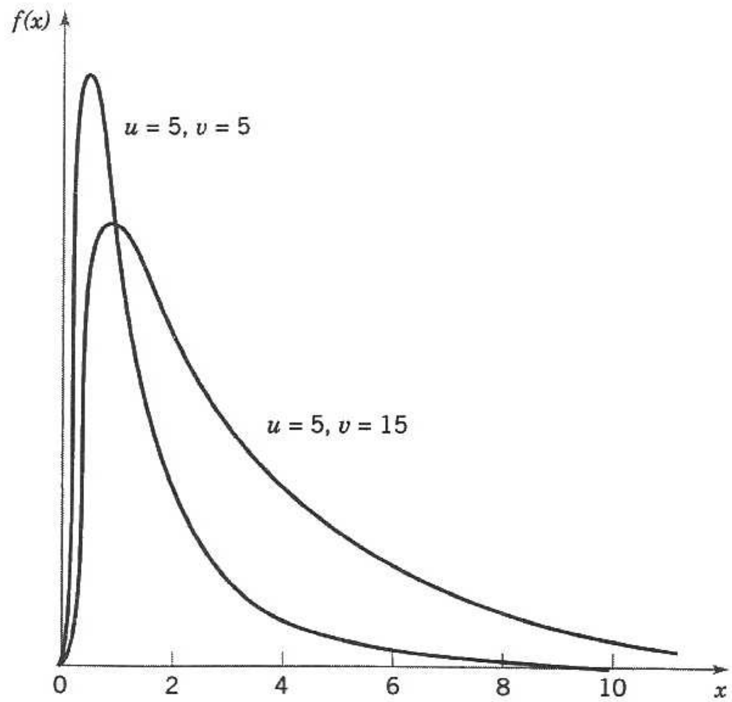


Figura 6-13 Funciones de densidad de probabilidad de varias distribuciones F.

Teorema 6-5

Sean W y Y variables aleatorias ji-cuadrada independientes con grados de libertad, u y v, respectivamente. Entonces el cociente

$$F = \frac{W/u}{Y/v} \tag{6-19}$$

tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2} x^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left[\left(\frac{u}{v}\right)x+1\right]^{(u+v)/2}}, \quad 0 < x < \infty \tag{6-20}$$

y se dice que sigue la distribución F con u grados de libertad en el numerador, y v grados de libertad en el denominador. Usualmente, esto se abrevia como $F_{u,v}$.

La media y la varianza de la distribución F son $\mu = v/(v-2)$ para $v > 2$, y

$$\sigma^2 = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}, \qquad v > 4$$

La figura 6-13 presenta varias distribuciones F. La variable aleatoria F es no negativa, y la

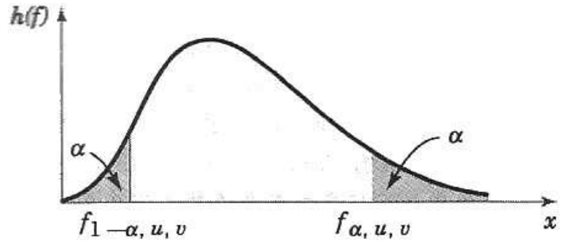


Figura 6-14 Puntos críticos superior e inferior de la distribución F.

distribución tiene un sesgo hacia la derecha. La distribución F tiene una apariencia muy similar a la distribución ji-cuadrada de la figura 6-9; sin embargo, se encuentra centrada respecto a 1, y los dos parámetros u y v proporcionan una flexibilidad adicional con respecto a la forma de la distribución.

Los puntos críticos de la distribución F están dados en la tabla V del apéndice. Sea $f_{\alpha,u,v}$ el punto crítico de la distribución F, con u grados de libertad en el numerador, y v grados de libertad en el denominador, tal que la probabilidad de que la variable aleatoria F sea mayor que este valor es

$$P(F > f_{\alpha,u,v}) = \int_{f_{\alpha,u,v}}^{\infty} f(x)\, dx = \alpha$$

Esto se ilustra en la figura 6-14. Por ejemplo, si $u = 5$ y $v = 10$, entonces, de la tabla V del apéndice, se tiene que

$$P(F > f_{0.05,5,10}) = P(F_{5,10} > 3.33) = 0.05$$

Esto es, el punto crítico del 5% superior de $F_{5,10}$ es $f_{0.05,5,10} = 3.33$.

La tabla V contiene sólo puntos críticos en la cola superior (valores de $f_{\alpha,u,v}$ para $\alpha \leq 0.50$) de la distribución F. Los puntos críticos en la cola inferior $f_{1-\alpha,u,v}$ pueden hallarse de la siguiente manera:

$$f_{1-\alpha,u,v} = \frac{1}{f_{\alpha,v,u}}$$

Por ejemplo, para encontrar el punto crítico en la cola inferior $f_{0.95,5,10}$, nótese que

$$f_{0.95,5,10} = \frac{1}{f_{0.05,10,5}} = \frac{1}{4.74} = 0.211$$

EJEMPLO 6-14

Como ejemplo de una variable aleatoria que sigue una distribución F, supóngase que se tienen dos poblaciones normales con varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente. Se toman dos muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 de las poblaciones 1 y 2, respectivamente, y sean S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales. Entonces, el cociente

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \tag{6-21}$$

tiene una distribución F con $n_1 - 1$ grados de libertad en el numerador, y $n_2 - 1$ grados de libertad en el denominador. Esto se desprende directamente del hecho de que (n_1 −

$1)S_1^2/\sigma_1^2$ está distribuida como $\chi^2_{n_1-1}$ y $(n_2-1)S_2^2/\sigma_2^2$ como $\chi^2_{n_2-1}$ y del teorema 6-5. La variable aleatoria de la ecuación 6-21 juega un papel importante en los capítulos siguientes, donde se abordan problemas de estimación de intervalos de confianza y prueba de hipótesis con respecto a las varianzas de dos poblaciones normales e independientes.

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 6-7, 6-8 Y 6-9

6-31. Para una distribución ji-cuadrada, encuentre los siguientes valores:

a. $\chi^2_{0.95,8}$

b. $\chi^2_{0.50,10}$

c. $\chi^2_{0.25,20}$

6-32. Para una distribución ji-cuadrada, encuentre los siguientes valores:

a. $\chi^2_{0.025,10}$

b. $\chi^2_{0.01,15}$

c. $\chi^2_{0.99,18}$

6-33. Para una distribución ji-cuadrada, encuentre $\chi^2_{\alpha,\nu}$ tal que

a. $P(X_{10} \leq \chi^2_{\alpha,10}) = 0.975$

b. $P(X_{15} \leq \chi^2_{\alpha,15}) = 0.025$

c. $P(26.296 \leq X_{16} \leq \chi^2_{\alpha,16}) = 0.045$

6-34. Para una distribución ji-cuadrada, encuentre $\chi^2_{\alpha,\nu}$ tal que

a. $P(X_5 \leq \chi^2_{\alpha,5}) = 0.95$

b. $P(X_{10} \leq \chi^2_{\alpha,10}) = 0.20$

c. $P(12.549 \leq X_{10} \leq \chi^2_{\alpha,10}) = 0.20$

6-35. Se toma una muestra aleatoria de $n = 25$ observaciones de una población normal que tiene una varianza $\sigma^2 = 10$. Encuentre la probabilidad de que la varianza de la muestra sea mayor que 16.4.

6-36. Para una distribución t, encuentre los siguientes valores:

a. $t_{0.025,10}$

b. $t_{0.10,15}$

c. $t_{0.01,20}$

6-37. Para una distribución t, encuentre los siguientes valores:

a. $t_{0.01,10}$

b. $t_{0.05,20}$

c. $t_{0.01,11}$

6-38. Para una distribución t, encuentre $t_{\alpha,\nu}$ tal que

a. $P(T_{10} \leq t_{\alpha,10}) = 0.95$

b. $P(T_{15} \leq t_{\alpha,15}) = 0.01$

c. $P(T_8 > t_{\alpha,8}) = 0.90$

6-39. Para una distribución t, encuentre $t_{\alpha,\nu}$ tal que

a. $P(T_{20} \leq t_{\alpha,20}) = 0.90$

b. $P(T_{15} > t_{\alpha,15}) = 0.95$

c. $P(1.476 \leq T_5 \leq t_{\alpha,5}) = 0.075$

6-40. Una población normal tiene una media conocida igual con 10, y una varianza desconocida. De esta población se toma una muestra aleatoria de tamaño 25. Los resultados en la muestra son una media de 11 y una desviación estándar muestral de 4.2. ¿Cuán inusuales son estos resultados?

6-41. Para una distribución F, encuentre lo siguiente:

a. $f_{0.25,4,9}$

b. $f_{0.05,15,10}$

c. $f_{0.95,6,8}$

d. $f_{0.90,24,24}$

6-42. Si S_1^2 y S_2^2 son las varianzas muestrales de muestras aleatorias independientes de tamaños $n_1 = 10$ y $n_2 = 20$, tomadas de poblaciones normales que tienen las mismas varianzas, encuentre $P(S_1^2/S_2^2 \leq 2.42)$.

Ejercicios complementarios

6-43. Suponga que se tiene una variable aleatoria distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2, y que de esta distribución se toma una muestra aleatoria de cinco observaciones. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra?

6-44. Los transistores tienen una vida útil que está distribuida de manera exponencial, con parámetro λ. Se toma una muestra aleatoria de n transistores. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra?

6-45. Suponga que X tiene una distribución uniforme desde 0 hasta 1. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 4 de X. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra?

6-46. Un especialista en adquisiciones compra 25 resistores del vendedor 1, y 30 del vendedor 2. Sean $X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,25}$ las resistencias observadas del vendedor 1, las cuales se supone que están distribuidas de manera normal e independiente, con media 100 Ω y desviación estándar 1.5 Ω. De manera similar, sean $X_{2,1}, X_{2,2}, \ldots, X_{2,30}$ las resistencias observadas del vendedor 2, las cuales se supone que están distribuidas de manera normal e independiente, con media 105 Ω y desviación estándar 2.0 Ω. ¿Cuál es la distribución de muestreo de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$?

6-47. Considere el problema de los resistores del ejercicio 6-46. ¿Cuál es el error estándar de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$?

6-48. De una distribución normal con media 50 y desviación estándar 12, se toma una muestra aleatoria de 36 observaciones. Encuentre la probabilidad de que la media muestral se encuentre en el intervalo $47 \leq \overline{X} \leq 53$.

6-49. ¿Es importante la hipótesis de normalidad en el ejercicio 6-48? ¿Por qué?

6-50. Se realizan pruebas en una muestra aleatoria de $n = 9$ elementos estructurales para determinar su resistencia a la compresión. Se sabe que la media verdadera de la resistencia a la compresión es $\mu = 5500$ psi y que la desviación estándar es $\sigma = 100$ psi. Encuentre la probabilidad de que la resistencia promedio a la compresión de la muestra sea mayor que 4985 psi.

6-51. Una población normal tiene una media conocida de 50 y una varianza desconocida. De esta población se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 16$; los resultados obtenidos de la muestra son $\bar{x} = 52$ y $s = 1.5$. ¿Cuán inusuales son estos resultados?

6-52. Se toma una muestra aleatoria de tamaño $n = 16$ de una población normal que tiene una varianza $\sigma^2 = 5$. Encuentre la probabilidad de que la varianza de la muestra sea menor o igual que 7.44.

6-53. Un fabricante de dispositivos semiconductores toma una muestra aleatoria de 100 chips y los prueba; cada chip es clasificado como defectuoso o no defectuoso. Sea $X_i = 0$ si el chip no es defectuoso, y $X_i = 1$ si el chip es defectuoso. La fracción de chips defectuosos de la muestra es

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

¿Cuál es la distribución de muestreo de la variable aleatoria $\hat{P}$?

6-54. Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Dadas dos muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2, con medias muestrales $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$, demuestre que

$$\overline{X} = a\overline{X}_1 + (1 - a)\overline{X}_2, \qquad 0 < a < 1$$

es un estimador insesgado para μ. Si $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ son independientes, encuentre el valor de a que minimiza el error estándar de $\overline{X}$.

EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

6-55. Un lote contiene N transistores, de los cuales M ($M \leq N$) están defectuosos. Se eligen al azar dos transistores de este lote, sin remplazo, con la finalidad de determinar si están o no defectuosos. La variable aleatoria es

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ si el } i\text{-ésimo transistor no es defectuoso} \\ 0, \text{ si el } i\text{-ésimo transistor es defectuoso} \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Determine la función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2. ¿Cuáles son las funciones de probabilidad marginal de X_1 y X_2? ¿Son X_1 y X_2 variables aleatorias independientes?

6-56. Demuestre que la varianza de S^2 para muestras aleatorias de tamaño n tomadas de una población normal, disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra n. [*Sugerencia:* Encuentre la varianza de $(n-1)S^2/\sigma^2$.]

6-57. Sea $f_{1-\alpha,u,v}$ un punto de la cola inferior ($\alpha \leq 0.50$) de la distribución $F_{u,v}$. Demuestre que $f_{1-\alpha,u,v} = 1/f_{\alpha,u,v}$.

6-58. Cuando la desviación estándar muestral se basa en una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal, puede demostrarse que S es un estimador sesgado de σ. De manera específica,

$$E(S)=\sigma\sqrt{2/(n-1)}\,\Gamma(n/2)/\Gamma[(n-1)/2]$$

a. Utilice este resultado para obtener un estimador insesgado para σ de la forma c_nS, cuando la constante c_n depende del tamaño de la muestra n.

b. Encuentre el valor de c_n para $n = 10$ y $n = 25$. En general, ¿cuál es el desempeño de S como estimador de σ para n grande con respecto al sesgo?

6-59. **Estimador consistente.** Otra manera de medir la proximidad de un estimador $\hat{\Theta}$ al parámetro θ es en términos de la consistencia. Si $\hat{\Theta}_n$ es un estimador de θ basado en una muestra aleatoria de n observaciones, entonces $\hat{\Theta}_n$ es consistente para θ si

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\Theta} - \theta| < \epsilon) = 1$$

Es así como la consistencia es una propiedad de una muestra grande, que describe el comportamiento límite de $\hat{\Theta}_n$ a medida que n tiende a infinito. Usualmente es difícil demostrar la consistencia utilizando la definición anterior, aunque puede hacerse con otros enfoques. Para ilustrar esto, demuestre que $\overline{X}$ es un estimador consistente de μ (cuando $\sigma^2 < \infty$) mediante el empleo de la desigualdad de Chebyshev. Véase la sección 5-7.

6-60. **Estadísticas de orden.** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n tomada de X, una variable aleatoria que tiene una función de distribución $F(x)$. Clasifique los elementos en orden ascendente de magnitud numérica, lo que da como resultado $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, donde $X_{(1)}$ es el elemento más pequeño de la muestra ($X_{(1)} = \text{mín}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$) y $X_{(n)}$ es el elemento más grande de la muestra ($X_{(n)} = \text{máx}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$). $X_{(i)}$ recibe el nombre de i-ésima estadística de orden. A menudo tiene interés la distribución de algunas de las estadísticas de orden, en particular las de los valores mínimo y máximo de la muestra, $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$, respectivamente. Demuestre que las funciones de distribución acumulativas de estas dos estadísticas de orden, denotadas respectivamente por $F_{X_{(1)}}(t)$ y $F_{X_{(n)}}(t)$ son

$$F_{X_{(1)}}(t) = 1 - [1 - F(t)]^n$$

$$F_{X_{(n)}}(t) = [F(t)]^n$$

Demuestre que si X es continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$, entonces las distribuciones de probabilidad de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$ son

$$f_{X_{(1)}}(t) = n[1 - F(t)]^{n-1} f(t)$$

$$f_{X_{(n)}}(t) = n[F(t)]^{n-1} f(t)$$

6-61. **Continuación del ejercicio 6-60.** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria de Bernoulli con parámetro p. Demuestre que

$$P(X_{(n)} = 1) = 1 - (1 - p)^n$$

$$P(X_{(1)} = 0) = 1 - p^n$$

Utilice los resultados del ejercicio 6-60.

6-62. **Continuación del ejercicio 6-60.** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2. Utilice los resultados del ejercicio 6-60 para obtener las funciones de densidad de probabilidad de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$.

6-63. **Continuación del ejercicio 6-60.** Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria exponencial con parámetro λ. Obtenga las funciones de distribución acumulativas y de densidad de probabilidad de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$. Utilice los resultados del ejercicio 6-60.

6-64. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada $F(x)$. Encuentre

$$E[F(X_{(n)})]$$

y

$$E[F(X_{(1)})]$$

6-65. Sean X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2, y $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n tomada de X. Demuestre que la estadística $V = k \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ es un estimador insesgado de σ^2 para una elección apropiada de la constante k. Encuentre este valor de k.

7 Estimación de intervalos

En muchas situaciones, una estimación puntual no proporciona información suficiente sobre un parámetro. Por ejemplo, si se tiene interés en estimar la resistencia promedio a la tensión de los elementos estructurales empleados en el ala de un aeroplano, entonces es probable que un sólo número no sea tan significativo como un **intervalo**, dentro del cual se espera encontrar el valor de este parámetro. El intervalo estimado recibe el nombre de **intervalo de confianza**. En este capítulo se estudian intervalos de confianza y otros problemas de estimación por intervalos. De manera específica, se muestra cómo encontrar intervalos de confianza para medias, varianzas y proporciones. También se indica cómo encontrar intervalos que contengan una parte específica de las observaciones de una población; estos tipos de intervalos se conocen como **intervalos de tolerancia**.

7-1 INTERVALOS DE CONFIANZA

Una estimación por intervalos de un parámetro desconocido θ es un intervalo de la forma $l \leq \theta \leq u$, donde los puntos extremos l y u dependen del valor numérico de la estadística $\hat{\theta}$

para una muestra en particular, y de la distribución de muestreo de $\hat{\Theta}$. Puesto que muestras diferentes producen valores distintos de $\hat{\theta}$ y, en consecuencia, valores diferentes de los puntos extremos l y u, estos puntos son valores de variables aleatorias, por ejemplo, L y U, respectivamente. De la distribución de muestreo de $\hat{\Theta}$ es posible determinar los valores de L y U tales que la siguiente proposición de probabilidad es verdadera:

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha \tag{7-1}$$

donde $0 < \alpha < 1$. Por tanto, se tiene una probabilidad de $1 - \alpha$ de seleccionar una muestra que produzca un intervalo que contiene el valor verdadero de θ.

El intervalo resultante

$$l \leq \theta \leq u \tag{7-2}$$

se conoce como **intervalo de confianza** del $100(1 - \alpha)$ por ciento para el parámetro desconocido θ. Las cantidades l y u reciben el nombre de **límites de confianza inferior y superior**, respectivamente, y $1 - \alpha$ es el **coeficiente de confianza**. La interpretación de un intervalo de confianza es que, si se recopila un número infinito de muestras aleatorias y se calcula un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para θ, para cada una de las muestras, entonces el $100(1 - \alpha)$ por ciento de esos intervalos contienen el valor verdadero de θ.

Esta situación se ilustra en la figura 7-1, la cual presenta varios intervalos de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para la media μ de una distribución. Los puntos del centro de cada intervalo indican la estimación puntual de μ (en este caso, $\bar{x}$). Nótese que uno de los 15 intervalos no contiene el valor verdadero de μ. Si el intervalo de confianza fuera del 95%, esto significaría que en una corrida larga sólo el 5% de los intervalos no contendrían a μ.

Ahora, en la práctica, se obtiene sólo una muestra aleatoria y se calcula un intervalo de confianza. Puesto que este intervalo puede o no contener el valor verdadero de θ, no es razonable asociar un nivel de probabilidad a este evento específico. La proposición adecuada es que el intervalo observado $[l, u]$ contiene el valor verdadero de θ con una confianza $100(1 - \alpha)$. Esta proposición tiene una interpretación de frecuencia; esto es, no se sabe si es correcta para la muestra en particular, pero el método utilizado para obtener el intervalo $[l, u]$ proporciona proposiciones correctas el $100(1 - \alpha)$ por ciento de las veces.

El intervalo de confianza de la ecuación 7-2 recibe el nombre más apropiado de **intervalo de confianza bilateral**, ya que especifica los límites inferior y superior de θ. En ocasiones, puede resultar más apropiado un **intervalo de confianza unilateral**. Un intervalo de confianza unilateral inferior del $100(1 - \alpha)$ para θ está dado por el intervalo

$$l \leq \theta \tag{7-3}$$

donde el límite inferior de confianza l se elige de modo que

$$P(L \leq \theta) = 1 - \alpha \tag{7-4}$$

De manera similar, un intervalo de confianza unilateral superior del $100(1 - \alpha)$ para θ está dado por el intervalo

$$\theta \leq u \tag{7-5}$$

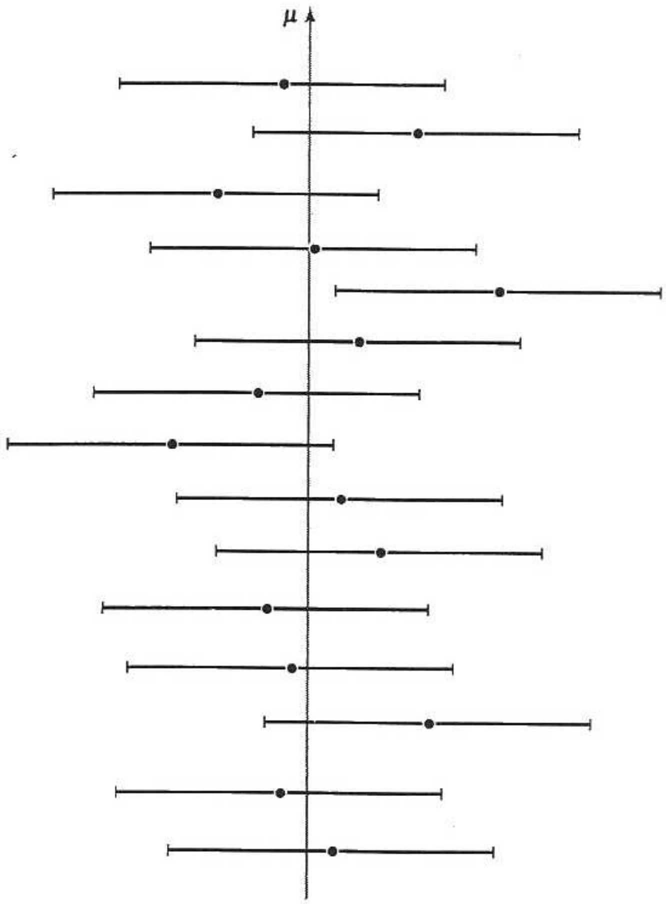


Figura 7-1 Construcción repetida de un intervalo de confianza para μ.

donde el límite de confianza superior u se escoge de modo que

$$P(\theta \leq U) = 1 - \alpha \tag{7-6}$$

La longitud $u - l$ del intervalo de confianza observado es una medida importante de la calidad de la información obtenida de la muestra. El semiintervalo $\theta - l$ o $u - \theta$ se conoce como **precisión** del estimador. Entre más grande sea el intervalo de confianza, mayor es la seguridad de que el intervalo en realidad contenga el valor verdadero de θ. Por otra parte, entre más grande sea el intervalo, menor información se tiene acerca del valor verdadero de θ. En una situación ideal, se tiene un intervalo relativamente pequeño con una confianza grande.

Este capítulo presenta métodos para encontrar intervalos de confianza para medias, varianzas y proporciones. Las aplicaciones de estos tipos de intervalos de confianza se encuentran con frecuencia en la ingeniería, en la ciencia y en la administración.

7-2 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA, VARIANZA CONOCIDA

Supóngase que se tiene una población con media desconocida μ y varianza conocida σ^2. De esta población se toma una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño n. La media muestral

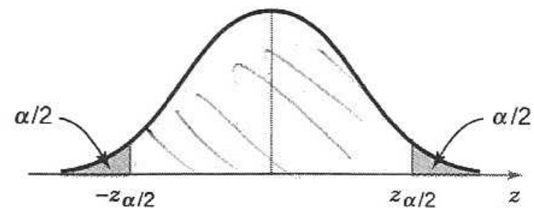


Figura 7-2 Distribución de Z.

$\overline{X}$ es un estimador puntual razonable de la media desconocida μ. Puede obtenerse un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ al considerar la distribución de muestreo de la media muestral $\overline{X}$. En la sección 6-6 se indicó que la distribución de muestreo de $\overline{X}$ es normal si la población es normal, y aproximadamente normal si se satisfacen las condiciones del teorema del límite central. El valor esperado o media de $\overline{X}$ es μ, mientras que el de la varianza es σ^2/n. Por consiguiente, la distribución de la estadística

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es una distribución normal estándar.

La distribución de $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ aparece en la figura 7-2. Al examinar esta figura se observa que

$$P\{-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

de modo que

$$P\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

La expresión anterior puede escribirse como

$$P\{\overline{X} - z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\} = 1 - \alpha \tag{7-7}$$

A partir de la consideración de la ecuación 7-1, los límites inferior y superior de las desigualdades de la ecuación 7-7, son los límites de confianza inferior y superior, L y U, respectivamente. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición: Intervalo de confianza para la media con varianza conocida

Si $\bar{x}$ es la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n de una población con varianza conocida σ^2, un intervalo de confianza para μ del $100(1-\alpha)$ por ciento está dado por

$$\boxed{\bar{x} - z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}} \tag{7-8}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto de la distribución normal estándar que corresponde al porcentaje $\alpha/2$.

Para muestras tomadas de una población normal, o para muestras de tamaño $n \geq 30$, sin importar la forma que tenga la población, el intervalo de confianza dado por la ecuación 7-8 proporciona buenos resultados. Sin embargo, para muestras pequeñas tomadas de poblaciones que no son normales, no es posible esperar que el nivel de confianza $1 - \alpha$ sea exacto.

EJEMPLO 7-1

Considérense los datos de conductividad térmica para el hierro Armco del ejemplo 6-9. Supóngase que se desea encontrar un intervalo de confianza del 95% para conductividad térmica promedio de este material, y que se sabe que la desviación estándar de la conductividad térmica a 100 °F y 550 W es $\sigma = 0.30$ Btu/hr – ft – °F. Si se supone que la conductividad térmica está distribuida de manera normal (o que se satisfacen las condiciones del teorema del límite central), entonces puede emplearse la ecuación 7-8 para construir el intervalo de confianza. Un intervalo del 95% implica que $1 - \alpha = 0.95$, de modo que $\alpha = 0.05$. De la tabla II del apéndice, $z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$.

El límite inferior de confianza es

$$\begin{aligned} l &= \bar{x} - z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \\ &= 41.924 - 1.96(0.30)/\sqrt{10} \\ &= 41.924 - 0.186 \\ &= 41.738 \end{aligned}$$

y el límite superior de confianza es

$$\begin{aligned} u &= \bar{x} + z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \\ &= 41.924 + 1.96(0.30)/\sqrt{10} \\ &= 41.924 + 0.186 \\ &= 42.110 \end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo de confianza bilateral del 95% es

$$41.738 \leq \mu \leq 42.110$$

Éste es nuestro intervalo de valores razonables para la conductividad térmica promedio con una confianza del 95%.

Nivel de confianza y precisión de la estimación

Nótese que, en el ejemplo anterior, la selección de un nivel de confianza del 95% es esencialmente arbitraria. ¿Qué habría pasado si se hubiera escogido un nivel de confianza mayor, por ejemplo, 99%? De hecho, ¿no parece razonable que se desee un nivel de confianza mayor? Con $\alpha = 0.01$, se tiene que $z_{\alpha/2} = z_{0.01/2} = z_{0.005} = 2.58$, mientras que para $\alpha = 0.05$, $z_{0.025} = 1.96$. Por tanto, la longitud del intervalo de confianza del 95% es

$$2(1.96\,\sigma/\sqrt{n}) = 3.92\,\sigma/\sqrt{n}$$

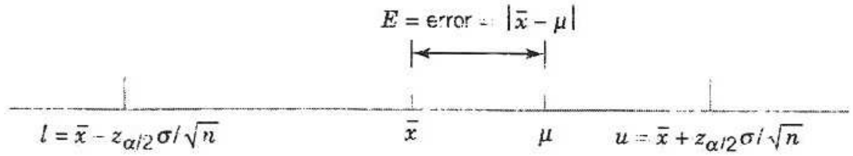


Figura 7-3 Error al estimar μ con $\bar{x}$.

mientras que la longitud del intervalo de confianza del 99% es

$$2(2.58\,\sigma/\sqrt{n}) = 5.16\,\sigma/\sqrt{n}$$

El intervalo de confianza del 99% es mayor que la del intervalo del 95%. Ésta es la razón por la que se tiene un nivel de confianza mayor con el intervalo del 99%. En general, para un tamaño de muestra fijo n y desviación estándar σ, entre más grande sea el nivel de confianza, más grande es el intervalo de confianza resultante.

Puesto que la **longitud** del intervalo de confianza mide la **precisión** de una estimación, se observa entonces que la precisión está inversamente relacionada con el nivel de confianza. Tal como se notó con anterioridad, es deseable obtener un intervalo de confianza que sea suficientemente pequeño para fines de toma de decisiones, y que también tenga una confianza adecuada. Una manera de alcanzar esto es mediante la selección de una muestra de tamaño n suficientemente grande como para obtener de ella un intervalo de confianza de la longitud especificada con una confianza predeterminada.

Selección del tamaño de la muestra

La precisión del intervalo de confianza de la ecuación 7-8 es $z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$. Esto siginifica que al utilizar $\bar{x}$ para estimar μ, el error $E = |\bar{x} - \mu|$ es menor o igual que $z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$ con una confianza $100(1-\alpha)$. Esto se muestra de manera gráfica en la figura 7-3. En situaciones donde puede controlarse el tamaño de la muestra, es posible elegir n de modo que se tenga una confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento de que el error al estimar μ sea menor que el error especificado E. El tamaño apropiado de la muestra se obtiene al seleccionar n de modo que $z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} = E$. La solución de esta ecuación proporciona la fórmula siguiente para n.

Definición

Si $\bar{x}$ se utiliza como estimación de μ, entonces puede tenerse una confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento de que el error $|\bar{x} - \mu|$ no será mayor que una cantidad específica E cuando el tamaño de la muestra sea

$$\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma}{E}\right)^2} \qquad E = |\bar{x} - \mu| \tag{7-9}$$

Si el miembro derecho de la ecuación 7-9 no es un entero, entonces el resultado debe redondearse. Esto asegura que el nivel de confianza no sea menor que $100(1-\alpha)$ por ciento. Nótese que la longitud del intervalo de confianza resultante es $2E$.

EJEMPLO 7-2

Para ilustrar el empleo de este procedimiento, supóngase que se desea que el error en la estimación de la conductividad térmica promedio del hierro Armco del ejemplo 7-1 sea menor que 0.05 Btu/hr – ft – °F, con una confianza del 95%. Puesto que $\sigma = 0.10$ y $z_{0.025} = 1.96$, el tamaño requerido de la muestra puede obtenerse a partir de la ecuación 7-9, así

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma}{E}\right)^2 = \left[\frac{(1.96)0.10}{0.05}\right]^2 = 15.37 \cong 16$$

Nótese la relación general entre el tamaño de la muestra, la longitud deseada del intervalo de confianza $2E$, el nivel de confianza $100(1-\alpha)$ por ciento y la desviación estándar σ:

- Conforme disminuye la longitud del intervalo $2E$, el tamaño requerido de la muestra n aumenta para un valor fijo de σ y para la confianza especificada.
- A medida que σ aumenta, el tamaño requerido de la muestra n aumenta para una longitud deseada $2E$ fija y una confianza especificada.
- Conforme aumenta el nivel de confianza, el tamaño requerido de la muestra n aumenta para una longitud fija deseada $2E$ y una desviación estándar σ.

Intervalos de confianza unilaterales

También es posible obtener intervalos de confianza unilaterales para μ haciendo $l = -\infty$ o $u = \infty$, y remplazando $z_{\alpha/2}$ por z_α. El intervalo de confianza superior del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ es

$$\mu \le u = \bar{x} + z_\alpha\,\sigma/\sqrt{n} \tag{7-10}$$

y el intervalo de confianza inferior del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ es

$$\bar{x} - z_\alpha\,\sigma/\sqrt{n} = l \le \mu \tag{7-11}$$

Error estándar de la media

En el capítulo 6 se estudió la estimación puntual, la cual proporciona sólo un número como estimación del parámetro. En este capítulo se estudian los intervalos de confianza, que proporcionan un intervalo que es razonable para el parámetro en el sentido de que el $100(1-\alpha)$

por ciento de tales intervalos, calculados a partir de los datos experimentales, "cubrirán" el parámetro. Estos dos métodos de estimación están relacionados mediante la distribución de muestreo del estimador puntual.

Por ejemplo, si μ es desconocida y σ^2 es conocida, la media muestral $\overline{X}$ es un estimador puntual de μ. La varianza de $\overline{X}$ es

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

y la desviación estándar o *error estándar* del estimador puntual $\overline{X}$ es

$$\sigma_{\overline{X}} = e.e.(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ahora nótese que el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ es

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

o, de manera equivalente,

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\, e.e.\,(\overline{X}).$$

En cierto sentido, la precisión de la estimación puntual está expresada en términos del error estándar de éste. En consecuencia, el ancho del intervalo de confianza está relacionado de manera directa con el error estándar. Por tanto, el intervalo de confianza puede considerarse como una modificación de la estimación puntual que toma en cuenta la precisión del estimador puntual.

7-3 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE DOS MEDIAS, VARIANZAS CONOCIDAS

Supóngase que se tienen dos poblaciones independientes con medias desconocidas μ_1 y μ_2, y varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente. Se desea encontrar un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para la diferencia de las medias $\mu_1 - \mu_2$.

Sean $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ una muestra aleatoria de n_1 observaciones tomadas de la primera población y $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ una muestra aleatoria de n_2 observaciones tomada de la segunda población. Si $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ son las medias muestrales, la estadística $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ es un estimador puntual de $\mu_1 - \mu_2$. La variable aleatoria

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

tiene una distribución normal estándar si las dos poblaciones son normales, o es aproximadamente normal estándar si se cumplen las condiciones del teorema del límite central, respectivamente. De la figura 7-2, esto implica que

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

o

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

La expresión anterior puede reacomodarse de la siguiente manera

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha \tag{7-12}$$

Al comparar las ecuaciones 7-12 y 7-1, puede desarrollarse la siguiente definición para un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

Definición: Intervalo de confianza para la diferencia de dos medias, varianzas conocidas

Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son las medias de dos muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 tomadas de poblaciones que tienen varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, entonces un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{7-13}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución normal estándar.

El nivel de confianza $1-\alpha$ es exacto cuando las poblaciones son normales. Para poblaciones que no lo son, el nivel de confianza es aproximadamente válido para tamaños grandes de muestras.

EJEMPLO 7-3

Se llevan a cabo pruebas de resistencia a la tensión sobre dos diferentes clases de largueros de aluminio utilizados en la fabricación de alas de aeroplanos comerciales. De la experiencia pasada con el proceso de fabricación de largueros y del procedimiento de prueba, se supone que las desviaciones estándar de las resistencias a la tensión son conocidas. Los datos obtenidos aparecen en la tabla 7-1. Si μ_1 y μ_2 denotan los promedios verdaderos de las

Tabla 7-1 Resultados de la prueba de resistencia a la tensión para largueros de aluminio

Clase del larguero	Tamaño de la muestra	Media muestral de la resistencia a la tensión (kg/mm²)	Desviación estándar (kg/mm²)
1	$n_1 = 10$	$\bar{x}_1 = 87.6$	$\sigma_1 = 1.0$
2	$n_2 = 12$	$\bar{x}_2 = 74.5$	$\sigma_2 = 1.5$

resistencias a la tensión para las dos clases de largueros, entonces puede encontrarse un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de las medias $\mu_1 - \mu_2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} l &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \\ &= 87.6 - 74.5 - 1.645\sqrt{\frac{(1.0)^2}{10} + \frac{(1.5)^2}{12}} \\ &= 13.1 - 0.88 \\ &= 12.22 \text{ kg/mm}^2 \\ u &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \\ &= 87.6 - 74.5 + 1.645\sqrt{\frac{(1.0)^2}{10} + \frac{(1.5)^2}{12}} \\ &= 13.1 + 0.88 \\ &= 13.98 \text{ kg/mm}^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el intervalo de confianza del 90% para la diferencia en la resistencia a la tensión promedio es

$$12.22 \text{ kg/mm}^2 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 13.98 \text{ kg/mm}^2$$

Nótese que el intervalo de confianza no incluye al cero, lo que implica que la resistencia promedio del aluminio de clase $1(\mu_1)$ es mayor que la del aluminio de clase $2(\mu_2)$. De hecho, puede afirmarse que se tiene una confianza del 90% de que la resistencia promedio a la tensión del aluminio de clase 1 es mayor que la del aluminio de clase 2 por una cantidad que oscila entre 12.22 y 13.98 kg/mm².

Selección del tamaño de la muestra

Si se conocen (al menos aproximadamente) las desviaciones estándar σ_1 y σ_2 y los tamaños de las dos muestras son iguales ($n_1 = n_2 = n$, por ejemplo), entonces puede determinarse el tamaño requerido de la muestra de modo que se tenga una confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento en que el error en la estimación de $\mu_1 - \mu_2$ por $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ sea menor que E. El tamaño requerido para la muestra de cada población es

$$\boxed{n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \tag{7-14}$$

Recuérdese que es necesario redondear n si éste no es un entero. Con esto se asegura que el nivel de confianza no sea menor que $100(1 - \alpha)$ por ciento.

Intervalos de confianza unilaterales

También es posible obtener intervalos de confianza unilaterales para $\mu_1 - \mu_2$. Un intervalo unilateral superior del $100(1 - \alpha)$ por ciento de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{7-15}$$

mientras que un intervalo unilateral inferior del $100(1 - \alpha)$ por ciento de confianza es

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \tag{7-16}$$

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 7-2 Y 7-3

7-1. Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo está distribuido aproximadamente de manera normal, y que tiene una desviación estándar $\sigma = 0.001$ mm. Una muestra aleatoria de 15 anillos tiene un diámetro promedio de $\bar{x} = 74.036$ mm.

- **a.** Construya un intervalo de confianza bilateral del 99% para el diámetro promedio del anillo.
- **b.** Construya un límite inferior de confianza del 95% para el diámetro promedio del anillo.

7-2. Se sabe que la duración, en horas, de un foco de 75 watts tiene una distribución aproximadamente normal, con una desviación estándar de $\sigma = 25$ horas. Se toma una muestra aleatoria de 20 focos, la cual resulta tener una duración promedio de $\bar{x} = 1014$ horas.

- **a.** Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la duración promedio.
- **b.** Construya un intervalo de confianza inferior del 95% para la duración promedio.

7-3. Un ingeniero civil analiza la resistencia a la comprensión del concreto. La resistencia está distribuida aproximadamente de manera normal, con una varianza $\sigma^2 = 1000(\text{psi})^2$. Al tomar una muestra aleatoria de 12 especímenes, se tiene que $\bar{x} = 3250$ psi.

a. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la resistencia a la compresión promedio.

b. Construya un intervalo de confianza bilateral del 99% para la resistencia a la compresión promedio. Compare el ancho de este intervalo de confianza con el ancho encontrado en el inciso a).

7-4. En el ejercicio 7-2, supóngase que se desea una confianza del 95% en que el error en la estimación de la duración promedio sea menor que 5 horas. ¿Qué tamaño de muestra debe utilizarse?

7-5. En el ejercicio 7-2, supóngase que se desea que el ancho total del intervalo de confianza bilateral sea de seis horas, con una confianza del 95%. ¿Qué tamaño de muestra debe emplearse para este fin?

7-6. Supóngase que en el ejercicio 7-3 se desea estimar la resistencia a la compresión con un error menor que 15 psi para un nivel de confianza de 99%. ¿Qué tamaño de muestra debe emplearse para este fin?

7-7. Se utilizan dos máquinas para llenar botellas de plástico con detergente para máquinas lavaplatos. Se sabe que las desviaciones estándar del volumen de llenado son $\sigma_1 = 0.10$ onzas de líquido y $\sigma_2 = 0.15$ onzas de líquido para las dos máquinas, respectivamente. Se toman dos muestras aleatorias, $n_1 = 12$ botellas de la máquina 1 y $n_2 = 10$ botellas de la máquina 2. Los volúmenes promedio de llenado son $\bar{x}_1 = 30.87$ onzas de líquido y $\bar{x}_2 = 30.68$ onzas de líquido.

a. Construya un intervalo de confianza bilateral del 90% para la diferencia entre las medias del volumen de llenado.

b. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la diferencia entre las medias del volumen de llenado. Compare el ancho de este intervalo con el ancho del calculado en el inciso a).

c. Construya un intervalo de confianza superior del 95% para la diferencia de medias del volumen de llenado.

7-8. Se estudia la tasa de combustión de dos propelentes sólidos utilizados en los sistemas de escape de emergencia de aeroplanos. Se sabe que la tasa de combustión de los dos propelentes tiene aproximadamente la misma desviación estándar; esto es, $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$ cm/s. Se prueban dos muestras aleatorias de $n_1 = 20$ y $n_2 = 20$ especímenes; las medias muestrales de la tasa de combustión son $\bar{x}_1 = 18$ cm/s y $\bar{x}_2 = 24$ cm/s. Construya un intervalo de confianza bilateral del 99% para la diferencia entre medias de la tasa de combustión.

7-9. Se prueban dos fórmulas diferentes de un combustible oxigenado para motor en cuanto al octanaje. La varianza del octanaje para la fórmula 1 es $\sigma_1^2 = 1.5$, mientras que para la fórmula 2 es $\sigma_2^2 = 1.2$. Se prueban dos muestras aleatorias de tamaño $n_1 = 15$ y $n_2 = 20$. Los octanajes promedio observados son $\bar{x}_1 = 89.6$ y $\bar{x}_2 = 92.5$. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la diferencia en el octanaje promedio.

7-10. Considere la situación descrita en el ejercicio 7-8. ¿Qué tamaño de muestra debe utilizarse en cada población si se desea que el error en la estimación de la diferencia entre las medias de las tasas de combustión sea menor que 4 cm/s con una confianza del 99%?

7-11. Considere la situación sobre pruebas de octanaje descrita en el ejercicio 7-9. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para cada población si se desea tener una confianza del 95% de que el error al estimar la diferencia entre las medias de octanaje sea menor que uno?

7-12. Considere el intervalo de confianza para μ con desviación estándar σ conocida:

$$\bar{x} - z_{\alpha_1}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha_2}\sigma/\sqrt{n}$$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Sea $\alpha = 0.05$. Encuentre el intervalo para el que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2 = 0.025$. Ahora encuentre el intervalo para el caso donde $\alpha_1 = 0.01$ y $\alpha_2 = 0.04$. ¿Qué intervalo es más pequeño? ¿Existe alguna ventaja con respecto al intervalo de confianza "simétrico"?

7-13. En un proceso químico se fabrica cierto polímero. Normalmente, se hacen mediciones de viscosidad después de cada corrida, y la experiencia acumulada indica que la variabilidad en el proceso es muy estable, con $\sigma = 20$. Las siguientes son 15 mediciones de viscosidad por corrida: 724, 718, 776, 760, 745, 759, 795, 756, 742, 740, 761, 749, 739, 747, 742. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 90% para la viscosidad media del polímero.

7-14. Se piensa que la concentración del ingrediente activo de un detergente líquido para ropa, es afectada por el tipo de catalizador utilizado en el proceso de fabricación. Se sabe que la desviación estándar de la concentración activa es de 3 g/l, sin importar el tipo de catalizador utilizado. Se realizan 10 observaciones con cada catalizador, y se obtienen los datos siguientes:

Catalizador 1: 57.9, 66.2, 65.4, 65.4, 65.2, 62.6, 67.6, 63.7, 67.2, 71.0

Catalizador 2: 66.4, 71.7, 70.3, 69.3, 64.8, 69.6, 68.6, 69.4, 65.3, 68.8

a. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las medias de las concentraciones activas para los dos catalizadores.

b. ¿Existe alguna evidencia que indique que las concentraciones activas medias dependen del catalizador utilizado?

7-4 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL, VARIANZA DESCONOCIDA

Supóngase que se desea encontrar un intervalo de confianza para la media de una distribución, pero que la varianza no es conocida. De manera específica, supóngase que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y que $\bar{X}$ y S^2 son la media y la varianza muestrales, respectivamente. Una posibilidad sería remplazar σ en las fórmulas del intervalo de confianza para μ con varianza conocida (ecuaciones 7-8, 7-10 y 7-11) con el valor calculado de la desviación estándar muestral s. Si el tamaño de la muestra, n, es relativamente grande (por ejemplo, $n > 30$), entonces éste es un procedimiento aceptable. En consecuencia, a menudo los intervalos de confianza de las secciones 7-2 y 7-3 reciben el nombre de **intervalos de confianza para muestras grandes**, debido a que son aproximadamente válidos incluso si las varianzas no conocidas de la población se remplazan con las varianzas muestrales correspondientes. Nótese que en el problema de dos muestras, sección 7-3, tanto n_1 como n_2 deben ser mayores que 30.

Cuando el tamaño de las muestras es pequeño, el enfoque anterior no funciona, y entonces debe emplearse otro procedimiento. Para producir un intervalo de confianza válido, debe hacerse una hipótesis más fuerte con respecto a la población de interés. La hipótesis usual es que la población está distribuida de manera normal. Esto conduce a intervalos de confianza basados en distribuciones t. De manera específica, sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una mues-

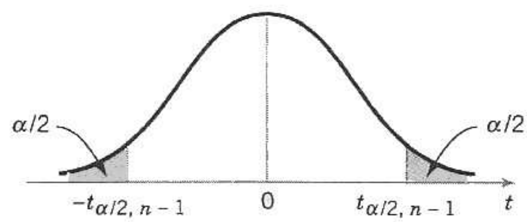


Figura 7-4 Distribución t.

tra aleatoria tomada de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 desconocidas. En la sección 6-8 se determinó que la distribución de muestreo de la estadística

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

es la distribución t con $n - 1$ grados de libertad. A continuación se indica cómo obtener el intervalo de confianza para μ.

La figura 7-4 presenta la distribución de $T = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$. Sea $t_{\alpha/2,\,n-1}$ el punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad. De la figura 7-4 se observa que

$$P(-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha$$

o

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha$$

Después de reacomodar la ecuación anterior, se tiene que

$$P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\, S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\, S/\sqrt{n}) = 1 - \alpha \qquad (7\text{-}17)$$

La comparación entre las ecuaciones 7-17 y 7-1 conduce a la siguiente definición del intervalo de confianza bilateral del $100(1 - \alpha)$ por ciento para μ.

Definición: Intervalo de confianza para la media de una distribución normal, varianza desconocida

Si $\overline{x}$ y s son la media y la desviación estándar de una muestra aleatoria tomada de una distribución normal con varianza σ^2 desconocida, entonces un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para μ está dado por

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}\, s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}\, s/\sqrt{n} \qquad (7\text{-}18)$$

donde $t_{\alpha/2,\,n-1}$ es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad.

Recuérdese que este intervalo de confianza supone que el muestreo se hace sobre una población normal. Esta hipótesis tiene una importancia moderada para muestras pequeñas. Por fortuna, la hipótesis de normalidad es válida en muchas situaciones prácticas. Cuando no es éste el caso, entonces deben emplearse intervalos de confianza independientes de la distribución, o no paramétricos. Los métodos no paramétricos se estudian en el capítulo 13. Sin embargo, cuando la población es normal, los intervalos de la distribución t son los intervalos de conformidad del $100(1 - \alpha)$ por ciento más pequeños posible, y también son superiores a los proporcionados por los métodos no paramétricos.

EJEMPLO 7-4

Un artículo publicado en el *Journal of Testing and Evaluation* (Vol. 10, No. 4, 1982, pág. 133) presenta las siguientes 20 mediciones del tiempo de combustión residual (en segundos) de especímenes tratados de ropa de dormir para niños:

9.85	9.93	9.75	9.77	9.67
9.87	9.67	9.94	9.85	9.75
9.83	9.92	9.74	9.99	9.88
9.95	9.95	9.93	9.92	9.89

Se desea encontrar un intervalo de confianza del 95% para el tiempo de combustión residual promedio. Supóngase que el tiempo de combustión residual sigue una distribución normal.

La media y la desviación estándar muestrales son

$$\bar{x} = 9.8525$$
$$s = 0.0965$$

De la tabla IV del apéndice se tiene que $t_{0.025,19} = 2.093$. Los límites de confianza del 95% inferior y superior son

$$\begin{aligned} l &= \bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\, s/\sqrt{n} \\ &= 9.8525 - 2.093(0.0965)/\sqrt{20} \\ &= 9.8073 \text{ seg} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u &= \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\, s/\sqrt{n} \\ &= 9.8525 + 2.093(0.0965)/\sqrt{20} \\ &= 9.8977 \text{ seg} \end{aligned}$$

Por consiguiente, el intervalo de confianza del 95% es

$$9.8073 \text{ seg} \leq \mu \leq 9.8977 \text{ seg}$$

Por tanto, se tiene una confianza del 95% de que el tiempo de combustión residual promedio se encuentra entre 9.8073 y 9.8977 segundos.

Selección del tamaño de la muestra

La selección del tamaño n de la muestra necesario para proporcionar un intervalo de confianza de la longitud requerida no es tan fácil como en el caso donde se conoce σ, debido a que la longitud del intervalo depende tanto del valor de σ (el cual no se conoce antes de recopilar los datos), como del tamaño n de la muestra. Por otra parte, n ingresa al intervalo de confianza a través de los términos $1/\sqrt{n}$ y $t_{\alpha/2,\, n-1}$. En consecuencia, el tamaño n de la muestra debe obtenerse a partir de un procedimiento de prueba y error, utilizando una estimación previa de σ (la cual puede basarse en la experiencia). Otra posibilidad es tomar una muestra preliminar de n observaciones para obtener una estimación de σ. Luego, utilizando el valor de s calculado a partir de esta muestra como aproximación de σ, puede emplearse la ecuación 7-9 para calcular el valor requerido de n que proporciona la exactitud y nivel de confianza deseados.

Intervalos de confianza unilaterales

Es fácil encontrar intervalos de confianza unilaterales para la media de una distribución normal donde la varianza no es conocida. El intervalo de confianza inferior del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ está dado por

$$\bar{x} - t_{\alpha,n-1}s/\sqrt{n} \leq \mu \qquad (7\text{-}19)$$

y el intervalo de confianza superior del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ es

$$\mu \leq \bar{x} + t_{\alpha,n-1}s/\sqrt{n} \qquad (7\text{-}20)$$

7-5 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS DE DOS DISTRIBUCIONES NORMALES, VARIANZAS DESCONOCIDAS

En esta sección se extienden los resultados de la sección 7-4 al caso de dos poblaciones con medias y varianzas desconocidas, y se desea encontrar intervalos de confianza para la diferencia entre medias $\mu_1 - \mu_2$. Si los tamaños de las muestras n_1 y n_2 son mayores que 30, entonces puede emplearse el intervalo de la distribución normal de la sección 7-2. Sin embargo, cuando se toman muestras pequeñas se supone que las poblaciones de interés están distribuidas de manera normal, y los intervalos de confianza se basan en la distribución t.

Considérense dos variables aleatorias normales independientes, X_1 con media μ_1 y varianza σ_1^2, y X_2 con media μ_2 y varianza σ_2^2, por ejemplo. Tanto las medias μ_1 y μ_2 como las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas. Sin embargo, considérese que es razonable suponer que las dos varianzas son iguales; esto es, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Se desea encontrar un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para la diferencia entre medias $\mu_1 - \mu_2$.

Se toman muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2 de las dos poblaciones representadas por X_1 y X_2, respectivamente; sean $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ las medias muestrales, y S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales. Puesto que S_1^2 y S_2^2 son estimadores de la varianza común σ^2, entonces puede obtenerse un estimador combinado de σ^2, mejor que S_1^2 o S_2^2 por separado. Este estimador es

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \tag{7-21}$$

Para desarrollar el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$, nótese que la distribución de la estadística

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

es la distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad. Por tanto, de la figura 7-4,

$$P(-t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \leq T \leq t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}) = 1 - \alpha$$

o

$$P\left(-t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \leq \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \leq t_{\alpha/2, n_1-n_2-2}\right) = 1 - \alpha$$

La expresión anterior puede escribirse como

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2\right.$$

$$\left.\leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = 1 - \alpha \tag{7-22}$$

El examen de la ecuación 7-22 conduce a la siguiente definición de intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

Definición: Intervalo de confianza para la diferencia entre medias de dos distribuciones normales, varianzas desconocidas pero iguales

Si $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1^2 y s_2^2 son las medias y las varianzas de dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas pero iguales, entonces un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para la diferencia entre medias $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$
$$\leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \qquad (7\text{-}23)$$

donde $s_p = \sqrt{[(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2]/(n_1+n_2-2)}$ es el estimador combinado de la desviación estándar común de la población, y $t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$ es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

EJEMPLO 7-5

Un artículo publicado en el *Hazardous Waste and Hazardous Materials* (Vol. 6, 1989) dio a conocer los resultados de un análisis del peso de calcio en cemento estándar y en cemento contaminado con plomo. Los niveles bajos de calcio indican que el mecanismo de hidratación del cemento queda bloqueado y esto permite que el agua ataque varias partes de una estructura de cemento. Al tomar diez muestras de cemento estándar, se encontró que el peso promedio de calcio es $\bar{x}_1 = 90.0$, con una desviación estándar muestral $s_1 = 5.0$; los resultados obtenidos con 15 muestras de cemento contaminado con plomo fueron $\bar{x}_2 = 87.0$ y $s_2 = 4.0$.

Supóngase que el porcentaje de peso de calcio está distribuido de manera normal. Encuéntrese un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre medias $\mu_1 - \mu_2$ de los dos tipos de cemento. Por otra parte, supóngase que las dos poblaciones normales tienen la misma desviación estándar.

El estimador combinado de la desviación estándar común se obtiene con la ecuación 7-21 de la siguiente manera:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$
$$= \frac{9(5.0)^2 + 14(4.0)^2}{10 + 15 - 2}$$
$$= 19.52$$

Por tanto, la estimación combinada de la desviación estándar es $s_p = \sqrt{19.52} = 4.4$. El intervalo del confianza del 95% se obtiene con la ecuación 7-23:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{0.025,23}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{0.025,23}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

o, después de sustituir los valores muestrales y utilizar $t_{0.025,23} = 2.069$,

$$90.0 - 87.0 - 2.069(4.4)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} \leq \mu_1 - \mu_2$$

$$\leq 90.0 - 87.0 + 2.069(4.4)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}$$

expresión que se reduce a

$$-0.72 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 6.72$$

Nótese que el intervalo de confianza del 95% incluye al cero; por consiguiente, para este nivel de confianza, no puede concluirse la existencia de una diferencia entre las medias. Dicho de otra manera, no hay evidencia alguna de que la contaminación del cemento por plomo tenga efecto sobre el peso promedio de calcio; en consecuencia, con un nivel de confianza del 95%, no es posible afirmar que la presencia del plomo afecte este aspecto del mecanismo de hidratación

Intervalos de confianza unilaterales

Es sencillo construir intervalos de confianza unilaterales para la diferencia entre medias con varianzas desconocidas pero iguales. El intervalo de confianza inferior del $100(1-\alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha,n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \qquad (7\text{-}24)$$

mientras que el intervalo de confianza superior del $100(1-\alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha,n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \qquad (7\text{-}25)$$

Varianzas desiguales

En muchas situaciones no es razonable suponer que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Aun cuando no pueda garantizarse esta hipótesis, puede hallarse un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$ utilizando el hecho de que la estadística

$$T^* = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

tiene, de manera aproximada, una distribución t con grados de libertad dados por

$$v = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 + 1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 + 1}} - 2 \tag{7-26}$$

Por tanto

$$P(-t_{\alpha/2,\,v} \leq T^* \leq t_{\alpha/2,\,v}) \cong 1 - \alpha$$

El intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ puede obtenerse si se sustituye T^* en esta expresión y se despeja el término $\mu_1 - \mu_2$ entre las desigualdades.

Definición: Intervalo de confianza para la diferencia entre medias de dos distribuciones normales, varianzas desconocidas y desiguales

Si $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1^2 y s_2^2 son las medias y las varianzas de dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas y desiguales, entonces un intervalo de confianza aproximada del $100(1-\alpha)$ por ciento para la diferencia entre medias $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,\,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,\,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{7-27}$$

donde v está dada por la ecuación 7-26 y $t_{\alpha/2,\,v}$ es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución t con v grados de libertad.

Los límites de confianza unilaterales superior e inferior puede obtenerse al remplazar el límite de confianza inferior (superior) con $-\infty$ (∞) y cambiando $\alpha/2$ por α.

Tabla 7-2 Tiempo en segundos para estacionar en batería dos automóviles

	Automóvil		Diferencia
Sujeto	1 (x_{1j})	2 (x_{2j})	(d_j)
1	37.0	17.8	19.2
2	25.8	20.2	5.6
3	16.2	16.8	−0.6
4	24.2	41.4	−17.2
5	22.0	21.4	0.6
6	33.4	38.4	−5.0
7	23.8	16.8	7.0
8	58.2	32.2	26.0
9	33.6	27.8	5.8
10	24.4	23.2	1.2
11	23.4	29.6	−6.2
12	21.2	20.6	0.6
13	36.2	32.2	4.0
14	29.8	53.8	−24.0

7-6 INTERVALO DE CONFIANZA PARA $\mu_1 - \mu_2$ PARA OBSERVACIONES PAREADAS

En las secciones 7-3 y 7-5 se obtuvieron intervalos de confianza para la diferencia entre medias, donde se toman dos muestras aleatorias independientes de dos poblaciones de interés. Esto es, se toma una muestra de n_1 observaciones de la primera población, y una muestra aleatoria completamente independiente de n_2 observaciones de la segunda población. En muchas situaciones experimentales, existen sólo n unidades experimentales diferentes y los datos están recopilados por pares; esto es, cada unidad experimental está formada por dos observaciones.

Por ejemplo, la revista *Human Factors* (1962, págs. 375-380) notificó un estudio en el que se les pidió a 14 sujetos que estacionaran dos automóviles sustancialmente distintos en cuanto al tamaño de la llanta y la relación de vueltas del volante. Para cada automóvil y para cada sujeto se asentó el tiempo, en segundos, necesario para realizar la maniobra; los datos resultantes aparecen en la tabla 7-2. Nótese que cada sujeto es la "unidad experimental" mencionada anteriormente. Se desea obtener un intervalo de confianza para la diferencia entre el tiempo promedio para estacionar los dos automóviles, $\mu_1 - \mu_2$, por ejemplo.

En general, supóngase que los datos consisten de n pares (X_{11}, X_{21}), (X_{12}, X_{22}), . . . , (X_{1n}, X_{2n}). Las variables aleatorias X_1 y X_2 tienen medias μ_1 y μ_2, respectivamente. Sea D_j la diferencia entre las variables aleatorias en el j-ésimo par, esto es, $D_j = X_{1j} - X_{2j}$. Supóngase que las diferencias están distribuidas de manera normal con media μ_D y varianza σ_D^2. Las variables aleatorias dentro de *pares diferentes* son independientes. Sin embargo, dado que existen dos mediciones de la misma unidad experimental, es posible las dos mediciones *dentro del mismo par* no sean independientes. Considérense las n diferencias $D_1 = X_{11} - X_{21}$,

$D_2 = X_{12} - X_{22}, \ldots, D_n = X_{1n} - X_{2n}$. Puede demostrarse con facilidad que la media μ_D de la variable aleatoria D es

$$\mu_D = E(D) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \mu_1 - \mu_2$$

debido a que el valor esperado de $X_1 - X_2$ es la diferencia en los valores esperados, sin importar si X_1 y X_2 son independientes.

La varianza de la diferencia es

$$\sigma_D^2 = V(X_1 - X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \operatorname{cov}(X_1, X_2)$$

Por tanto, la media de las diferencias μ_D se estima con $\overline{D}$, el promedio muestral de las D_j, mientras que σ_D^2 se estima con S_D^2, la varianza muestral de las diferencias D_j.

De manera intuitiva puede sospecharse que σ_D^2 es más pequeña que $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, dado que si la unidad experimental es homogénea, entonces el término de covarianza es positivo. Así, si las unidades experimentales son tales que existen *entre* ellas diferencias relativamente grandes y homogeneidad aproximada dentro de las mismas, entonces se espera que los pares de observaciones den como resultado una mejora importante en la longitud del intervalo de confianza. Por ejemplo, debe esperarse que los 14 sujetos de la tabla 7-2 sean muy diferentes en cuanto a su habilidad para estacionar un automóvil, pero cada uno debe desempeñarse de manera muy similar cuando estacione los dos automóviles.

Para construir el intervalo de confianza, nótese que

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}}$$

sigue una distribución t con $n - 1$ grados de libertad. Entonces, puesto que

$$P(-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha$$

puede sustituirse T en la expresión anterior y llevar a cabo los pasos necesarios para despejar $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ entre las desigualdades. Esto conduce a la siguiente definición del intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para $\mu_1 - \mu_2$.

Definición: Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ para observaciones pareadas

Si $\overline{d}$ y s_d son la media y la desviación estándar muestrales de la diferencia de n pares aleatorios de mediciones normalmente distribuidas, entonces un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para la diferencia entre medias $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ es

$$\overline{d} - t_{\alpha/2,n-1}\, s_d/\sqrt{n} \leq \mu_d \leq \overline{d} + t_{\alpha/2,n-1}\, s_d/\sqrt{n} \tag{7-28}$$

donde $t_{\alpha/2,\,n-1}$ es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje superior $\alpha/2$ de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad.

Este intervalo de confianza es válido para el caso donde $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, debido a que s_D^2 estima $\sigma_D^2 = V(X_1 - X_2)$. Asimismo, para muestras grandes ($n \geq 30$ pares, por ejemplo) la hipótesis explícita de la normalidad para cada observación es innecesaria debido al teorema del límite central.

EJEMPLO 7-6

Considérense de nuevo los datos de la tabla 7-2, los cuales tienen que ver con el tiempo que requieren $n = 14$ sujetos para estacionar en batería dos automóviles. A partir de la columna de diferencias observadas se calcula $\bar{d} = 1.21$ y $s_d = 12.68$. El intervalo de confianza del 90% para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ se obtiene a partir de la ecuación 7-28 de la siguiente manera:

$$\bar{d} - t_{0.05,13}\, s_d/\sqrt{n} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{0.05,13} s_d/\sqrt{n}$$

$$1.21 - 1.771(12.68)/\sqrt{14} \leq \mu_D \leq 1.21 + 1.771(12.68)/\sqrt{14}$$

$$-4.79 \leq \mu_D \leq 7.21$$

Nótese que el intervalo de confianza para μ_D incluye al cero. Esto implica que, con un nivel de confianza del 90%, los datos no apoyan la afirmación de que los automóviles tienen diferentes tiempos promedio de estacionamiento μ_1 y μ_2. Esto es, el valor $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$ no es inconsistente con los datos observados.

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 7-4, 7-5 Y 7-6

7-15. Un ingeniero civil hace pruebas con la resistencia a la compresión del concreto. Para ello examina 12 especímenes y obtiene los siguientes datos:

2216	2237	2249	2204
2225	2301	2281	2263
2318	2255	2275	2295

a. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la resistencia promedio.

b. Construya un intervalo de confianza inferior del 95% para la resistencia promedio.

7-16. Una máquina produce las varillas de metal utilizadas en el sistema de suspensión de un automóvil. Se toma una muestra aleatoria de 15 varillas y se mide el diámetro. Los datos obtenidos aparecen abajo. Suponga que el diámetro de la varilla tiene una distribución normal. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para el diámetro promedio de la varilla.

8.24 mm	8.23 mm	8.20 mm
8.21	8.20	8.28
8.23	8.26	8.24
8.25	8.19	8.25
8.26	8.23	8.24

7-17. Un ingeniero de control de calidad midió el espesor de la pared de 25 botellas de vidrio de dos litros. La media muestral es $\bar{x} = 4.05$ mm, mientras que la desviación estándar muestral es $s = 0.08$ mm. Encuentre un intervalo de confianza del 90% para la media del espesor de la pared de las botellas.

7-18. Un artículo publicado en *Nuclear Engineering International* (febrero de 1988, pág. 33) describe varias características de las varillas de combustible utilizadas en un reactor propiedad de una empresa noruega de electricidad. Las mediciones notificadas sobre el porcentaje de enriquecimiento de 12 varillas son las siguientes:

2.94	2.75	2.75	2.81
2.90	2.90	2.82	2.95
3.00	2.95	3.00	3.05

Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 99% para el porcentaje promedio de enriquecimiento. ¿Está usted de acuerdo con la afirmación de que el porcentaje promedio de enriquecimiento es del 2.95%? ¿Por qué?

7-19. Un artículo publicado en el *Journal of Composite Materials* (diciembre de 1989, Vol. 23, pág. 1200) describe el efecto de la perdida de láminas sobre la frecuencia natural, de vigas formadas por varias láminas. Se sujetaron cinco vigas con pérdida de láminas a varias cargas, y las frecuencias resultantes fueron las siguientes (en Hz):

230.66, 233.05, 232.58, 229.48, 232.58

Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 90% para la frecuencia natural.

7-20. Una máquina de bebidas con mezclado posterior se ajusta de modo que libere cierta cantidad de jarabe en una cámara donde será mezclado con agua carbonatada. De una muestra aleatoria de 25 bebidas se tiene que el contenido medio de jarabe es $\bar{x} = 1.10$ onzas de líquido, con una desviación estándar $s = 0.015$ onzas de líquido. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 90% para la cantidad promedio de jarabe mezclado en cada bebida.

7-21. Se investiga el diámetro de las varillas de acero fabricadas en dos diferentes máquinas de extrusión. Para ello se toman dos muestras aleatorias de tamaños $n_1 = 15$ y $n_2 = 18$; las medias y las varianzas muestrales son $\bar{x}_1 = 8.73$, $s_1^2 = 0.35$, $\bar{x}_2 = 8.68$ y $s_2^2 = 0.40$, respectivamente. Suponga que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la diferencia en el diámetro promedio de la varilla.

7-22. Se toman dos muestras aleatorias de tamaños $n_1 = 15$ y $n_2 = 10$ de dos termocoples diferentes. Las medias y las varianzas muestrales son $\bar{x}_1 = 300$, $s_1^2 = 16$, $\bar{x}_2 = 305$ y $s_2^2 = 49$. Suponga que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para $\mu_1 - \mu_2$. ¿Qué conclusión puede obtenerse sobre las lecturas de temperatura promedio de los dos termocoples?

7-23. En un proceso químico pueden emplearse dos catalizadores. Doce lotes se prepararon con el catalizador 1, lo que dio como resultado un rendimiento promedio de 86 y una desviación estándar muestral de 3. Quince lotes se prepararon con el catalizador 2, con el que se obtuvo un rendimiento promedio de 89 con una desviación estándar de 2. Suponga que las mediciones de rendimiento están aproximadamente distribuidas de manera normal. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 99% para la diferencia en el rendimiento promedio de los dos catalizadores.

7-24. Un artículo publicado en *Fire Technology* investigó dos agentes dispersores de espuma que pueden emplearse en las boquillas de los equipos extinguidores de fuego. Al tomar una muestra aleatoria de cinco observaciones con una espuma que forma una película acuosa (AFFF), se obtuvo una media muestral de 4.7 y una desviación estándar de 0.6. Una muestra aleatoria de cinco observaciones con concentrados de tipo alchólico (ATC) tuvo una media muestral de 6.9 y una desviación estándar de 0.8. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en la dispersión de espuma promedio de estos dos agentes. ¿Puede obtenerse alguna conclusión sobre qué agente produce la mayor dispersión de espuma? Suponga que ambas poblaciones están bien representadas por distribuciones normales que tienen las mismas desviaciones estándar.

7-25. Un científico de la computación está investigando la utilidad de dos lenguajes de diseño para mejorar las tareas de programación. Se pide a doce programadores expertos, familiarizados con los dos lenguajes, que codifiquen una función estándar en ambos lenguajes, anotando el tiempo, en minutos, que requieren para hacer esta tarea. Los datos obtenidos son los siguientes:

	Tiempo	
Programador	Lenguaje de diseño 1	Lenguaje de diseño 2
1	17	18
2	16	14
3	21	19
4	14	11
5	18	23
6	24	21
7	16	10
8	14	13
9	21	19
10	23	24
11	13	15
12	18	20

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en los tiempos de codificación promedio. ¿Existe algo que indique una preferencia por alguno de los lenguajes?

7-26. El administrador de un lote de automóviles prueba dos marcas de llantas radiales. Para ello asigna al azar una llanta de cada marca a las dos ruedas posteriores de ocho automóviles, y luego corre los automóviles hasta que las llantas se desgastan. Los datos obtenidos (en kilómetros) aparecen en la siguiente tabla. Encuentre un intervalo de confianza del 99% para la diferencia en el tiempo promedio de duración. Con base en estos cálculos, ¿qué llanta es la que usted preferiría?

Automóvil	Marca 1	Marca 2
1	36 925	34 318
2	45 300	42 280
3	36 240	35 500
4	32 100	31 950
5	37 210	38 015
6	48 360	47 800
7	38 200	37 810
8	33 500	33 215

7-27. Un artículo publicado en el *Journal of Aircraft* (Vol. 23, 1986, págs. 859-864) describe la formulación de un método nuevo para el análisis de placas que es capaz de modelar estructuras de aeroplanos, tales como el armazón del ala, y que produce resultados similares a los obtenidos con el método del elemento finito, el cual emplea muchos más cálculos. Se calculan las frecuencias de vibración naturales para el armazón de un ala utilizando para ello ambos métodos. Los resultados obtenidos para las siete primeras frecuencias naturales son los siguientes:

No.	Elemento finito, ciclos/s	Placa equivalente, ciclos/s
1	14.58	14.76
2	48.52	49.10
3	97.22	99.99
4	113.99	117.53
5	174.73	181.22
6	212.72	220.14
7	277.38	294.80

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia promedio entre los dos métodos.

7-28. Considere los datos de viscosidad del polímero dados en el ejercicio 7-13. Suponga que la viscosidad está normalmente distribuida.

a. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 90% para la viscosidad promedio del polímero, suponiendo que la desviación estándar σ es desconocida.

b. Compare el intervalo de confianza obtenido en el inciso a) con el hallado en el ejercicio 7-13 (el caso de varianza conocida). ¿Qué intervalo es mayor? ¿Por qué?

7-29. Considere los datos de concentración activa del ejercicio 7-14. Suponga que la concentración activa está distribuida normalmente, y que la varianza de la concentración activa de ambos tipos de catalizadores es desconocida.

a. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las medias de las concentraciones activas, suponiendo que ambas varianzas son iguales.

b. Compare la longitud del intervalo de confianza calculado en el inciso a) con la longitud del intervalo de confianza obtenido en el ejercicio 7-14. ¿Qué intervalo es mayor? ¿Por qué?

c. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las concentraciones activas promedio, suponiendo que las varianzas no son iguales. Compare este intervalo de confianza con el obtenido en el inciso a). ¿Cuán diferentes son los intervalos?

7-30. La pintura para autopista se surte en dos colores: blanco y amarillo. El interés se centra en el tiempo de secado de la pintura; se sospecha que la pintura de color amarillo se seca más rápidamente que la blanca. Se obtienen mediciones de ambos tipos de pintura. Los tiempos de secado (en minutos) son los siguientes:

Blanca: 120, 132, 123, 122, 140, 110, 120, 107

Amarilla: 126, 124, 116, 125, 109, 130, 125, 117, 129, 120

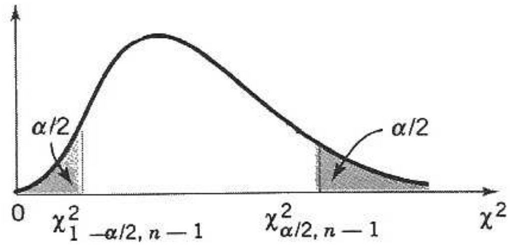


Figura 7-5 Distribución χ^2_{n-1}

a. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre los tiempos de secado promedio, suponiendo que las desviaciones estándar de éstos son iguales. Suponga que el tiempo de secado está distribuido de manera normal.

b. ¿Existe alguna evidencia que indique que la pintura amarilla se seca más rápidamente que la blanca?

7-7 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA VARIANZA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Supóngase que se desea encontrar una estimación del intervalo de confianza para la varianza σ^2 de una población normal. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n tomada de esta población normal, y si S^2 es la varianza muestral, entonces S^2 es un estimador puntual razonable de σ^2. Por otra parte, S^2 se utiliza para encontrar el intervalo de confianza de σ^2.

En el capítulo 6 se demostró que si la población es normal, la distribución de muestreo de

$$X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

es ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad. Esta distribución aparece en la figura 7-5. Para desarrollar el intervalo de confianza, de la figura 7-5 se nota que

$$P(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leq X \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha$$

de modo que

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha$$

La expresión anterior puede escribirse como

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) = 1 - \alpha. \tag{7-29}$$

La comparación de la ecuación 7-29 con la 7-1 conduce a la siguiente definición del intervalo de confianza para σ^2.

Definición: Intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal

Si s^2 es la varianza muestral de una muestra aleatoria de n observaciones tomadas de una distribución normal con varianza desconocida σ^2, entonces un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para σ^2 es

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \qquad (7\text{-}30)$$

donde $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ son los puntos críticos superior e inferior que corresponden al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, respectivamente.

Intervalos de confianza unilaterales

Para encontrar un intervalo de confianza inferior del $100(1-\alpha)$ por ciento para σ^2, se hace el límite de confianza superior de la ecuación 7-30 igual a ∞ y se remplaza $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ por $\chi^2_{\alpha,n-1}$, con lo que se tiene

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}} \leq \sigma^2 \qquad (7\text{-}31)$$

El intervalo de confianza superior del $100(1-\alpha)$ por ciento se obtiene al hacer el límite de confianza inferior de la ecuación 7-30 igual a cero y remplazar $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ con $\chi^2_{1-\alpha,n-1}$, lo que da como resultado

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}} \qquad \leftarrow \text{eugllia} \qquad (7\text{-}32)$$

EJEMPLO 7-7

Un fabricante de detergente líquido está interesado en la uniformidad de la máquina utilizada para llenar las botellas. De manera específica, es deseable que la desviación estándar σ del proceso de llenado sea menor que 0.5 onzas de líquido; de otro modo, existe un porcentaje mayor del deseable de botellas con un contenido menor de detergente. Supóngase que la distribución del volumen de llenado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas, se obtiene una varianza muestral $s^2 = 0.0153$ (onzas de fluido)^2. El

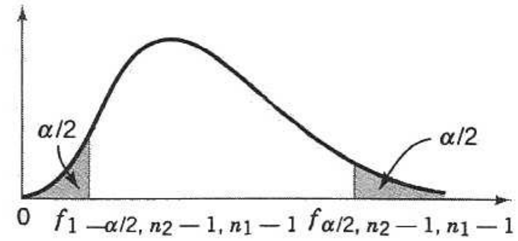


Figura 7-6 Distribución de $F_{n_2-1,\, n_1-1}$.

intervalo superior de confianza del 95% se obtiene a partir de la ecuación 7-32 de la siguiente manera:

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95,19}}$$

o

$$\sigma^2 \leq \frac{(19)0.0153}{10.117} = 0.0287 \text{ (onzas de líquido)}^2$$

La proposición anterior puede convertirse en un intervalo de confianza sobre la desviación estándar σ al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, lo que da como resultado

$$\sigma \leq 0.17$$

Por consiguiente, con un nivel de confianza del 95%, los datos no apoyan la afirmación de que la desviación estándar del proceso es menor que 0.15 onzas de líquido.

7-8 INTERVALO DE CONFIANZA PARA EL COCIENTE DE VARIANZAS DE DOS DISTRIBUCIONES NORMALES

Supóngase que se tienen dos poblaciones normales e independientes con varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente. De este par de poblaciones, se tienen disponibles dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2, respectivamente; sean S_1^2 y S_2^2 las dos varianzas muestrales. Se desea encontrar un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para el cociente de las dos varianzas, σ_1^2/σ_2^2.

Para hallar el intervalo de confianza, recuérdese que la distribución de muestreo de

$$F = \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2}$$

es una F con $n_2 - 1$ y $n_1 - 1$ grados de libertad. Esta distribución aparece en la figura 7-6. De esta figura,

$$P(f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq F \leq f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}) = 1 - \alpha$$

de modo que

$$P\left(f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \leq f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}\right) = 1 - \alpha$$

Por consiguiente,

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}\right) = 1 - \alpha \tag{7-33}$$

La comparación de las ecuaciones 7-33 y 7-1 conduce a la siguiente definición del intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2.

Definición: Intervalo de confianza para el cociente de las varianzas de dos distribuciones normales

Si s_1^2 y s_2^2 son las varianzas muestrales de dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2, respectivamente, tomadas de dos poblaciones normales e independientes con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas, entonces un intervalo de confianza del 100(1 – α) por ciento para el cociente σ_1^2/σ_2^2 es

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \tag{7-34}$$

donde $f_{\alpha/2,\,n_2-1,\,n_1-1}$ y $f_{1-\alpha/2,\,n_2-1,\,n_1-1}$ son los puntos críticos superior e inferior que corresponden al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución F con $n_2 - 1$ y $n_1 - 1$ grados de libertad en el numerador y en el denominador, respectivamente.

En la ecuación 7-43 se requiere el punto que corresponde al porcentaje de la cola inferior de la distribución F. El punto crítico inferior que corresponde al porcentaje $1 - \alpha/2$ puede calcularse a partir del punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ con la expresión

$$f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} = \frac{1}{f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} \tag{7-35}$$

Intervalos de confianza unilaterales

También es posible construir intervalos de confianza unilaterales para el cociente de las varianzas σ_1^2/σ_2^2. Un límite inferior de confianza del 100(1 – α) por ciento para σ_1^2/σ_2^2 es

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha, n_2-1, n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \tag{7-36}$$

y un límite superior de confianza del 100(1 – α) por ciento para σ_1^2/σ_2^2 es

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha, n_2-1, n_1-1} \tag{7-37}$$

EJEMPLO 7-8

Una compañía fabrica propulsores para uso en motores de turbina. Una de las operaciones consiste en esmerilar el terminado de una superficie particular con una aleación de titanio. Pueden emplearse dos procesos de esmerilado, y ambos pueden producir partes que tienen la misma rugosidad superficial promedio. Al ingeniero de manufactura le gustaría seleccionar el proceso que tenga la menor variabilidad en la rugosidad de la superficie. Para ello toma una muestra de $n_1 = 12$ partes del primer proceso, la cual tiene una desviación estándar muestral $s_1 = 5.1$ micropulgadas, y una muestra aleatoria de $n_2 = 15$ partes del segundo proceso, la cual tiene una desviación estándar muestral $s_2 = 4.7$ micropulgadas. Se desea encontrar un intervalo de confianza del 90% para el cociente de las dos varianzas σ_1^2/σ_2^2.

Si se supone que los dos procesos son independientes y que la rugosidad de la superficie está distribuida de manera normal, entonces puede emplearse la ecuación 7-34 de la siguiente manera:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0.95,14,11} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0.05,14,11}$$

$$\frac{(5.1)^2}{(4.7)^2} 0.39 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{(5.1)^2}{(4.7)^2} 2.74$$

o

$$0.46 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 3.23$$

Nótese que se ha hecho uso de la ecuación 7-35 para encontrar $f_{0.95,14,11} = 1/f_{0.05,11,14} = 1/2.58 = 0.39$. Puesto que este intervalo de confianza incluye a la unidad, no es posible afirmar que las desviaciones estándar de la rugosidad de la superficie de los dos procesos sean diferentes con un nivel de confianza del 90%.

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 7-7 Y 7-8

7-31. Considere los datos del ejercicio 7-13. Construya lo siguiente:

a. Un intervalo de confianza bilateral del 95% para σ^2.

b. Un intervalo de confianza inferior del 95% para σ^2.

c. Un intervalo de confianza superior del 95% para σ^2.

7-32. Considere los datos del ejercicio 7-15. Construya lo siguiente.

a. Un intervalo de confianza bilateral del 99% para σ^2.

b. Un intervalo de confianza inferior del 99% para σ^2.

c. Un intervalo de confianza superior del 99% para σ^2.

7-33. Considere los datos del ejercicio 7-16. Construya lo siguiente:

a. Un intervalo de confianza bilateral del 95% para σ^2.

b. Un intervalo de confianza inferior del 90% para σ^2.

c. Un intervalo de confianza superior del 99% para σ^2.

7-34. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la varianza de los datos de espesor del ejercicio 7-17.

7-35. En una muestra aleatoria de 30 focos, la desviación estándar muestral de la duración de un foco es de 12.6 horas. Calcule un intervalo de confianza superior del 90% para la varianza de la duración del foco.

7-36. Considere los datos del ejercicio 7-21. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para el cociente de las varianzas poblacionales σ_1^2/σ_2^2. ¿Parece razonable concluir que las dos varianzas son iguales?

7-37. Considere los datos del ejercicio 7-14. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para el cociente de las dos varianzas σ_1^2/σ_2^2. ¿Parece razonable concluir que las dos varianzas son iguales?

7-38. Considere los datos del ejercicio 7-22. Construya lo siguiente:

a. Un intervalo de confianza bilateral del 90% para σ_1^2/σ_2^2.

b. Un intervalo de confianza bilateral del 95% para σ_1^2/σ_2^2.
Compare el ancho de este intervalo con el del obtenido en el inciso a).

c. Un intervalo de confianza inferior del 90% para σ_1^2/σ_2^2.

7-39. Construya un intervalo de confianza bilateral del 90% para el cociente de las varianzas σ_1^2/σ_2^2 utilizando los datos del ejercicio 7-24.

7-9 INTERVALO DE CONFIANZA PARA UNA PROPORCIÓN

A menudo es necesario construir un intervalo de confianza para una proporción. Por ejemplo, supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño n de una población grande (posiblemente infinita) y que $X(\leq n)$ observaciones de esta muestra pertenecen a una clase de interés. Entonces $\hat{P} = X/n$ es un estimador puntual de la proporción de la población p

que pertenece a esta clase. Nótese que n y p son los parámetros de una distribución binomial. Por otra parte, del capítulo 4, se sabe que la distribución de muestreo de $\hat{P}$ es aproximadamente normal con media p y varianza $p(1-p)/n$, si p no está muy próximo a 0 o 1 y si n es relativamente grande. Por tanto, la distribución de

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

es aproximadamente una distribución normal estándar.

Para construir el intervalo de confianza para p, nótese que

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) \simeq 1 - \alpha$$

de modo que

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \simeq 1 - \alpha$$

La expresión anterior puede escribirse como

$$P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \simeq 1 - \alpha \tag{7-38}$$

La cantidad $\sqrt{p(1-p)/n}$ de la ecuación 7-38 es el error estándar del estimador puntual $\hat{P}$. Desafortunadamente, los límites superior e inferior del intervalo de confianza obtenidos a partir de la ecuación 7-38 contienen el parámetro desconocido p. Sin embargo, una solución satisfactoria es remplazar p por $\hat{P}$ en el error estándar, lo que da como resultado

$$P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right) \simeq 1 - \alpha \tag{7-39}$$

La ecuación 7-39 conduce a un intervalo de confianza aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento para p.

Definición: Intervalo de confianza de una proporción

Si $\hat{p}$ es la proporción de observaciones de una muestra aleatoria de tamaño n que pertenece a una clase de interés, entonces un intervalo de confianza aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento para la proporción p de la población que pertenece a esta clase es

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{7-40}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución normal estándar.

Este procedimiento depende de la aproximación normal a la distribución binomial estudiada en el capítulo 4. Para ser conservadores de manera razonable, esto requiere que np y $n(1-p)$ sean mayores o iguales que 5. En situaciones donde esta aproximación es inapropiada (en particular, en casos donde n es pequeño), deben emplearse otros métodos. Las tablas de la distribución binomial también pueden emplearse para obtener un intervalo de confianza para p. Si n es grande pero p pequeño, entonces puede utilizarse una aproximación Poisson para la distribución binomial con la finalidad de construir intervalos de confianza. Sin embargo, los autores prefieren utilizar métodos numéricos basados en la función de probabilidad binomial, los cuales son implantados en programas de computadora.

EJEMPLO 7-9

En una muestra aleatoria de 85 soportes para el cigüeñal de un motor de automóvil, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo que las especificaciones permiten. Por consiguiente, una estimación puntual de la proporción de soportes en la población que exceden la especificación de rugosidad es $\hat{p} = x/n = 10/85 = 0.12$. Puede calcularse un intervalo de confianza bilateral del 95% para p a partir de la ecuación 7-40, de la siguiente manera

$$\hat{p} - z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

o

$$0.12 - 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}} \leq p \leq 0.12 + 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}}$$

cuya simplificación es

$$0.05 \leq p \leq 0.19$$

Selección del tamaño de la muestra

Puesto que $\hat{P}$ es el estimador puntual de p, puede definirse el error de estimar p por $\hat{P}$ como $E = |p - \hat{P}|$. Nótese que se tiene una confianza aproximada del $100(1-\alpha)$ por ciento de que este error es menor que $z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$. En el ejemplo 7-9 se tiene una confianza del 95% de que la proporción muestral $\hat{p} = 0.12$ difiere de la proporción verdadera p por una cantidad que no excede 0.07.

En situaciones donde puede seleccionarse el tamaño de la muestra, puede escogerse a n de modo que exista una confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento de que el error es menor que algún valor especificado E. Si se hace $E = z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)/n}$ y se resuelve para n, el tamaño apropiado de la muestra es

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 p(1-p) \tag{7-41}$$

Para utilizar la ecuación 7-41 se requiere una estimación de p. Si se tiene una estimación $\hat{p}$ de alguna muestra anterior, entonces p puede sustituirse por éste en la ecuación 7-41, o quizás sea posible hacer una estimación subjetiva. Si estas alternativas no son satisfactorias, entonces puede tomarse una muestra preliminar, calcular $\hat{p}$, y luego utilizar la ecuación 7-41 para determinar cuántas observaciones adicionales se necesitan para estimar p con la exactitud deseada. Otro enfoque para seleccionar n utiliza el hecho de que el tamaño de la muestra obtenido de la ecuación 7-41 siempre es máximo para $p = 0.5$ [esto es, $p(1-p) \leq 0.25$, cumpliéndose la igualdad cuando $p = 0.5$], y esto puede emplearse para obtener una cota superior sobre n. En otras palabras, al menos se tiene una confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento de que el error al estimar p con $\hat{p}$ sea menor que E si el tamaño de la muestra es

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (0.25) \tag{7-42}$$

EJEMPLO 7-10

Considérese la situación del ejemplo 7-9. ¿Cuán grande debe ser la muestra si se desea tener una confianza del 95% de que el error al utilizar $\hat{p}$ como estimación de p sea menor que 0.05? Al utilizar $\hat{p} = 0.12$ como un estimado inicial de p, se tiene, de la ecuación 7-41, que el tamaño requerido de la muestra es

$$n = \left(\frac{z_{0.025}}{E}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 0.12(0.88) \cong 163$$

Si se desea tener una confianza *por lo menos* del 95% de que la estimación $\hat{p}$ de la proporción verdadera p esté a no menos de 0.05 sin importar cuál sea el valor de p, entonces puede emplearse la ecuación 7-42 para determinar el tamaño de la muestra

$$n = \left(\frac{z_{0.025}}{E}\right)^2 (0.25) = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 (0.25) \cong 385$$

Nótese que si se tiene información relacionada con el valor de p, ya sea a partir de una muestra preliminar o de la experiencia, entonces puede emplearse una muestra más pequeña al mismo tiempo que se mantiene tanto la precisión deseada de la estimación así como el nivel de confianza.

Intervalos de confianza unilaterales

Pueden encontrarse intervalos de confianza unilaterales para p mediante una modificación sencilla de la ecuación 7-40. El intervalo de confianza inferior aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento es

$$\hat{p} - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \tag{7-43}$$

y el intervalo de confianza superior aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento es

$$p \leq \hat{p} + z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{7-44}$$

7-10 INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA DIFERENCIA DE DOS PROPORCIONES

Supóngase que existen dos proporciones de interés, p_1 y p_2, y es necesario obtener un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para la diferencia de éstas, $p_1 - p_2$. Supóngase que se toman dos muestras independientes de tamaño n_1 y n_2 de dos poblaciones infinitamente grandes. En estas dos muestras, sean X_1 el *número* de observaciones de la primera muestra que pertenece a la clase de interés, y X_2 el *número* de observaciones en la muestra tomada de la segunda población que pertenecen a la clase de interés. Entonces, X_1 y X_2 son variables aleatorias binomiales independientes con parámetros (n_1, p_1) y (n_2, p_2). Ahora bien, $\hat{P}_1 = X_1/n_1$ y $\hat{P}_2 = X_2/n_2$ son estimadores independientes de p_1 y p_2, respectivamente. Por otra parte, bajo la hipótesis de que se aplica la aproximación normal de una distribución binomial, la estadística

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

tiene una distribución que es aproximadamente normal estándar. Esto implica que

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) \simeq 1 - \alpha$$

de modo que puede sustituirse la Z de esta expresión y utilizar entonces un enfoque similar al empleado en la sección 7-9 para encontrar un intervalo de confianza aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento para $p_1 - p_2$.

Definición: Intervalo de confianza para la diferencia de dos proporciones

Si $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ son las proporciones muestrales de una observación en dos muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 que pertenecen a una clase de interés, entonces un intervalo de confianza aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento para la diferencia de las proporciones verdaderas $p_1 - p_2$ es

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$\leq p_1 - p_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \qquad (7\text{-}45)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico superior que corresponde al porcentaje $\alpha/2$ de la distribución normal estándar.

EJEMPLO 7-11

Considérese el proceso de fabricación de soportes para cigüeñales descrito en el ejemplo 7-9. Supóngase que se hace una modificación al proceso de acabado de la superficie y que, de manera subsecuente, se toma una segunda muestra aleatoria de 85 ejes. El número de ejes defectuosos en esta segunda muestra es 8. Por consiguiente, puesto que $n_1 = 85$, $\hat{p}_1 = 0.12$, $n_2 = 85$ y $\hat{p}_2 = 8/85 = 0.09$, puede obtenerse un intervalo de confianza aproximado del 95% para la diferencia en la proporción de los soportes defectuosos producidos por ambos procesos a partir de la ecuación 7-45, de la siguiente manera:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$\leq p_1 - p_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

o

$$0.12 - 0.09 - 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85} + \frac{0.09(0.91)}{85}}$$

$$\leq p_1 - p_2 \leq 0.12 - 0.09 + 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85} + \frac{0.09(0.91)}{85}}$$

Después de simplificar la expresión anterior, se tiene que

$$-0.06 \leq p_1 - p_2 \leq 0.12$$

Este intervalo de confianza incluye al cero, así que, con base en los datos muestrales, parece poco probable que los cambios hechos en el proceso de acabado de la superficie hayan reducido el número de soportes defectuosos para cigüeñal producidos por el proceso.

Intervalos de confianza unilaterales

El intervalo de confianza inferior aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento para $p_1 - p_2$ es

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \leq p_1 - p_2 \tag{7-46}$$

y el intervalo de confianza superior aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento para $p_1 - p_2$ es

$$p_1 - p_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \tag{7-47}$$

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 7-9 Y 7-10

7-40. De 1000 casos de cáncer pulmonar seleccionados al azar, 823 son de pacientes que fallecieron. Construya un intervalo de confianza bilateral del 95% para la tasa de mortalidad del cáncer pulmonar.

7-41. ¿Cuán grande debe ser el tamaño de la muestra requerida en el ejercicio 7-40 para tener una confianza de al menos el 95% de que el error al estimar la tasa de mortalidad del cáncer pulmonar sea menor que 0.03?

7-42. Se toma una muestra de 50 cascos de suspensión utilizados por los corredores de motocicletas y los conductores de automóviles de carreras, y se sujetan a una prueba de impacto. En 18 de los cascos se observa cierto daño.

- **a.** Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 95% para la verdadera proporción de cascos de este tipo que mostrarán daño como resultado de la prueba.
- **b.** Al utilizar la estimación puntual de p obtenida a partir de la muestra preliminar de 50 cascos, ¿cuántos cascos deben probarse para tener una confianza del 95% de que el error al estimar el verdadero valor de p sea menor que 0.02?
- **c.** ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea tener una confianza de al menos el 95% de que el error al estimar p sea menor que 0.02, sin importar el valor verdadero de p?

7-43. El departamento de transporte de cierto estado de Estados Unidos desea encuestar a los residentes para determinar a qué proporción de la población le gustaría incrementar los límites de velocidad de las carreteras estatales de 55 a 65 mph. ¿Cuántos residentes es necesario encuestar si se desea tener una confianza de al menos el 99% de que la proporción de la muestra esté a no más del 0.05 de la verdadera proporción?

7-44. Un fabricante de calculadoras electrónicas está interesado en estimar la fracción de unidades defectuosas producidas. Se toma una muestra aleatoria de 800 calculadoras, de las cuales 10 resultan defectuosas. Calcule un intervalo de confianza superior del 99% para la fracción de calculadoras defectuosas.

7-45. Se lleva a cabo un estudio para determinar el porcentaje de hogares donde hay al menos dos televisores. ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea tener una confianza del 99% de que el error al estimar esta cantidad es menor que 0.017?

7-46. Se lleva a cabo un estudio para determinar la efectividad de una nueva vacuna contra la gripe. Se administra la vacuna a una muestra aleatoria de 3000 sujetos, y de este grupo 13 contraen gripa. Como grupo de control se seleccionan al azar 2500 sujetos, a los cuales no se les administra la vacuna, y de este grupo 170 contraen gripe. Construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre proporciones $p_1 - p_2$.

7-47. Se analiza la fracción de productos defectuosos producidos por dos líneas de producción. Una muestra aleatoria de 100 unidades provenientes de la línea 1 contiene 10 que son defectuosas, mientras que una muestra aleatoria de 120 unidades de la línea 2 tiene 25 que son defectuosas. Encuentre un intervalo de confianza del 99% para la diferencia en fracciones de productos defectuosos producidos por las dos líneas.

7-11 TABLA RESUMEN DE PROCEDIMIENTOS PARA OBTENER INTERVALOS DE CONFIANZA

La tabla 7-3 contiene un resumen conveniente de todos los procedimientos para obtener intervalos de confianza presentados en este capítulo. Por brevedad, sólo aparecen las ecuaciones para intervalos de confianza bilaterales.

7-12 INTERVALOS DE TOLERANCIA

En este capítulo se ha hecho hincapié en los intervalos de confianza para los parámetros de una distribución. En algunas situaciones, el ingeniero está más interesado en el sitio donde pueden caer las *observaciones individuales* o mediciones que en estimar parámetros. Por ejemplo, si se fabrica una pieza que a fin de cuentas será ensamblada en un automóvil, entonces es probable que existan especificaciones sobre alguna dimensión crítica de la pieza y que el interés recaiga en la proporción de piezas manufacturadas que caen dentro de los límites de las especificaciones.

Un método que puede emplearse para determinar las cotas o límites sobre las observaciones individuales es encontrar un **intervalo de tolerancia** para una proporción fija de las observaciones. Por ejemplo, supóngase que se toma una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varían σ^2 conocidas. Una cota que cubra exactamente al 95% de la población está dada por

$$\mu \pm 1.96\sigma$$

Este intervalo recibe el nombre de intervalo de tolerancia, y los puntos $\mu - 1.96\sigma$ y $\mu + 1.96\sigma$ son los límites inferior y superior de tolerancia del 95%, respectivamente. Dado que μ y σ^2 son conocidos, la cobertura del 95% proporcionada por este intervalo es exacta.

En muchas situaciones prácticas, μ y σ no son conocidos, y deben estimarse a partir de una muestra aleatoria. Es posible determinar una constante k tal que

$$\bar{x} \pm ks$$

constituya un intervalo de tolerancia para una distribución normal. En este caso, los límites de tolerancia son variables aleatorias debido a que se ha remplazado a μ y σ por $\bar{x}$ y s. Por otra parte, la proporción de la población cubierta por el intervalo no es exacta. En conse-

Tabla 7-3 Resumen de procedimientos para el cálculo de intervalos de confianza.

Tipo de problema	Estimación puntual	Intervalo de confianza bilateral del 100(1 − α) por ciento
Media μ, varianza σ^2 conocidas	$\bar{x}$	$\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$
Diferencia entre dos medias μ_1 y μ_2, varianzas σ_1^2 y σ_2^2 conocidas	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2$ $\leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
Media μ de una distribución normal, varianza σ^2 desconocida	$\bar{x}$	$\bar{x} - t_{\alpha/2,\,n-1}\, s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,\,n-1}\, s/\sqrt{n}$
Diferencia entre medias de dos distribuciones normales $\mu_1 - \mu_2$, varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y desconocidas	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,\,n_1+n_2-2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2$ $\leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,\,n_1+n_2-2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ donde $s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$
Diferencia entre medias de dos distribuciones normales $\mu_1 - \mu_2$, varianzas $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ y desconocidas	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,\,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,\,v}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$ donde $v = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 + 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 + 1}} - 2$
Diferencia entre medias de dos distribuciones normales para muestras pareadas, $\mu_0 = \mu_1 - \mu_2$	$\bar{d}$	$\bar{d} - t_{\alpha/2,\,n-1}\, s_d/\sqrt{n} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{\alpha/2,\,n-1}\, s_d/\sqrt{n}$
Varianza σ^2 de una distribución normal	s^2	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}}$
Cociente de las varianzas σ_1^2/σ_2^2 de dos distribuciones normales	$\frac{s_1^2}{s_2^2}$	$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha/2,\,n_2-1,\,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2,\,n_2-1,\,n_1-1}$ $f_{1-\alpha/2,\,n_2-1,\,n_1-1} = \frac{1}{f_{\alpha/2,\,n_1-1,\,n_2-1}}$
Proporción o parámetro de una distribución binomial p	$\hat{p}$	$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
Diferencia entre dos proporciones o dos parámetros binomiales $p_1 - p_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ $\leq p_1 - p_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

cuencia, se utiliza un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento en la proposición del límite de tolerancia, ya que $\bar{x} \pm ks$ no siempre abarca una proporción especificada de la población. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición: Límites de tolerancia

Para una distribución normal con media y varianza desconocidas, los **límites de tolerancia** están dados por $\bar{x} \pm ks$, donde k está determinado de modo que se pueda establecer con una confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento de que los límites contienen al menos una proporción p de la población.

La tabla XIV del apéndice proporciona valores de k para $1 - \alpha = 0.90, 0.99$; $p = 0.90, 0.95, 0.99$, y para valores de n entre 2 y 1000.

EJEMPLO 7-12

Una máquina produce las varillas de metal utilizadas en el sistema de suspensión de un automóvil. El diámetro de la varilla está distribuido de manera normal, con media y varianza desconocidas. Se toma una muestra aleatoria de $n = 10$ piezas, y se encuentra que los diámetros son 2.25, 2.24, 2.27, 2.26, 2.23, 2.25, 2.24, 2.27, 2.22 y 2.23 pulgadas. Encuéntrese un intervalo de tolerancia del 99% que contenga al menos el 95% de los diámetros de las varillas producidas por esta máquina.

A partir de los datos se tiene que $\bar{x} = 2.246$ y $s = 0.017$. De la tabla XIV del apéndice, con $p = 0.95$, $1 - \alpha = 0.99$ y $n = 10$, se tiene que $k = 4.625$. Por tanto, el intervalo de tolerancia deseado es

$$2.246 \pm (4.265)\ 0.017$$

o desde 2.173 hasta 2.319 pulgadas. Esto es, se tiene una confianza del 99% de que al menos el 95% de las varillas tendrán un diámetro entre 2.173 y 2.319 pulgadas.

Nótese que existe una diferencia fundamental entre los intervalos de confianza y los de tolerancia. Los intervalos de confianza se emplean para estimar un parámetro de una población, mientras que los intervalos de tolerancia se utilizan para definir los límites entre los cuales se espera encontrar una proporción de una población. A medida que n se aproxima a infinito, la longitud de un intervalo de confianza tiende a cero, mientras que los límites de tolerancia tienden al valor que se obtendría si se conocieran todos los parámetros de la población. Es así como, en la tabla XIV del apéndice, conforme n se vuelve grande para $p = 0.95$, por ejemplo, k tiende a 1.96.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 7-12

7-48. Considere los datos de viscosidad de un polímero dados en el ejercicio 7-13.

a. Encuentre un intervalo de tolerancia del 90% que contenga al menos el 90% de las mediciones de viscosidad.

b. Compare el intervalo obtenido en el inciso a) con los intervalos de confianza del 90% para la media calculados en el ejercicio 7-13 (caso de varianza conocida) y en el ejercicio 7-28 (caso de varianza desconocida). Escriba un párrafo breve que explique las diferencias entre estos tres intervalos.

7-49. Considere los datos de enriquecimiento de combustible nuclear presentados en el ejercicio 7-18. Suponga que el enriquecimiento de cada varilla está distribuido de manera normal. Encuentre un intervalo de tolerancia del 95% que contenga al menos el 90% de las mediciones de enriquecimiento producidas por el reactor.

7-50. Considere la máquina de mezclado de bebida descrita en el problema 7-20. Encuentre un intervalo de tolerancia del 99% que contenga al menos el 95% de las cantidades de jarabe despachadas por la máquina.

7-51. El ejercicio 7-19 presenta cinco mediciones de la frecuencia natural de vigas formadas por varias láminas. Encuentre un intervalo de tolerancia del 99% que contenga al menos el 95% de las frecuencias naturales.

7-52. La siguiente es una lista diaria de la temperatura (°F) que tiene la descarga de líquidos de una planta de tratamiento de aguas negras. Encuentre un intervalo de tolerancia del 95% que contenga al menos el 90% de las temperaturas de descarga de esta planta de tratamiento.

41	45	39	44	41
43	52	43	43	45
41	44	47	44	39
42	39	48	46	44
41	46	47	44	50

7-53. Un fabricante de gasolinas mide el octanaje de su producto. A continuación se presentan los datos obtenidos de 30 muestras tomadas del proceso de producción. Encuentre un intervalo de tolerancia del 95% que contenga al menos el 95% de los valores de octanaje para la gasolina producida por este proceso.

86.98	86.90	86.94	87.11	86.80	87.02
87.10	87.13	86.92	87.04	86.92	87.13
87.10	86.91	87.03	86.91	87.05	86.95
86.94	86.92	87.16	87.08	87.13	86.84
86.81	86.83	87.19	86.81	86.98	86.97

Ejercicios complementarios

7-54. Un artículo publicado en el *Journal of Sports Science* (1987, Vol. 5, págs. 261-271) presenta los resultados de una investigación sobre el nivel de hemoglobina de los jugadores de hockey sobre hielo en la olimpiada de Canadá. Los datos que aparecen en el artículo son los siguientes (en g/dl):

15.3	16.0	14.4	16.2	16.2	14.9	15.7	15.3	14.6
15.7	16.0	15.0	15.7	16.2	14.7	14.8	14.6	15.6
14.5	15.2							

a. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para el nivel promedio de hemoglobina. Interprete este intervalo.

b. ¿Qué hipótesis se requieren para construir e interpretar el intervalo del inciso a)?

7-55. El artículo "Mix Design for Optimal Strength Development of Fly Ash Concrete" (*Cement and Concrete Research*, 1989, Vol. 19, No. 4, págs. 634-640) investiga la resistencia a la compresión del concreto cuando se mezcla con ceniza muy fina (una mezcla de silicatos, alúmina, hierro, óxido de magnesio y otros ingredientes). La resistencia a la compresión de nueve muestras de concreto en condiciones secas, al día 28, son las siguientes (en MPa):

40.2	30.4	28.9	30.5	22.4	25.8	18.4	14.2	15.3

a. Encuentre un intervalo de confianza inferior del 99% para la resistencia a la compresión promedio. Proporcione una interpretación práctica de este intervalo.

b. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 95% para la resistencia a la compresión promedio.

7-56. Se ha estudiado de manera extensa un sistema operativo para computadoras personales, y se sabe que la desviación estándar del tiempo de respuesta de un comando en particular es $\sigma = 8$ milisegundos. Se instala una nueva versión del sistema operativo, y se desea estimar el tiempo de respuesta promedio para el nuevo sistema de modo que pueda asegurarse que el intervalo de confianza del 95% para μ tiene una longitud a lo más de cinco milisegundos. Si puede suponerse que el tiempo de respuesta tiene una distribución normal y que $\sigma = 8$ para el nuevo sistema, ¿qué tamaño de muestra recomendaría utilizar?

7-57. Se investiga la resistencia a la tensión de ruptura del hilo proporcionado por dos fabricantes. De la experiencia con los procesos de los fabricantes, se sabe que $\sigma_1 = 5$ psi y $\sigma_2 = 4$ psi. Una muestra aleatoria de 20 especímenes de prueba proveniente de cada fabricante arroja como resultados $\bar{x}_1 = 88$ psi y $\bar{x}_2 = 91$ psi, respectivamente. Encuentre un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre las medias de la tensión de ruptura. ¿Existe alguna evidencia que apoye la afirmación de que el hilo del fabricante 2 tiene una mayor resistencia media?

7-58. En el ejercicio 7-57, supóngase que se desea construir un intervalo de confianza del 90% para $\mu_1 - \mu_2$, de modo que el error al estimar esta cantidad sea menor que 1.5 psi. ¿Cuál es el tamaño de la muestra que debe tomarse de cada población?

7-59. Un artículo publicado en el *Journal of Materials Engineering* (1989, Vol. 11, No. 4, págs. 275-282) notificó los resultados de un experimento para determinar los mecanismos de falla de recubrimientos para barreras térmicas rociadas con plasma. La tensión de falla para un recubrimiento en particular (NiCrAlZr) bajo dos condiciones de prueba diferentes son:

Tensión de falla ($\times 10^6$ Pa) después de nueve ciclos de una hora: 19.8, 18.5, 17.6, 16.7, 16.7, 14.8, 15.4, 14.1, 13.6

Tensión de falla ($\times 10^6$ Pa) después de seis ciclos de una hora: 14.9, 12.7, 11.9, 11.4, 10.1, 7.9

a. Encuentre un intervalo de confianza del 99% para la diferencia entre las tensiones de falla promedio para las dos condiciones de prueba diferentes.

b. ¿Qué hipótesis hizo para construir el intervalo de confianza del inciso a)?

7-60. Cuando $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias Poisson independientes, cada una con parámetro λ, y cuando n es relativamente grande, la media muestral $\overline{X}$ es aproximadamente normal con media λ y varianza λ/n.

a. ¿Cuál es la distribución de la siguiente estadística?

$$\frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}}$$

b. Utilice los resultados del inciso a) para encontrar un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para λ.

7-61. Un producto dietético líquido afirma en su publicidad que el empleo del mismo durante un mes produce una pérdida promedio de 3 libras de peso. Ocho sujetos utilizan el producto por un mes, y los datos sobre pérdida de peso son los siguientes:

	Sujeto							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Peso inicial (lb)	163	201	195	198	155	143	150	187
Peso final (lb)	161	195	192	197	150	141	146	183

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la pérdida de peso promedio. ¿Los datos apoyan la afirmación hecha en la publicidad?

7-62. Un artículo publicado en *The Engineer* ("Redesign for Suspect Wiring", junio de 1990) notificó los resultados de una investigación sobre errores de alambrado en aeroplanos comerciales que puede producir información falsa a la tripulación. Es posible que tales errores de alambrado hayan sido responsables del desastre de British Midland Airways en enero de 1989, al provocar que el piloto apagara el motor equivocado. De 1600 aeroplanos seleccionados al azar, se encontró que 8% tenían errores en el alambrado que podían mostrar información errónea a la tripulación. Encuentre un intervalo de confianza del 99% para la proporción de aeroplanos que tienen este tipo de errores de alambrado.

7-63. Considere la situación descrita en el ejercicio 7-62.

a. Suponga que se utiliza la información de este ejemplo para proporcionar una estimación preliminar de p. ¿De qué tamaño debe ser la muestra para producir una estimación de p que difiera, con una confianza del 99%, del verdadero valor a lo más en 0.005?

b. ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea tener una confianza de al menos el 99% de que la proporción muestral difiere de la proporción verdadera a lo más en 0.01, sin importar cuál sea el verdadero valor de p?

7-64. Un artículo publicado en *Engineering Horizons* (primavera de 1990, pág. 26) informa que 117 de 484 egresados de ingeniería planeaban continuar estudiando para obtener un grado más avanzado. Si se considera esto como una muestra aleatoria de todos los que se graduaron en 1990, encuentre un intervalo de confianza del 90% para la proporción de graduados que planean continuar con su educación.

7-65. Utilice los datos del ejercicio 7-54 para encontrar un intervalo de confianza bilateral del 95% para la varianza del nivel de hemoglobina.

7-66. Utilice los datos del ejercicio 7-55 para encontrar un intervalo de confianza superior del 99% para la desviación estándar de la resistencia a la compresión del concreto cuando éste se mezcla con ceniza fina.

7-67. Utilice los datos del ejercicio 7-59 para encontrar un intervalo de confianza bilateral del 95% para σ_1^2/σ_2^2.

7-68. En una muestra aleatoria de 1500 teléfonos residenciales tomada en cierta ciudad en 1990, se encontró que 387 números no aparecían en el directorio. En el mismo año, en otra muestra aleatoria de 1200 teléfonos tomada en otra ciudad, 310 números no aparecían en el directorio.

a. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las dos proporciones.

b. ¿Qué conclusiones pueden obtenerse a partir del intervalo de confianza obtenido en el inciso a)?

7-69. El experimento de la vacuna para la polio de Salk realizado en 1954 se enfocó a la determinación de la efectividad de la vacuna. Debido a que se creía que sin un grupo de control de niños no habría bases sólidas para evaluar la eficacia de la vacuna de Salk, ésta fue administrada a un grupo, mientras que a otro se le dio un placebo (visualmente idéntico a la vacuna pero sin ningún efecto). Por razones éticas, y debido a que se sospechaba que el conocimiento de la administración de la vacuna podría tener efectos sobre el diagnóstico subsecuente, el experimento se llevó a cabo con un procedimiento de doble ciego; esto es, ni los sujetos ni los administradores sabían quién recibía la vacuna y quién el placebo. Los datos obtenidos de este experimento fueron los siguientes:

Grupo del placebo: $n = 201\,299$
110 casos de polio
Grupo de la vacuna: $n = 200\,745$
33 casos de polio

a. Encuentre un intervalo de confianza bilateral del 95% para la diferencia entre proporciones de niños en los dos grupos quienes contrajeron polio.

b. ¿Qué conclusiones pueden obtenerse a partir del intervalo de confianza calculado en el inciso a)?

EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

7-70. Para el control de infecciones en uvas pueden emplearse tres pesticidas diferentes. Se sospecha que el pesticida 3 es más eficaz que los otros dos. En un viñedo en particular, se eligen para su estudio tres plantaciones diferentes de uvas Pinot Noir. Los resultados obtenidos en la cosecha son los siguientes:

Pesticida	$\bar{x}_i$ (Bushels/planta)	s_i	n_i Número de plantas
1	4.6	0.7	100
2	5.2	0.6	120
3	6.1	0.8	130

Si μ_i es el valor verdadero de la cosecha promedio después del tratamiento con el i-ésimo pesticida, entonces el interés recae en la cantidad

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_3$$

la cual mide la diferencia en las cosechas promedio entre los pesticidas 1 y 2 y el pesticida 3. Si el tamaño de las muestras n_i es grande, el estimador ($\hat{\mu}$) obtenido al remplazar cada μ_i por $\overline{X}_i$ es aproximadamente normal.

a. Encuentre un intervalo de confianza para muestras grandes aproximado del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ.

b. ¿Los datos apoyan la afirmación de que el pesticida 3 es más eficaz que los otros dos? Utilice $\alpha = 0.05$ para obtener la respuesta.

7-71. Un componente eléctrico tiene una distribución de tiempo de falla (o duración) que es exponencial con parámetro λ, de modo que la duración promedio es $\mu = 1/\lambda$. Suponga que se toma una muestra de n componentes y que éstos se ponen a prueba. Sea X_i la duración observada para el componente i. La prueba continúa sólo hasta que falla la r-ésima unidad, donde $r < n$. Esto da como resultado una prueba de duración **censurada**. Sean X_1 el tiempo en que ocurre la primera falla, X_2 el tiempo en que ocurre la segunda falla, y así sucesivamente. Entonces, la duración total acumulada al final de la prueba es

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} X_i + (n-r)X_r$$

a. Demuestre que T_r/r es un estimador insesgado para μ. [*Sugerencia*: Utilice la propiedad de la carencia de memoria de la distribución exponencial junto con el hecho de que si $X_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ son variables aleatorias exponenciales independientes con parámetro λ, el $\text{mín}(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ es exponencial con parámetro $k\lambda$.]

b. Puede demostrarse que $2\lambda T_r$ tiene una distribución ji-cuadrada con $2r$ grados de libertad. Utilice este hecho para desarrollar un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)$ por ciento para la duración promedio $\mu = 1/\lambda$.

c. Suponga que se ponen a prueba 20 unidades, y que la prueba termina después de la ocurrencia de 10 fallas. Los tiempos de falla (en horas) son 15, 18, 19, 20, 21, 21, 22, 27, 28, 29. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la duración promedio.

7-72. Considere un intervalo de confianza bilateral para la media μ cuando σ es conocida:

$$\overline{x} - z_{\alpha_1}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{x} + z_{\alpha_2}\sigma/\sqrt{n}$$

donde $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, se tiene el intervalo de confianza usual del $100(1-\alpha)$ por ciento para μ. Cuando $\alpha_1 \neq \alpha_2$, el intervalo no es simétrico con respecto a μ. La longitud del intervalo es $L = \sigma(z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2})/\sqrt{n}$. Demuestre que la longitud del intervalo L es mínima cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$. [*Sugerencia:* recuerde que $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$, de modo que $\Phi^{-1}(1-\alpha) = z_\alpha$, y la relación entre la derivada de una función $y = f(x)$ y la inversa $x = f^{-1}(y)$ es $(d/dy)f^{-1}(y) = 1/[(d/dx)f(x)]$.]

7-73. Es posible construir un **intervalo de tolerancia no paramétrico** que esté basado en los valores extremos de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de cualquier población continua. Si p es la proporción mínima de la población contenida entre las observaciones más grande y más pequeña contenidas en la muestra con una confianza $1 - \alpha$, entonces puede demostrarse que

$$np^{n-1} - (n-1)p^n = \alpha$$

y que n es aproximadamente

$$n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1+p}{1-p}\right)\left(\frac{\chi^2_{\alpha,4}}{4}\right)$$

a. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para tener una confianza del 95% de que al menos el 90% de la población está incluida entre los valores extremos de la muestra?

b. De una muestra aleatoria de 10 transistores se obtuvieron las siguientes mediciones de corriente de saturación (en miliamperes): 10.25, 10.41, 10.30, 10.26, 10.19, 10.37, 10.29, 10.34, 10.23, 10.38. Encuentre los límites que contienen una proporción p de las mediciones de corriente de saturación con una confianza del 95%. ¿Cuál es la proporción p contenida por estos límites?

7-74. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria tomada de una distribución continua de probabilidad con mediana $\tilde{\mu}$.

a. Demuestre que

$$P\{\text{mín}\,(X_i) < \tilde{\mu} < \text{máx}\,(X_i) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

[*Sugerencia:* El complemento del evento [mín$(X_i) < \tilde{\mu} <$ máx(X_i)] es [máx$(X_i) \leq \tilde{\mu}$] $\cup$ [mín$(X_i) \leq \tilde{\mu}$], pero máx$(X_i) \leq \mu$ si y sólo si $X_i \leq \tilde{\mu}$ para toda *i*.]

b. Obtenga un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para la mediana μ, donde $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

8 Prueba de hipótesis

8-1 INTRODUCCIÓN

8-1.1 Hipótesis estadísticas

Los dos capítulos anteriores han mostrado cómo puede estimarse un parámetro a partir de los datos contenidos en una muestra. Puede encontrarse ya sea un solo número (estimador puntual) o un intervalo de valores posibles (intervalo de confianza). Sin embargo, muchos problemas de ingeniería, ciencia y administración, requieren que se tome una decisión entre aceptar o rechazar una proposición sobre algún parámetro. Esta proposición recibe el nombre de **hipótesis**, y el procedimiento de toma de decisión sobre la hipótesis se conoce como **prueba de hipótesis**. Éste es uno de los aspectos más útiles de la inferencia estadística, puesto que muchos tipos de problemas de toma de decisiones, pruebas o experimentos en el mundo de la ingeniería, pueden formularse como problemas de prueba de hipótesis. Es conveniente considerar la prueba de hipótesis estadísticas como la etapa de análisis de datos de un **experimento comparativo**, en el que el ingeniero está interesado, por ejemplo, en comparar la media de una población con un valor especificado. Estos sencillos experimentos comparativos se encuentran muy a menudo en la práctica y proporcionan una buena fundamentación para problemas de diseño experimental más complejos, como los que se estudian en los capítulos 11 y 12. En este capítulo se estudian experimentos comparativos donde intervienen una o dos poblaciones, y la finalidad es probar hipótesis con respecto a los parámetros de las poblaciones.

Ahora es momento de dar una definición formal de una hipótesis estadística.

Definición

Una **hipótesis estadística** es una proposición sobre los parámetros de una o más poblaciones.

Puesto que se emplean distribuciones de probabilidad para representar poblaciones, también es posible considerar una hipótesis estadística como una proposición sobre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Lo usual es que la hipótesis involucre a uno o más parámetros de esta distribución.

Por ejemplo, supóngase que se tiene interés en la rapidez de combustión de un agente propulsor sólido utilizado en los sistemas de salida de emergencia para la tripulación de aeronaves. La rapidez de combustión es una variable aleatoria que puede describirse con una distribución de probabilidad. Supóngase que el interés se centra sobre la rapidez de combustión promedio (que es un parámetro de esta distribución). De manera específica, el interés recae en decidir si la rapidez de combustión promedio es o no 50 cm/s. Esto puede expresarse de manera formal como

$$\begin{aligned} H_0&: \mu = 50 \text{ cm/s} \\ H_1&: \mu \neq 50 \text{ cm/s} \end{aligned} \tag{8-1}$$

La proposición H_0: $\mu = 50$ cm/s de la ecuación 8-1 se conoce como **hipótesis nula**, mientras que la proposición H_1: $\mu \neq 50$ cm/s recibe el nombre de **hipótesis alternativa**. Puesto que la hipótesis alternativa especifica valores de μ que pueden ser mayores o menores que 50 cm/s, también se conoce como **hipótesis alternativa bilateral**. En algunas situaciones, lo que se desea es formular una **hipótesis alternativa unilateral**, como en

$$\begin{aligned} H_0&: \mu = 50 \text{ cm/s} \\ H_1&: \mu < 50 \text{ cm/s} \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} H_0&: \mu = 50 \text{ cm/s} \\ H_1&: \mu > 50 \text{ cm/s} \end{aligned} \tag{8-2}$$

Es importante recordar que las hipótesis siempre son proposiciones sobre la población o distribución bajo estudio, no proposiciones sobre la muestra. Por lo general, el valor del parámetro de la población especificado en la hipótesis nula (50 cm/s en el ejemplo anterior) se determina en una de tres maneras diferentes. Primero, puede ser resultado de la experiencia pasada o del conocimiento del proceso, o incluso de pruebas o experimentos previos. Entonces, el objetivo de la prueba de hipótesis usualmente es determinar si ha cambiado el valor del parámetro. Segundo, este valor puede obtenerse a partir de alguna teoría o modelo que se relaciona con el proceso bajo estudio. En este caso, el objetivo de la prueba de hipótesis es verificar la teoría o modelo. Aparece una tercera situación cuando el valor del parámetro de la población proviene de consideraciones externas, tales como las especificaciones de diseño o ingeniería, o de obligaciones contractuales. En esta situación, el objetivo usual de la prueba de hipótesis es probar el cumplimiento de las especificaciones.

Un procedimiento que conduce a una decisión sobre una hipótesis en particular recibe el nombre de **prueba de hipótesis**. Los procedimientos de prueba de hipótesis dependen del empleo de la información contenida en una muestra aleatoria de la población de interés. Si esta información es consistente con la hipótesis, se concluye que ésta es verdadera; sin embargo, si esta información es inconsistente con la hipótesis, se concluye que ésta es falsa. Debe hacerse hincapié en que la verdad o falsedad de una hipótesis en particular nunca puede conocerse con certidumbre, a menos que pueda examinarse a toda la población. Usualmente esto es imposible en muchas situaciones prácticas. Por tanto, es necesario desarrollar un procedimiento de prueba de hipótesis teniendo en cuenta la probabilidad de llegar a una conclusión equivocada.

La estructura de los problemas de prueba de hipótesis es idéntica en todas las aplicaciones que se considerarán en este libro. La hipótesis nula es la hipótesis que desea probarse. El rechazo de la hipótesis nula siempre conduce a la aceptación de la hipótesis alternativa. En el estudio de la prueba de hipótesis, la hipótesis nula siempre de plantea de modo que especifique un valor exacto del parámetro (como en la proposición H_0: $\mu = 50$ cm/s de la ecuación 8-1). La hipótesis alternativa permite que el parámetro tome varios valores (como en la proposición H_1: $\mu \neq 50$ cm/s de la ecuación 8-1). La prueba de hipótesis involucra la toma de una muestra aleatoria, el cálculo de un **estadístico de prueba** a partir de los datos muestrales, y luego el uso de este estadístico para tomar una decisión sobre la hipótesis nula.

8-1.2 Prueba de una hipótesis estadística

Para ilustrar los conceptos generales, considérese el problema de la rapidez de combustión del agente propulsor presentado con anterioridad. La hipótesis nula es que la rapidez promedio de combustión es 50 cm/s, mientras que la hipótesis alternativa es que ésta no es igual a 50 cm/s. Esto es, se desea probar

$$H_0\text{: } \mu = 50 \text{ cm/s}$$
$$H_1\text{: } \mu \neq 50 \text{ cm/s}$$

Supóngase que se realiza una prueba sobre una muestra de $n = 10$ especímenes, y que se observa cuál es la rapidez de combustión promedio $\bar{x}$. La media muestral es un estimador de la media verdadera de la población μ. Un valor de la media muestral $\bar{x}$ que esté próximo al valor hipotético $\mu = 50$ cm/s es una evidencia de que el verdadero valor de la media μ es realmente 50 cm/s; esto es, tal evidencia apoya la hipótesis nula H_0. Por otra parte, una media muestral muy diferente de 50 cm/s constituye una evidencia que apoya la hipótesis alternativa H_1. Por tanto, en este caso, la media muestral es el estadístico de prueba.

La media muestral puede tomar muchos valores diferentes. Supóngase que si $48.5 \leq \bar{x} \leq 51.5$, entonces se acepta la hipótesis nula H_0: $\mu = 50$, y que si $\bar{x} < 48.5$ o $\bar{x} > 51.5$, entonces se

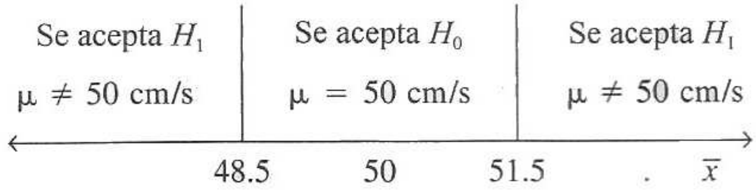


Figura 8-1 Criterios de decisión para la prueba de H_0: $\mu = 50$ cm/s contra H_1: $\mu \neq 50$ cm/s.

acepta la hipótesis alternativa H_1: $\mu \neq 50$. Esto se ilustra en la figura 8-1. Los valores de $\bar{x}$ que son menores que 48.5 o mayores que 51.5 constituyen **la región crítica** de la prueba, mientras que todos los valores que están en el intervalo $48.5 \leq \bar{x} \leq 51.5$ forman la **región de aceptación.** Las fronteras entre las regiones crítica y de aceptación reciben el nombre de **valores críticos**. En el ejemplo, los valores críticos son 48.5 y 51.5. Por otra parte, la costumbre es establecer conclusiones con respecto a la hipótesis nula H_0. Por tanto, se rechaza H_0 en favor de H_1 si el estadístico de prueba cae en la región crítica, de lo contrario, se acepta H_0.

Este procedimiento de decisión puede conducir a una de dos conclusiones erróneas. Por ejemplo, es posible que el verdadero valor de la rapidez promedio de combustión del agente propulsor sea igual con 50 cm/s. Sin embargo, para todos los especímenes bajo prueba, bien puede observarse un valor del estadístico de prueba $\bar{x}$ que cae en la región crítica. En este caso, la hipótesis nula H_0 será rechazada en favor de la alternativa H_1 cuando, de hecho, H_0 en realidad es verdadera. Este tipo de conclusión equivocada se conoce como **error tipo I**.

Definición

El **error tipo I** se define como el rechazo de la hipótesis nula H_0 cuando ésta es verdadera.

Ahora supóngase que la verdadera rapidez promedio de combustión es diferente de 50 cm/s, aunque la media muestral $\bar{x}$ caiga dentro de la región de aceptación. En este caso se acepta H_0 cuando ésta es falsa. Este tipo de conclusión errónea recibe el nombre de **error tipo II**.

Definición

El **error tipo II** se define como la aceptación de la hipótesis nula cuando ésta es falsa.

Por tanto, al probar cualquier hipótesis estadística, existen cuatro situaciones diferentes que determinan si la decisión final es correcta o errónea. Estas situaciones aparecen en la tabla 8-1.

Dado que la decisión se basa en variables aleatorias, entonces es posible asociar probabilidades con los errores tipo I y II de la tabla 8-1. La probabilidad de cometer un error tipo I se denota con la letra griega α. Esto es,

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera}). \tag{8-3}$$

Tabla 8-1 Decisiones en la prueba de hipótesis

Decisión	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Aceptar H_0	no hay error	error tipo II
Rechazar H_0	error tipo I	no hay error

Algunas veces, la probabilidad del error tipo I recibe el nombre de **nivel** o **tamaño de significancia** de la prueba. En el ejemplo de la rapidez promedio de combustión del agente propulsor, se presenta un error tipo I cuando $\bar{x} > 51.5$ o $\bar{x} < 48.5$ y la verdadera rapidez promedio de combustión es $\mu = 50$ cm/s. Supóngase que la desviación estándar de la rapidez de combustión es $\sigma = 2.5$ cm/s, y que la rapidez de combustión tiene una distribución para la que se aplican las condiciones del teorema del límite central, de modo que la distribución de la media muestral es aproximadamente normal con media $\mu = 50$ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n} = 2.5/\sqrt{10} = 0.79$. La probabilidad de cometer un error tipo I (o el nivel de significancia de la prueba) es igual a la suma de las áreas que aparecen sombreadas en las colas de la distribución normal de la figura 8-2. Esta probabilidad puede calcularse de la siguiente manera:

$$\alpha = P(\overline{X} < 48.5 \mid \mu = 50) + P(\overline{X} > 51.5 \mid \mu = 50)$$

Los valores de z que corresponden a los valores críticos 48.5 y 51.5 son

$$z_1 = \frac{48.5 - 50}{0.79} = -1.90$$

y

$$z_2 = \frac{51.5 - 50}{0.79} = 1.90$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\alpha &= P(Z < -1.90) + P(Z > 1.90)\\ &= 0.0288 + 0.0288\\ &= 0.0576\end{aligned}$$

Esto implica que el 5.76% de todas las muestras aleatorias conducirán al rechazo de la hipótesis H_0: $\mu = 50$ cm/s cuando la verdadera rapidez promedio de combustión es en realidad 50 cm/s.

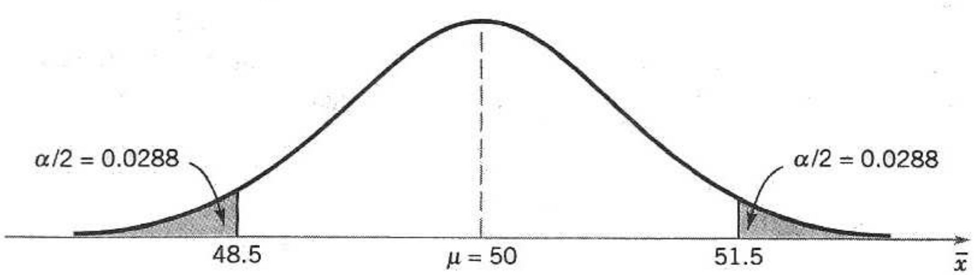


Figura 8-2 Región crítica para H_0: $\mu = 50$ contra H_1: $\mu \neq 50$ y $n = 10$.

Al analizar la figura 8-2 se nota que es posible reducir α al aumentar la región de aceptación. Por ejemplo, si se toman como valores críticos 48 y 52, el valor de α es

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left(Z < \frac{48 - 50}{0.79}\right) + P\left(Z > \frac{52 - 50}{0.79}\right) \\ &= P(Z < -2.53) + P(Z > 2.53) \\ &= 0.0057 + 0.0057 \\ &= 0.0114\end{aligned}$$

También puede reducirse el valor de α mediante el incremento del tamaño de la muestra. Si $n = 16$, entonces $\sigma/\sqrt{n} = 2.5/\sqrt{16} = 0.625$ y, al utilizar la región crítica original de la figura 8-2, se tiene que

$$z_1 = \frac{48.5 - 50}{0.625} = -2.40$$

y

$$z_2 = \frac{51.5 - 50}{0.625} = 2.40$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\alpha &= P(Z < -2.40) + P(Z > 2.40) \\ &= 0.0082 + 0.0082 \\ &= 0.0164\end{aligned}$$

Al evaluar un procedimiento de prueba de hipótesis, también es importante examinar la probabilidad del error tipo II, el cual se denota por β. Esto es,

$$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa}) \tag{8.4}$$

Para calcular β se debe tener una hipótesis alternativa específica; esto es, debe tenerse un valor particular de μ. Por ejemplo, supóngase que es importante rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu = 50$ cada vez que la rapidez promedio de combustión μ es mayor que 52 cm/s o menor que 48 cm/s. Para ello, puede calcularse la probabilidad β de un error tipo II para los valores $\mu = 52$ y $\mu = 48$, y utilizar este resultado para averiguar algo con respecto a la forma en que se desempeñará la prueba. De manera específica, ¿cómo trabajará el procedimiento de prueba si se desea detectar, esto es, rechazar H_0, para un valor medio de $\mu = 52$ o $\mu = 48$? Dada la simetría, sólo es necesario evaluar uno de los dos casos —esto es, encontrar la probabilidad de aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu = 50$ cm/s cuando el valor verdadero es $\mu = 52$ cm/s.

La figura 8-3 será de gran ayuda para calcular la probabilidad β de un error tipo II. La distribución normal de la parte izquierda de la figura 8-3 es la distribución del estadístico de prueba $\overline{X}$ cuando la hipótesis nula H_0: $\mu = 50$ es verdadera (esto es lo que se entiende con la expresión "bajo H_0: $\mu = 50$"), y la distribución normal de la derecha es la distribución de $\overline{X}$ cuando la hipótesis alternativa es verdadera y el valor de la media es 52 (o "bajo H_1: $\mu = 52$"). Se comete un error tipo II si la media muestral $\bar{x}$ cae entre 48.5 y 51.5 (que son las fronteras de la región crítica) cuando $\mu = 52$. Como puede verse en la figura 8-3, esto es sólo la probabilidad de que $48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5$ cuando la media verdadera es $\mu = 52$, lo que

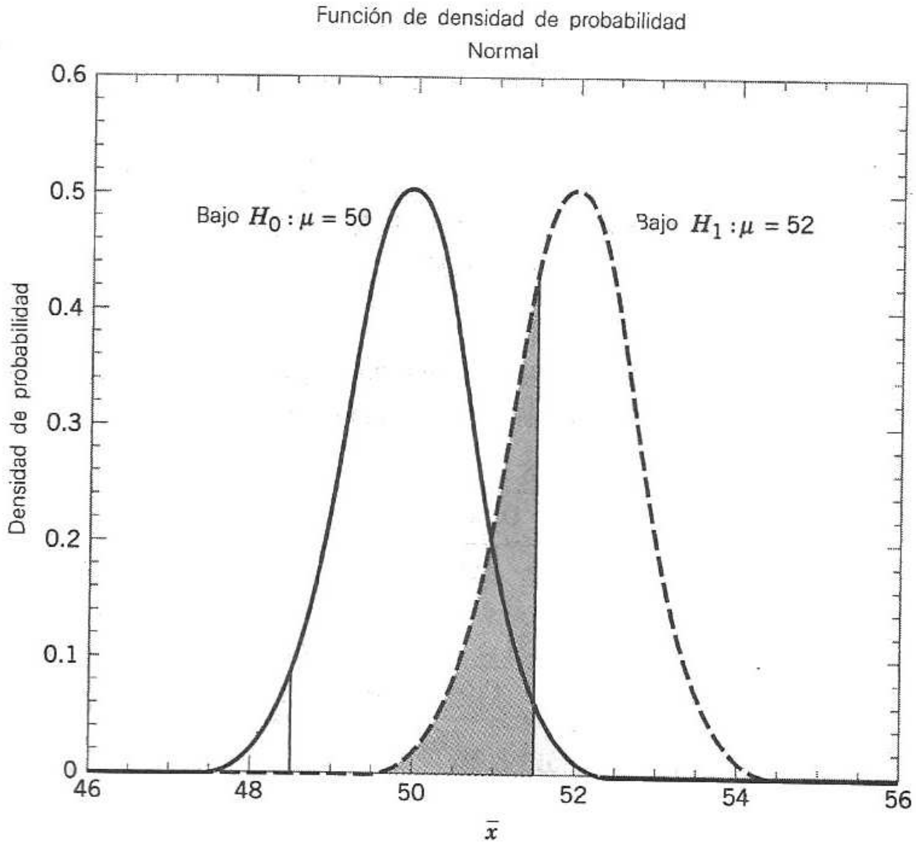


Figura 8-3 Probabilidad del error tipo II cuando $\mu = 52$ y $n = 10$.

corresponde al área sombreada bajo la distribución normal de la derecha. Por tanto, con respecto a la figura 8-3, se tiene que

$$\beta = P(48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5 \mid \mu = 52)$$

Los valores de z que corresponden a 48.5 y 51.5 cuando $\mu = 52$ son

$$z_1 = \frac{48.5 - 52}{0.79} = -4.43$$

y

$$z_2 = \frac{51.5 - 52}{0.79} = -0.63$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \beta &= P(-4.43 \leq Z \leq -0.63) \\ &= P(Z \leq -0.63) - P(Z \leq -4.43) \\ &= 0.2643 - 0.000 \\ &= 0.2643 \end{aligned}$$

En consecuencia, si se prueba H_0: $\mu = 50$ contra H_1: $\mu \neq 50$ con $n = 10$, y el valor verdadero de la media es $\mu = 52$, la probabilidad de que se acepte la hipótesis nula falsa es

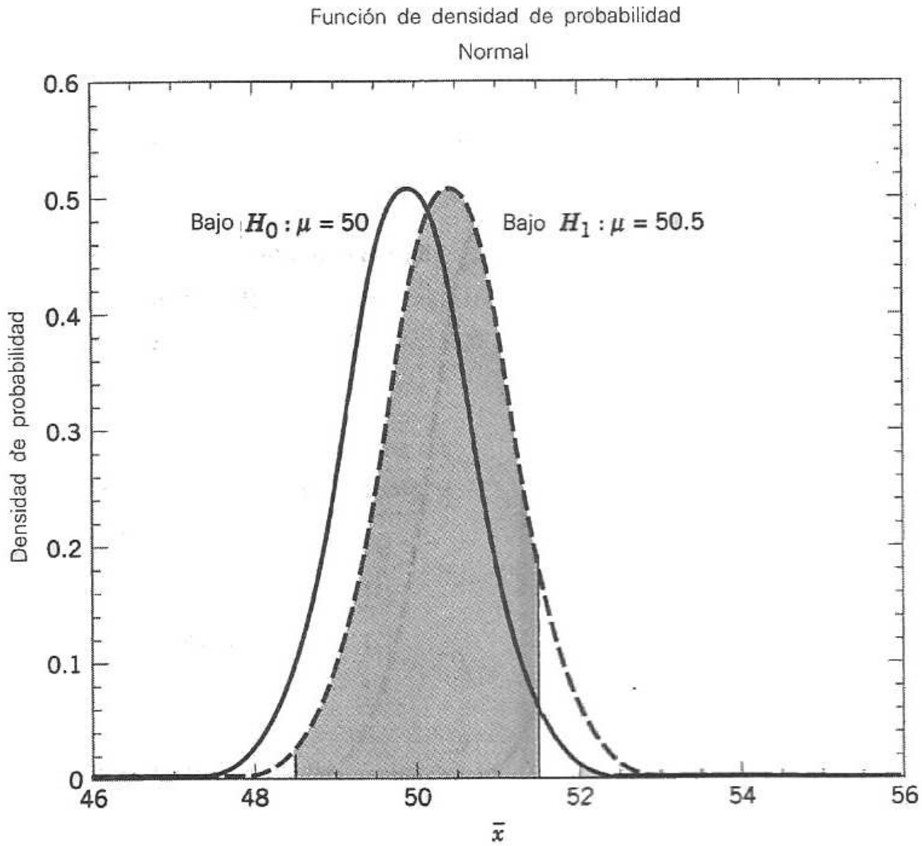


Figura 8-4 Probabilidad del error tipo II cuando $\mu = 50.5$ y $n = 10$.

0.2643. Por simetría, si el valor verdadero de la media es $\mu = 48$, el valor de β también es 0.2643.

La probabilidad β de cometer un error tipo II aumenta rápidamente a medida que el valor verdadero de μ tiende al valor hipotético. Por ejemplo, véase la figura 8-4, donde el valor verdadero de la media es $\mu = 50.5$ y el valor hipotético es H_0: $\mu = 50$. El valor verdadero de μ está muy próximo a 50, y el valor de β es

$$\beta = P(48.5 \leq \bar{X} \leq 51.5 \mid \mu = 50.5)$$

Tal como se muestra en la figura 8-4, los valores de z que corresponden a 48.5 y 51.5 cuando $\mu = 50.5$ son

$$z_1 = \frac{48.5 - 50.5}{0.79} = -2.53$$

y

$$z_2 = \frac{51.5 - 50.5}{0.79} = 1.27$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\beta &= P(-2.53 \leq Z \leq 1.27) \\ &= P(Z \leq 1.27) - P(Z \leq -2.53) \\ &= 0.8980 - 0.0057 \\ &= 0.8923\end{aligned}$$

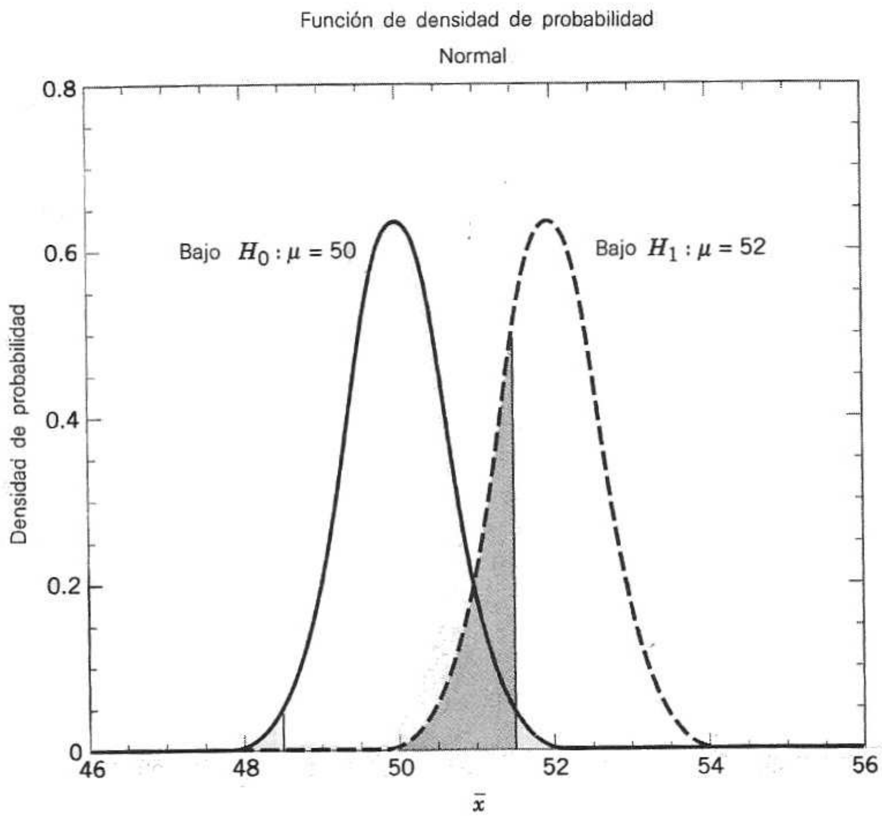


Figura 8-5 Probabilidad del error tipo II cuando $\mu = 52$ y $n = 16$.

Por tanto, la probabilidad del error tipo II es mucho mayor para el caso donde la media verdadera es 50.5 cm/s, que para el caso donde ésta es 52 cm/s. Claro está que en muchas situaciones prácticas el interés no recae en cometer un error tipo II si la media está "próxima" al valor hipotético de ésta. Se podría estar más interesado en detectar diferencias grandes entre la media verdadera y el valor especificado en la hipótesis nula.

La probabilidad del error tipo II también depende del tamaño de la muestra n. Supóngase que la hipótesis nula es H_0: $\mu = 50$ cm/s y que el valor verdadero de la media es $\mu = 52$. Si el tamaño de la muestra aumenta de $n = 10$ a $n = 16$, entonces se obtiene la situación ilustrada en la figura 8-5. La distribución normal de la izquierda es la distribución de $\overline{X}$ cuando la media $\mu = 50$, mientras que la distribución normal de la derecha es la distribución de $\overline{X}$ cuando $\mu = 52$. Tal como se muestra en la figura 8-5, la probabilidad del error tipo II es

$$\beta = P(48.5 \leq \overline{X} \leq 51.5 \mid \mu = 52)$$

Cuando $n = 16$, la desviación estándar de $\overline{X}$ es $\sigma/\sqrt{n} = 2.5/\sqrt{16} = 0.625$, y los valores de z que corresponden a 48.5 y 51.5 cuando $\mu = 52$ son

$$z_1 = \frac{48.5 - 52}{0.625} = -5.60 \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{51.5 - 52}{0.625} = -0.80$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\beta &= P(-5.60 \leq Z \leq -0.80)\\ &= P(Z \leq -0.80) - P(Z \leq -5.60)\\ &= 0.2119 - 0.000\\ &= 0.2119.\end{aligned}$$

Recuérdese que cuando $n = 10$ y $\mu = 52$, se tiene que $\beta = 0.2643$; por tanto, el aumento en el tamaño de la muestra da como resultado una disminución en la probabilidad del error tipo II.

A continuación se resumen los resultados de esta sección, así como otros cálculos similares:

región de aceptación	**tamaño de la muestra**	α	**β para $\mu = 52$**	**β para $\mu = 50.5$**
$48.5 < \bar{x} < 51.5$	10	0.0576	0.2643	0.8923
$48 < \bar{x} < 52$	10	0.0114	$\boxed{0.5000}$	$\boxed{0.9705}$
$48.5 < \bar{x} < 51.5$	16	0.0164	0.2119	$\boxed{0.9445}$
$48 < \bar{x} < 52$	16	$\boxed{0.0014}$	$\boxed{0.5000}$	$\boxed{0.9918}$

Los resultados de los recuadros no fueron calculados en el texto, pero el lector puede verificarlos con facilidad. La tabla y lo estudiado hasta el momento revelan cuatro puntos importantes:

1. El tamaño de la región crítica y, en consecuencia, la probabilidad α de un error tipo I, siempre pueden reducirse mediante una selección apropiada de los valores críticos.
2. Los errores tipo I y II están relacionados. Una disminución en la probabilidad en un tipo de error siempre da como resultado un aumento en la probabilidad del otro, siempre y cuando el tamaño de la muestra n no cambie.
3. En general, un aumento en el tamaño de la muestra reduce tanto a α como a β, siempre y cuando los valores críticos se mantengan constantes.
4. Cuando la hipótesis nula es falsa, β aumenta a medida que el valor verdadero del parámetro tiende al valor hipotético propuesto por la hipótesis nula. El valor de β disminuye a medida que aumenta la diferencia entre el verdadero valor medio y el propuesto.

En general, el analista controla la probabilidad α del error tipo I cuando escoge los valores críticos. Así, usualmente es más fácil para el analista fijar la probabilidad del error tipo I en (casi) cualquier valor deseado. Puesto que el analista puede controlar de manera directa la probabilidad de rechazar de manera errónea H_0, siempre puede considerarse el rechazo de la hipótesis nula H_0 como una **conclusión fuerte**.

Por otra parte, la probabilidad β del error tipo II no es constante, sino que depende del valor verdadero del parámetro. Ésta también depende del tamaño de la muestra que se haya seleccionado. Dado que la probabilidad β del error tipo II es una función tanto del tamaño de la muestra como del punto en el cual la hipótesis nula H_0 es falsa, es costumbre considerar la decisión de aceptar H_0 como una **conclusión débil**, a menos que se sepa que β es aceptablemente pequeño. Por consiguiente, más que decir "se acepta H_0", se prefiere la terminología "incapaz de rechazar H_0". La incapacidad de rechazar H_0 implica que no se ha encontrado evidencia suficiente para rechazar a H_0, esto es, para hacer una proposición fuerte. La incapacidad de rechazar H_0 no significa necesariamente que exista una probabilidad grande de que H_0 sea cierta. Esto simplemente significa que se requieren más datos para alcanzar una conclusión fuerte. Lo anterior puede tener implicaciones importantes para la formulación de hipótesis.

Un concepto importante que se usará más adelante es el de la **potencia** de una prueba estadística.

Definición

La **potencia** de una prueba estadística es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando la hipótesis alternativa es verdadera.

El valor de la potencia es $1 - \beta$, y la potencia puede interpretarse como *la probabilidad de rechazar de manera correcta una hipótesis nula falsa*. A menudo las pruebas estadísticas se comparan mediante la comparación de sus propiedades de potencia. Por ejemplo, considérese el problema de la rapidez de combustión del agente propulsor cuando se prueba H_0: $\mu = 50$ cm/s contra H_1: $\mu \neq 50$ cm/s. Supóngase que el valor verdadero de la media es $\mu = 52$. Cuando $n = 10$, se tiene que $\beta = 0.2643$, de modo que la potencia de esta prueba es $1 - \beta = 1 - 0.2643 = 0.7357$ cuando $\mu = 52$.

La potencia es una medida muy descriptiva y concisa de la *sensibilidad* de una prueba estadística, donde por sensibilidad se entiende la capacidad de una prueba para detectar diferencias. En este caso, la sensibilidad de la prueba para detectar la diferencia entre una rapidez promedio de combustión de 50 cm/s y otra de 52 cm/s, es 0.7357. Esto es, si el valor verdadero de la media es en realidad 52 cm/s, esta prueba rechazará de manera correcta H_0: $\mu = 50$ y "detectará" esta diferencia el 73.57% de las veces. Si se piensa que el valor de esta potencia es bajo, entonces el analista puede aumentar α o el tamaño de la muestra n.

8-1.3 Hipótesis unilaterales y bilaterales

Una prueba de cualquier hipótesis, tal como

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

recibe el nombre de prueba *bilateral*, debido a que es importante detectar diferencias a partir del valor hipotético de la media μ_0 que se encuentren en cualquier lado de μ_0. En una prueba de este tipo, la región crítica se separa en dos partes, con (usualmente) la misma probabilidad en cada cola de la distribución de la estadística de prueba.

Muchos problemas de prueba de hipótesis involucran de manera natural hipótesis alternativas **unilaterales**, tales como

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

Si la hipótesis alternativa es H_1: $\mu > \mu_0$, la región crítica debe encontrarse en la cola superior de la distribución del estadístico de prueba, mientras que si la hipótesis alternativa es H_1: $\mu < \mu_0$, la región crítica debe encontrarse en la cola inferior de la distribución. En consecuencia, en ocasiones estas pruebas se conocen como pruebas de **una cola**. Es fácil localizar la región crítica para pruebas unilaterales. Para ello, simplemente se visualiza el comportamiento del estadístico de prueba si la hipótesis nula es verdadera, y se coloca la región crítica en el extremo o cola apropiada de la distribución. En general, la desigualdad en la hipótesis alternativa "apunta" en la dirección de la región crítica.

Al construir hipótesis, siempre se plantea la hipotesis nula como una igualdad, de modo que la probabilidad α del error tipo I pueda controlarse en un valor específico. La hipótesis alternativa puede ser unilateral o bilateral, dependiendo de la conclusión que ha de obtenerse si se rechaza H_0. Si el objetivo es hacer una afirmación donde aparezcan proposiciones tales como "mayor que", "menor que", "superior a", "excede a", "al menos" y otras similares, entonces la alternativa unilateral es la que resulta más apropiada. Si la afirmación no implica ninguna dirección, o si es del tipo "no es igual a", entonces debe utilizare la alternativa bilateral.

EJEMPLO 8-1

Considérese el problema de la rapidez de combustión del agente propulsor. Supóngase que si la rapidez media de combustión es menor que 50 cm/s, se desea demostrar esto con una conclusión fuerte. Las hipótesis deben plantearse como

$$H_0: \mu = 50 \text{ cm/s}$$

$$H_1: \mu < 50 \text{ cm/s}$$

En este caso, la región crítica se encuentra en la cola inferior de la distribución de $\overline{X}$. Puesto que el rechazo de H_0 siempre es una conclusión fuerte, este planteamiento de las hipótesis producirá el resultado deseado si se rechaza H_0. Nótese que, si bien la hipótesis nula está planteada como una igualdad, se sobrentiende que incluye cualquier valor de μ no especificado por la hipótesis alternativa. Por tanto, la incapacidad de rechazar H_0 no significa que $\mu = 50$ cm/s exactamente, sino sólo que no se tiene evidencia fuerte que apoye a H_1.

En algunos problemas reales, donde se recomiendan los procedimientos de prueba unilaterales, en ocasiones es difícil escoger un planteamiento apropiado de la hipótesis alternativa. Por ejemplo, supóngase que un embotellador de refresco compra botellas de 10 onzas a una compañía vidriera. El embotellador desea estar seguro de que las botellas cumplen con las especificaciones sobre la presión interna promedio o presión de estallamiento, la cual, para botellas de 10 onzas, debe tener un valor mínimo de 200 psi. El embotellador ha resuelto formular el procedimiento de decisión para un lote específico de botellas como un problema de hipótesis. Para este problema, existen dos planteamientos posibles:

$$H_0: \mu = 200 \text{ psi}$$
$$H_1: \mu > 200 \text{ psi} \tag{8-5}$$

o

$$H_0: \mu = 200 \text{ psi}$$
$$H_1: \mu < 200 \text{ psi} \tag{8-6}$$

Considérese el planteamiento dado por la ecuación 8-5. Si se rechaza la hipótesis nula, entonces las botellas serán juzgadas como satisfactorias; mientras que si no se rechaza H_0, la implicación es que las botellas no cumplen con las especificaciones y, por ende, no deben utilizarse. Dado que el rechazo de H_0 es una conclusión fuerte, este planteamiento obliga al fabricante de las botellas a "demostrar" que la presión de estallamiento promedio de las botellas es mayor que la especificada. Ahora considérese el planteamiento dado por la ecuación 8-6. En esta situación, las botellas serán consideradas satisfactorias a menos que se rechace H_0. Esto es, se concluye que las botellas son satisfactorias a menos que exista evidencia fuerte en sentido contrario.

¿Qué planteamiento es el correcto: el de la ecuación 8-5 o el de la ecuación 8-6? La respuesta es "depende". Para la ecuación 8-5, existe cierta probabilidad de que H_0 no sea rechazada (esto es, puede decidirse que las botellas no son satisfactorias), aun cuando la verdadera media sea ligeramente mayor que 200 psi. Este planteamiento implica que se desea que el fabricante de las botellas demuestre que el producto cumple o excede las especificaciones. Tal planteamiento puede ser apropiado si, en el pasado, el fabricante ha experimentado dificultades para cumplir con las especificaciones, o si las condiciones de seguridad del producto lo obligan a ajustarse de manera estricta a la especificación de 200 psi. Por otra parte, para el planteamiento de la ecuación 8-6, existe cierta probabilidad de que H_0 será aceptada y se considerará que las botellas son satisfactorias, aun cuando la verdadera media sea ligeramente menor que 200 psi. Puede concluirse que las botellas no son satisfactorias sólo cuando existe una fuerte evidencia de que la media no es mayor que 200 psi, esto es, cuando se rechace H_0: $\mu = 200$ psi. Este planteamiento supone que todos están felices con el desempeño pasado del fabricante y que las pequeñas desviaciones de la especificación $\mu \geq 200$ psi no serán de consecuencias.

Al formular hipótesis alternativas unilaterales, debe recordarse que el rechazo de H_0 siempre es una conclusión fuerte. En consecuencia, en la hipótesis alternativa debe ponerse la proposición sobre la que es importante llegar a una conclusión fuerte. A menudo, en problemas reales, esto depende del punto de vista de los involucrados y de la experiencia que tengan con la situación.

8-1.4 Procedimiento general para la prueba de hipótesis

En este capítulo se desarrollan procedimientos de prueba de hipótesis para muchos problemas prácticos. Se recomienda utilizar los siguientes pasos al aplicar la metodología de prueba de hipótesis.

1. Del contexto del problema, identificar el parámetro de interés.
2. Establecer la hipótesis nula, H_0.
3. Especificar una apropiada hipótesis alternativa, H_1.
4. Seleccionar un nivel de significancia α.
5. Establecer un estadístico de prueba apropiado.
6. Establecer la región de rechazo para el estadístico.
7. Calcular todas las cantidades muestrales necesarias, sustituirlas en la ecuación para el estadístico de prueba, y calcular el valor correspondiente.
8. Decidir si debe o no rechazarse H_0 y notificar esto en el contexto del problema.

Los pasos 1 a 4 deben completarse antes de examinar los datos muestrales. Esta secuencia se ilustrará en secciones subsecuentes.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 8-1

8-1. Un fabricante de fibras textiles está investigando una nueva fibra para tapicería, la cual tiene una elongación media por hilo de 12 kg con una desviación estándar de 0.5 kg. La compañía desea probar la hipótesis H_0: $\mu = 12$ contra H_1: $\mu < 12$, utilizando para ello una muestra aleatoria de cuatro especímenes.

a. ¿Cuál es la probabilidad del error tipo I si la región crítica está definida como $\bar{x} < 11.5$ kg?

b. Encuentre β para el caso donde la verdadera elongación promedio es 11.25 kg.

8-2. Repita el ejercicio 8-1 utilizando una muestra de tamaño $n = 16$ y la misma región crítica.

8-3. En el ejercicio 8-1, encuentre la frontera de la región crítica si la probabilidad del error tipo I se fija en $\alpha = 0.01$.

8-4. En el ejercicio 8-1, encuentre la frontera de la región crítica si la probabilidad del error tipo I es 0.05.

8-5. El calor emanado, en calorías por gramo, de una mezcla de cemento tiene una distribución aproximadamente normal. Se piensa que la media es 100 y que la desviación estándar es 2. Se desea probar H_0: $\mu = 100$ contra H_1: $\mu \neq 100$ con una muestra de $n = 9$ especímenes.

a. Si se define la región de aceptación como $98.5 \leq \bar{x} \leq 101.5$, encuentre la probabilidad α del error tipo I.

b. Encuentre β para el caso donde la media verdadera del calor emanado es 103.

c. Encuentre β para el caso donde la media verdadera del calor emanado es 105. Este valor de β es más pequeño que el obtenido en el inciso b). ¿Por qué?

8-6. Repita el ejercicio 8-5 utilizando una muestra de tamaño $n = 5$ y la misma región de aceptación.

8-7. Una compañía de productos para el consumidor está desarrollando un nuevo champú, y está interesada en la altura de la espuma (en mm). La altura de la espuma tiene una distribución aproximadamente normal, con una desviación estándar de 20 mm. La compañía desea probar H_0: $\mu = 175$ mm contra H_1: $\mu > 175$ mm, utilizando los resultados obtenidos con $n = 10$ muestras.

a. Encuentre la probabilidad α del error tipo I si la región crítica es $\bar{x} > 185$.

b. ¿Cuál es la probabilidad del error tipo II si la verdadera altura promedio de la espuma es 195 mm?

8-8. En el ejercicio 8-7, supóngase que la media muestral es $\bar{x} = 190$ mm.

a. ¿A qué conclusión puede llegarse?

b. ¿Cuán "inusual" es el valor muestral $\bar{x} = 190$ mm si el valor verdadero de la media es 175 mm? Esto es, ¿cuál es la probabilidad de observar un promedio muestral tan grande como 190 mm (o mayor), si la verdadera altura promedio de la espuma es 175 mm?

8-9. Repita el ejercicio 8-7, suponiendo que el tamaño de la muestra es $n = 16$ y que los límites de la región crítica son los mismos.

8-10. Considere el ejercicio 8-7, y suponga que el tamaño de la muestra aumenta a $n = 16$.

a. ¿Dónde debe colocarse la frontera de la región crítica si se desea que la probabilidad del error tipo I siga siendo la misma que cuando el tamaño de la muestra era $n = 10$?

b. Con $n = 16$ y la región crítica determinada en el inciso a), encuentre la probabilidad β del error tipo II si el valor verdadero de la altura promedio de la espuma es 190 mm.

c. Compare el valor de β obtenido en el inciso b) con el calculado en el ejercicio 8-7(b). ¿A qué conclusión puede llegarse?

8-11. Un fabricante está interesado en el voltaje de salida de una fuente de alimentación utilizada en una computadora personal. Se supone que el voltaje de salida tiene una distribución normal, con desviación estándar 0.25 V. El fabricante desea probar H_0: $\mu = 5$ V contra H_1: $\mu \neq 5$ V, utilizando para ello $n = 8$ unidades.

a. La región de aceptación es $4.85 \leq \bar{x} \leq 5.15$. Encuentre el valor de α.

b. Encuentre la potencia de la prueba para detectar el verdadero voltaje de salida promedio, que es 5.1 V.

8-12. Vuelva a resolver el ejercicio 8-11 cuando el tamaño de la muestra es 16 y los límites de la región de aceptación no cambian.

8-13. Considere el ejercicio 8-11, suponga que el fabricante desea que la probabilidad del error tipo I para la prueba sea $\alpha = 0.05$. ¿Dónde debe localizarse la región de aceptación?

8-14. Si se hace una gráfica de la probabilidad de aceptar H_0: $\mu = \mu_0$ contra varios valores de μ, y se unen los puntos con una curva suave, se obtiene la **curva característica de operación** (o **curva CO**) del procedimiento de prueba. Estas curvas se emplean de manera extensa en aplicaciones industriales de la prueba de hipótesis para visualizar la sensibilidad y el desempeño relativo de la prueba. Cuando el valor verdadero de la media es igual a μ_0, la probabilidad de aceptar H_0 es $1 - \alpha$. Construya una curva CO para el ejercicio 8-7, utilizando los siguientes valores para la media verdadera μ: 178, 181, 184, 187, 190, 193, 196 y 199.

8-15. Convierta la curva CO del ejercicio 8-14 en una gráfica de la **función de potencia** de la prueba.

8-16. Se toma una muestra aleatoria de 500 habitantes de cierta ciudad de Estados Unidos, y se les pregunta si están a favor de usar todo el año combustibles oxigenados para reducir la contaminación. Si más de 400 personas responden de manera afirmativa, entonces se concluye que al menos el 60% de los habitantes está a favor del empleo de este tipo de combustibles.

a. Encuentre la probabilidad del error tipo I si exactamente el 60% de los habitantes están a favor del empleo de estos combustibles.

b. ¿Cuál es la probabilidad β del error tipo II si sólo el 49% de los habitantes está a favor de tal medida?

[*Sugerencia:* utilice la aproximación normal de la distribución binomial.]

8-17. Se cree que la proporción de habitantes de cierta ciudad que está a favor de la construcción de carreteras de peaje para completar el sistema de autopistas, es $p = 0.3$. Si una muestra aleatoria de 10 habitantes indica que uno o menos está a favor de esta propuesta, entonces se concluye que $p < 0.3$.

a. Encuentre la probabilidad del error tipo I si la verdadera proporción es $p = 0.3$.

b. Encuentre la probabilidad de cometer un error tipo II con este procedimiento si $p = 0.5$.

c. ¿Cuál es la potencia de este procedimiento si la verdadera proporción es $p = 0.6$?

8-18. Se estima que la proporción de adultos que viven en cierta región, que tienen una licenciatura es $p = 0.4$. Para probar esta hipótesis, se toma una muestra aleatoria de 15 adultos. Si el número de ellos que tienen una licenciatura se encuentra entre cuatro y ocho, la hipótesis será aceptada; en cualquier otro caso, se concluye que $p \neq 0.4$.

a. Encuentre la probabilidad del error tipo I para este procedimiento, suponiendo que $p = 0.4$.

b. Encuentre la probabilidad de cometer un error tipo II si la proporción real es $p = 0.2$.

8-2 PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE LA MEDIA, VARIANZA CONOCIDA

En esta sección se consideran pruebas de hipótesis sobre la media de una población (o la media de una distribución de probabilidad), donde la varianza de la población es conocida. Los ejemplos introductorios de la sección 8-1 están relacionados con la media de una población, así que muchos de los conceptos presentados en esta sección son un poco más generales que los ya estudiados.

Las suposiciones para esta prueba son mínimas. La población o distribución de interés tiene media μ y varianza σ^2, con σ^2 conocida. El estadístico de prueba se basa en la media muestral $\overline{X}$, por lo que también se supondrá que la población está distribuida de manera normal o que se aplican las condiciones del teorema del límite central. Esto significa que la distribución de $\overline{X}$ es aproximadamente normal con media μ y varianza σ^2/n.

8-2.1 Desarrollo del procedimiento de prueba

Supóngase que se desea probar la hipótesis

$$H_0\colon \mu = \mu_0$$
$$H_1\colon \mu \neq \mu_0 \tag{8-7}$$

donde μ_0 es una constante específica. Se tiene una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la población. Puesto que $\overline{X}$ tiene una distribución aproximadamente normal con media μ_0 y

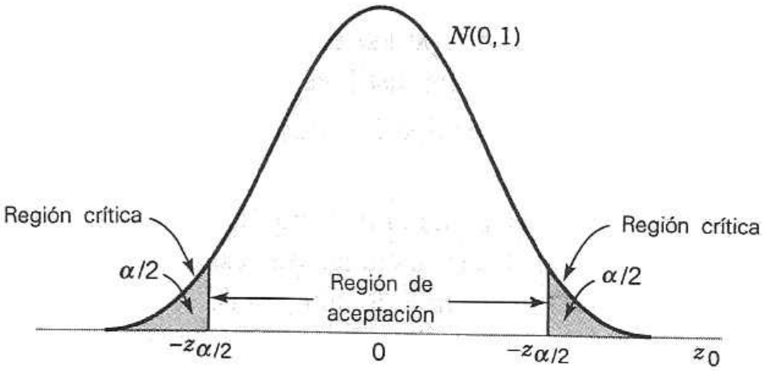


Figura 8-6 Distribución de Z_0 cuando H_0: $\mu = \mu_0$ es verdadera, con región crítica para H_1: $\mu \neq \mu_0$.

desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$ si la hipótesis nula es verdadera, entonces puede construirse una región crítica con base en el valor calculado de la media muestral $\bar{x}$, como en la sección 8-1.

Habitualmente, es más conveniente *estandarizar* la media muestral y utilizar una estadística de prueba basada en la distribución normal estándar. Esto es, el procedimiento de prueba para H_0: $\mu = \mu_0$ utiliza el **estadístico de prueba**

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{8-8}$$

Si la hipótesis nula H_0: $\mu = \mu_0$ es verdadera, $E(\overline{X}) = \mu_0$, de donde se desprende que la distribución de Z_0 es la distribución normal estándar [denotada por $N(0, 1)$]. En consecuencia, si H_0: $\mu = \mu_0$ es cierta, la probabilidad de que la estadística de prueba Z_0 caiga entre $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ es $1 - \alpha$. (Recuérdese que $z_{\alpha/2}$ es el punto que corresponde al porcentaje $100\alpha/2$ de la distribución normal estándar.) La figura 8-6 ilustra esta situación. Nótese que la probabilidad de que la estadística de prueba Z_0 caiga en la región $Z_0 > z_{\alpha/2}$ o $Z_0 < -z_{\alpha/2}$ cuando H_0: $\mu = \mu_0$ es verdadera, es α. Es evidente que una muestra que produce un valor del estadístico de prueba que cae en las colas de la distribución de Z_0 será inusual si H_0: $\mu = \mu_0$ es cierta; por tanto, esto es un indicador de que H_0 es falso. En consecuencia, H_0 debe rechazarse si

$$z_0 > z_{\alpha/2} \tag{8-9}$$

o

$$z_0 < -z_{\alpha/2} \tag{8-10}$$

Por otra parte, H_0 no puede rechazarse si

$$-z_{\alpha/2} \leq z_0 \leq z_{\alpha/2} \tag{8-11}$$

La ecuación 8-11 define la **región de aceptación** de H_0, y las ecuaciones 8-9 y 8-10 definen la **región crítica** o **región de rechazo.** La probabilidad del error tipo I para este procedimiento de prueba es α.

En general, es más fácil comprender la región crítica y el procedimiento de prueba cuando la estadística de prueba es Z_0 más que $\overline{X}$. Sin embargo, la misma región crítica siempre puede escribirse en términos del valor calculado de la media muestral $\bar{x}$. Un procedimiento idéntico al anterior es el siguiente:

$$\text{Rechazar } H_0\text{: } \mu = \mu_0 \text{ si } \bar{x} > a \text{ o } \bar{x} < b$$

donde

$$a = \mu_0 + z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \tag{8-12}$$

$$b = \mu_0 - z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \tag{8-13}$$

EJEMPLO 8-2

Los sistemas de escape de emergencia para tripulaciones de aeronaves son impulsados por un combustible sólido. Una de las características importantes de este producto es la rapidez de combustión. Las especificaciones requieren que la rapidez promedio de combustión sea 50 cm/s. Se sabe que la desviación estándar de esta rapidez es $\sigma = 2$ cm/s. El experimentador decide especificar una probabilidad para el error tipo I, o nivel de significancia, de $\alpha = 0.05$. Selecciona una muestra aleatoria de $n = 25$ y obtiene una rapidez promedio muestral de combustión de $\bar{x} = 51.3$ cm/s. ¿A qué conclusiones debe llegar?

La solución de este problema puede hallarse siguiendo el procedimiento de ocho pasos delineado en la sección 8-1.4. Al hacerlo se tiene lo siguiente:

1. El parámetro de interés es μ, la rapidez promedio de combustión.
2. H_0: $\mu = 50$ cm/s
3. H_1: $\mu \neq 50$ cm/s
4. $\alpha = 0.05$
5. La estadística de prueba es

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

6. Rechazar H_0 si $z_0 > 1.96$ o si $z_0 < -1.96$. Nótese que esto es consecuencia del paso 4, donde se especifica $\alpha = 0.05$, de modo que las fronteras de la región crítica son $z_{0.025} = 1.96$ y $-z_{0.025} = -1.96$.
7. Cálculos: Puesto que $\bar{x} = 51.3$ y $\sigma = 2$,

$$z_0 = \frac{51.3 - 50}{2/\sqrt{25}} = 3.25$$

8. Conclusión: Dado que $z_0 = 3.25 > 1.96$, se rechaza H_0: $\mu = 50$ con un nivel de significancia de 0.05. Planteado de manera más completa, se concluye que, con base en una muestra de 25 mediciones, la rapidez promedio de combustión es diferente de 50 cm/s. De hecho, existe una evidencia fuerte que la rapidez promedio de combustión es mayor que 50 cm/s.

También pueden desarrollarse procedimientos para la prueba de hipótesis sobre μ, donde la hipótesis alternativa es unilateral. Supóngase que se especifican las hipótesis como

$$\begin{aligned} H_0&: \mu = \mu_0 \\ H_1&: \mu > \mu_0 \end{aligned} \tag{8-14}$$

Al definir la región crítica para esta prueba, se observa que un valor negativo de la estadística de prueba Z_0 nunca conducirá a la conclusión de que H_0: $\mu = \mu_0$ es falsa. Por consiguiente, la región crítica debe colocarse en la cola superior de la distribución normal estándar y el rechazo de H_0 se hará cuando el valor calculado de z_0 sea muy grande. Esto es, H_0 será rechazada si

$$z_0 > z_\alpha \tag{8-15}$$

De manera similar, para probar

$$H_0\colon \mu = \mu_0$$
$$H_1\colon \mu < \mu_0 \tag{8-16}$$

se calcula la estadística de prueba Z_0 y se rechaza H_0 si el valor de Z_0 es muy pequeño. Esto es, ahora la región crítica se encuentra en la cola inferior de la distribución normal estándar y se rechaza H_0 si

$$z_0 < -z_\alpha \tag{8-17}$$

8-2.2 Uso de valores *P* en la prueba de hipótesis

Una manera de notificar los resultados de una prueba de hipótesis es establecer que la hipótesis nula fue o no rechazada con un valor especificado de α o **nivel de significancia**. Por ejemplo, en el problema anterior sobre el combustible sólido, puede decirse que H_0: $\mu = 50$ fue rechazada con un nivel de significancia de 0.05. A menudo, este planteamiento de las conclusiones resulta inadecuado, ya que no brinda al tomador de decisiones ninguna idea sobre si el valor calculado de la estadística de prueba estaba apenas en la región de rechazo o bien ubicado dentro de ella. Además, establecer de esta manera los resultados impone a otros usuarios de la información el nivel de significancia predeterminado. Este enfoque puede ser poco satisfactorio, ya que algunos tomadores de decisiones se sentirán incómodos con los riesgos implicados por $\alpha = 0.05$.

Para evitar estas dificultades, en la práctica se ha adoptado, de manera amplia, el **enfoque del valor *P***. El valor P es la probabilidad de que el estadístico de prueba tome un valor que sea al menos tan extremo como el valor observado del estadístico de prueba cuando la hipótesis nula H_0 es verdadera. Es así como el valor P acarrea mucha información sobre el peso de la evidencia contra H_0, de modo que el tomador de decisiones pueda llegar a una conclusión para *cualquier* nivel de significancia especificado. A continuación se proporciona una definición formal de un valor P.

Definición

El **valor *P*** es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula H_0.

Es habitual llamar al estadístico de prueba (y a los datos) significante cuando se rechaza a la hipótesis nula H_0; por tanto, el valor P puede considerarse como el nivel de significancia α más pequeño para el que los datos son significativos. Una vez que se conoce el valor P, el tomador de decisiones puede determinar por sí mismo cuán significativos son los datos, sin que el analista de los mismos imponga un nivel de significancia seleccionado de antemano.

Para las pruebas de distribuciones normales presentadas hasta el momento (así como las que aparecen en la sección 8-3), es relativamente sencillo calcular el valor P. Si z_0 es el valor calculado del estadístico de prueba, entonces el valor P es

$$P = \begin{cases} 2[1 - \Phi(|z_0|)] & \text{para una prueba de dos colas: } H_0\text{: } \mu = \mu_0 \quad H_1\text{: } \mu \neq \mu_0 \\ 1 - \Phi(z_0) & \text{para una prueba de cola superior: } H_0\text{: } \mu = \mu_0 \quad H_1\text{: } \mu > \mu_0 \\ \Phi(z_0) & \text{para una prueba de cola inferior: } H_0\text{: } \mu = \mu_0 \quad H_1\text{: } \mu < \mu_0 \end{cases} \tag{8-18}$$

En las expresiones anteriores, $\Phi(z)$ es la función de distribución acumulada normal estándar definida en el capítulo 4. Recuérdese que $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, donde Z es $N(0, 1)$. Para ilustrar esto, considérese el problema del ejemplo 8-2. El valor calculado del estadístico de prueba es $z_0 = 3.25$ y, puesto que la hipótesis alternativa es de dos colas, el valor P es

$$P = 2[1 - \Phi(3.25)] = 0.0012$$

Por tanto, H_0: $\mu = 50$ será rechazada con cualquier nivel de significancia $\alpha \geq P = 0.0012$. Por ejemplo, H_0 será rechazada si $\alpha = 0.01$, pero no será rechazada si $\alpha = 0.001$.

No siempre resulta sencillo calcular el valor exacto de P para una prueba. Sin embargo, muchos programas de computadora modernos para análisis estadístico notifican valores P, y éstos también pueden obtenerse con algunas calculadoras de mano. Más adelante se mostrará como obtener valores P aproximados. Finalmente, si se utiliza el enfoque del valor P, entonces puede modificarse el paso 6 del procedimiento para la prueba de hipótesis. De manera específica, no es necesario plantear explícitamente la región crítica.

8-2.3 Error tipo II y selección del tamaño de la muestra

En la prueba de hipótesis, el analista selecciona directamente la probabilidad del error tipo I. Sin embargo, la probabilidad β del error tipo II depende de la elección hecha para el tamaño de la muestra. En esta sección se muestra cómo calcular la probabilidad β del error tipo II. Asimismo, también se muestra cómo seleccionar el tamaño de la muestra con la finalidad de obtener un valor específico de β.

Cálculo de la probabilidad β del error tipo II

Considérese la hipótesis bilateral

$$H_0\text{: } \mu = \mu_0$$

$$H_1\text{: } \mu \neq \mu_0$$

Supóngase que la hipótesis nula es falsa y que el verdadero valor de la media es $\mu = \mu_0 + \delta$, donde $\delta > 0$. El estadístico de prueba Z_0 es

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

Por tanto, la distribución de Z_0 cuando H_1 es verdadera es

$$Z_0 \sim N\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right) \tag{8-19}$$

La figura 8-7 ilustra la distribución del estadístico de prueba Z_0 bajo la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1. Del análisis de esta figura, se nota que si H_1 es verdadera, entonces se cometerá un error tipo II sólo si $-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2}$, donde $Z_0 \sim N(\delta\sqrt{n}/\sigma, 1)$. Esto es, la probabilidad β del error tipo II es la probabilidad de que Z_0 caiga entre $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ *dado que H_1 es verdadera*. Esta probabilidad es la que aparece como región sombreada en la figura 8-7. Expresada en términos matemáticos, esta probabilidad es

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \tag{8-20}$$

donde $\Phi(z)$ denota la probabilidad a la izquierda de z en la distribución normal estándar. Nótese que la ecuación 8-20 se obtiene mediante la evaluación de la probabilidad de que Z_0 caiga en el intervalo $[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}]$ de la distribución de Z_0 cuando H_1 es verdadera. Estos dos puntos fueron estandarizados para producir la ecuación 8-20. Por otra parte, nótese que la ecuación 8-20 también es válida si $\delta < 0$, debido a la simetría de la distribución normal.

Uso de las curvas características de operación

Si bien la ecuación 8-20 puede utilizarse para evaluar el error tipo II, es más conveniente utilizar las **curvas características de operación** que aparecen en los diagramas VI*a* y VI*b* del apéndice de cartas. Estas curvas son una gráfica de β, tal como se calcula ésta con la ecuación 8-20, contra un parámetro d para varios tamaños n de la muestra. Las curvas se

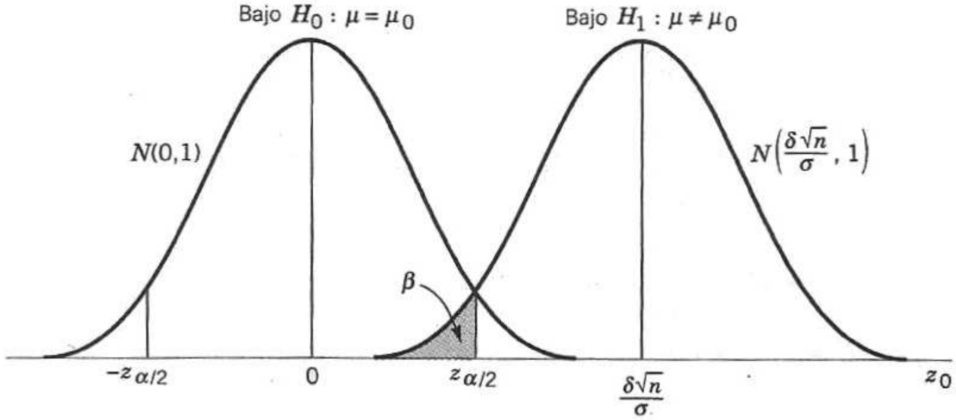


Figura 8-7 Distribución de Z_0 bajo H_0 y H_1.

proporcionan tanto para $\alpha = 0.05$ como para $\alpha = 0.01$. El parámetro d se define de la siguiente manera

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma} \tag{8-21}$$

Es necesario escoger d de modo que sea posible utilizar un conjunto de curvas características de operación para todos los problemas, sin importar el valor de μ_0 y σ. Del examen de las curvas características de operación o de la ecuación 8-20 y la figura 8-7, se nota que

1. Entre más se aleja el verdadero valor de la media μ de μ_0, menor es la probabilidad β del error tipo II para una n y α dadas. Esto es, se observa que para un tamaño de muestra y α dadas, es más fácil detectar diferencias grandes en la media que diferencias pequeñas.
2. Para δ y α dadas, la probabilidad β del error tipo II disminuye a medida que n aumenta. Esto es, para detectar una diferencia δ específica en la media, la prueba puede hacerse más poderosa al aumentar el tamaño de la muestra.

EJEMPLO 8-3

Considérese el problema del ejemplo 8-2. Supóngase que el analista está interesado en la probabilidad del error tipo II si la verdadera rapidez promedio de combustión es $\mu = 51$ cm/s. Para hallar β pueden utilizarse las curvas características de operación. Nótese que $\delta = 51 - 50 = 1$, $n = 25$, $\sigma = 2$ y $\alpha = 0.05$. Entonces,

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma} = \frac{1}{2}$$

y del diagrama VI*a* del apéndice de cartas, con $n = 25$, se tiene que $\beta = 0.30$. Esto es, si el verdadero valor de la rapidez promedio de combustión es $\mu = 51$ cm/s, entonces existe, de manera aproximada, una posibilidad del 30% de que esto no sea detectado por la prueba con $n = 25$.

EJEMPLO 8-4

Una vez más, considérese el problema del combustible sólido del ejemplo 8-2. Supóngase que al analista le gustaría diseñar la prueba de modo que, si el verdadero valor de la rapidez promedio de combustión difiere tanto como 1 cm/s del valor 50 cm/s, la prueba detecta este hecho (esto es, rechace H_0: $\mu = 50$) con una probabilidad alta, por ejemplo, 0.90. En este caso, las curvas características de operación pueden emplearse para encontrar el tamaño de la muestra necesario para efectuar tal prueba. Puesto que $d = |\mu - \mu_0|/\sigma = 1/2$, $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$, del diagrama VI*a* del apéndice de cartas, se tiene que el tamaño necesario que debe tener la muestra es, de manera aproximada, $n = 40$.

En general, en las curvas características de operación aparecen tres parámetros: β, d y n. Dados dos de ellos, entonces puede obtenerse el tercero. Para estas curvas existen dos aplicaciones muy comunes:

1. Para n y d dados, encontrar β (tal como lo ilustra el ejemplo 8-3). A menudo, esta clase de problemas de encuentra en situaciones donde el analista tiene que ver con la sensibilidad de un experimento ya realizado, o cuando el tamaño de la muestra está restringido por razones económicas o factores de otra índole.
2. Para β y d dados, encontrar n. Esta situación la ilustra el ejemplo 8-4. Esta clase de problemas usualmente se encuentra cuando el analista tiene la oportunidad de seleccionar el tamaño de la muestra antes de realizar el experimento.

Las curvas características de operación están dadas en el apéndice por los diagramas VI*c* y VI*d* para alternativas unilaterales. Si la hipótesis alternativa es H_1: $\mu > \mu_0$, entonces la escala de la abcisa de estos diagramas es

$$d = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \tag{8-22}$$

Cuando la hipótesis alternativa es H_1: $\mu < \mu_0$, la escala que corresponde a la abcisa es

$$d = \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} \tag{8-23}$$

Fórmulas para el tamaño de la muestra

También es posible obtener fórmulas que determinen el tamaño apropiado de la muestra, necesario para obtener un valor particular de β, para δ y α dados. Estas fórmulas son alternativas al empleo de las curvas características de operación. Para la hipótesis alternativa bilateral, de la ecuación 8-20 se sabe que

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

o, si $\delta > 0$,

$$\beta \simeq \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \tag{8-24}$$

puesto que $\Phi(-z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}/\sigma) \simeq 0$ cuando δ es positivo. De la ecuación 8-24, con z_β definida por $\beta = \Phi(-z_\beta)$, se tiene

$$-z_\beta \simeq z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

o

$$n \simeq \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2\,\sigma^2}{\delta^2} \tag{8-25}$$

Esta aproximación es buena cuando $\Phi(-z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}/\sigma)$ es pequeño comparado con β. Para cualquier hipótesis alternativa unilateral, el tamaño de la muestra necesario para producir un determinado error tipo II con probabilidad β, dados δ y α, es

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2\,\sigma^2}{\delta^2} \tag{8-26}$$

EJEMPLO 8-5

Considérese de nuevo el problema del combustible sólido del ejemplo 8-4. Nótese que $\sigma = 2$, $\delta = 51 - 50 = 1$, $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$. Puesto que $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ y $z_\beta = z_{0.10} = 1.28$, el tamaño de la muestra necesario para detectar este alejamiento de H_0: $\mu = 50$ se obtiene con la ecuación 8-25, y es

$$n \simeq \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2\,\sigma^2}{\delta^2} = \frac{(1.96 + 1.28)^2 2^2}{(1)^2} \simeq 42$$

valor muy cercano al obtenido a partir de la curva característica de operación. Nótese que la aproximación es buena, ya que $\Phi(-z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}/\sigma) = \Phi(-1.96 - (1)\sqrt{42}/2) = \Phi(-5.20) \simeq 0$, que es un valor pequeño en comparación con β.

8-2.4 Relación entre pruebas de hipótesis e intervalos de confianza

Existe una relación muy estrecha entre la prueba de una hipótesis sobre un parámetro θ y el intervalo de confianza de θ. Si $[l, u]$ es un intervalo de confianza del $100(1 - \alpha)$ por ciento para el parámetro θ, entonces la prueba de tamaño α de la hipótesis

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

conduce al rechazo de H_0 si y sólo si θ_0 no está en el intervalo de confianza $[l, u]$ del $100(1 - \alpha)$ por ciento. Como ilustración de este hecho, considérese el ejemplo 8-2. En él se rechazó la hipótesis nula H_0: $\mu = 50$, utilizando $\alpha = 0.05$. El intervalo de confianza bilateral del 95% para μ, para los datos del problema, puede calcularse a partir de la ecuación 7-8, y es $50.52 \leq \mu \leq 52.08$. Esto es, el intervalo $[l, u]$ es $[50.52, 52.08]$, y puesto que $\mu_0 = 50$ no está incluido en este intervalo, entonces se rechaza la hipótesis nula H_0: $\mu = 50$.

8-2.5 Prueba para muestras grandes con varianza desconocida

Aunque ya se ha desarrollado el procedimiento de prueba para la hipótesis nula H_0: $\mu = \mu_0$ suponiendo que σ^2 es conocida, en muchas (si no es que en la mayor parte) de las situaciones prácticas, σ^2 es desconocida. En general, si $n \geq 30$, entonces la varianza muestral s^2 estará próxima a σ^2 en la mayor parte de las muestras, de modo que es posible sustituir σ por s en los procedimientos de prueba, con muy pocos efectos adversos. Es así como, dada una prueba para σ^2 conocida, ésta puede convertirse en un *procedimiento de prueba para muestras grandes con* σ^2 *desconocida.* El estudio exacto donde σ^2 es desconocida y n es pequeña implica el uso de la distribución t y será pospuesto hasta la sección 8-4.

8-2.6 Algunos comentarios prácticos sobre la prueba de hipótesis

El procedimiento de ocho pasos

En la sección 8-1.4 se describió un procedimiento de ocho pasos para la prueba estadística de hipótesis. Este procedimiento fue ilustrado en el ejemplo 8-2, y aparecerá muchas veces en este capítulo. En la práctica, este procedimiento formal y (en apariencia) rígido, no siempre es necesario. En general, una vez que el experimentador (o tomador de decisiones) ha decidido sobre la pregunta de interés y ha determinado el *diseño del experimento* (esto es, cómo recopilar los datos, cómo tomar las mediciones y cuántas observaciones se requieren), entonces en realidad sólo se necesitan tres pasos:

1. Especificar la estadística de prueba que va a utilizarse (tal como z_0).
2. Especificar la ubicación de la región crítica (de dos colas, de cola superior o de cola inferior).
3. Especificar los criterios de rechazo (en general, el valor de α, o el valor P para el que debe ocurrir el rechazo).

A menudo, en la solución de problemas reales, estos pasos se completan casi al mismo tiempo, aunque es necesario hacer hincapié en que es necesario reflexionar detenidamente cada uno de ellos. Ésta es la razón por la que se presentó y se utilizó el proceso de ocho pasos: parece reforzar los fundamentos del enfoque correcto. Si bien, tal vez no se utilice todas las veces en la solución de problemas reales, es un marco de referencia útil cuando se aprenden por primera vez métodos estadísticos.

Significado estadístico y significado práctico

Ya se ha mencionado que es muy útil notificar los resultados de una prueba de hipótesis en términos de un valor P, ya que esto conlleva más información que la simple proposición "rechazar H_0" o "no es posible rechazar H_0". Esto es, el rechazo de H_0 con un nivel de significancia 0.05 tiene un significado mayor si el valor del estadístico de prueba está bien ubicado en la región crítica, excediendo por más del 5% el valor crítico, que si apenas excede este valor.

Incluso un valor P muy pequeño puede ser difícil de interpretar desde un punto de vista práctico cuando se toman decisiones, ya que, si bien un valor pequeño de P indica **significancia estadística** en el sentido en que debe rechazarse H_0 en favor de H_1, el alejamiento real detectado con respecto a H_0 puede tener poca **significancia práctica** (a los ingenieros les gusta decir "significancia ingenieril"). Esto es particularmente cierto cuando el tamaño de la muestra n es grande.

Por ejemplo, considérese el problema del combustible del ejemplo 8-2, donde se prueba H_0: $\mu = 50$ cm/s contra H_1: $\mu \neq 50$ cm/s con $\sigma = 2$. Si se supone que la rapidez promedio de combustión es realmente 50.5 cm/s, entonces esto no representa un alejamiento serio de H_0: $\mu = 50$ cm/s en el sentido de que si la media es realmente 50.5 cm/s, entonces no hay ningún efecto prácticamente observable sobre el desempeño del sistema de escape de emergencia de la tripulación. En otras palabras, concluir que $\mu = 50$ cm/s cuando este valor es en realidad 50.5 cm/s es un error económico que no tiene importancia práctica. Para un tamaño de muestra razonablemente grande, un valor verdadero de $\mu = 50.5$ cm/s conducirá a una $\bar{x}$ muestral próxima a 50.5 cm/s, y no se desea que este valor de $\bar{x}$ conduzca al rechazo de H_0. La tabla siguiente muestra el valor P para la prueba H_0: $\mu = 50$ cuando se observa $\bar{x} = 50.5$ cm/s, y la potencia de la prueba para $\alpha = 0.05$ cuando el valor verdadero de la media es 50.5 para varios tamaños de muestra, n.

Tamaño de la muestra n	Valor P Cuando $\bar{x} = 50.5$	Potencia (para $\alpha = 0.05$) Cuando $\mu = 50.5$
10	0.4295	0.1241
25	0.2113	0.2396
50	0.0767	0.4239
100	0.0124	0.7054
400	5.73×10^{-7}	0.9988
1000	2.57×10^{-15}	1.0000

En esta tabla, la columna que corresponde al valor P indica que, para tamaños grandes de muestras, el valor muestral observado $\bar{x} = 50.5$ sugiere de manera fuerte que H_0: $\mu = 50$ debe ser rechazada, aun cuando los resultados observados en la muestra impliquen que, desde un punto de vista práctico, el valor verdadero de la media no difiere mucho del valor hipotético de ésta, $\mu_0 = 50$. La columna de potencia indica que si se prueba una hipótesis con un nivel de significancia α e incluso si existe poca diferencia práctica entre el valor verdadero de la media y el hipotético, entonces un tamaño de muestra grande casi siempre conducirá al rechazo de H_0. La moraleja de esta demostración es clara: **debe tenerse cuidado al interpretar los resultados de una prueba de hipótesis, cuando el tamaño de la muestra es grande, ya que es muy probable que se detecte cualquier alejamiento pequeño con respecto al valor hipotético μ_0, incluso si la diferencia es pequeña o no tiene ninguna importancia práctica.**

Construcción de la prueba

Los procedimientos de prueba presentados en esta sección se han desarrollado de manera informal. Por ejemplo, cuando se muestrea una población normal con media μ y varianza conocida σ^2 y se prueba H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1: $\mu > \mu_0$, se comienza con la media muestral $\bar{X}$ y luego se emplea la estadística de prueba estandarizada

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Entonces, la intuición sugiere que se rechace H_0: $\mu = \mu_0$ cuando el valor numérico de z_0 es grande. La región crítica se obtiene al usar el hecho de que Z_0 tiene una distribución normal estándar cuando H_0: $\mu = \mu_0$ es verdadera, de modo que el punto z_α será el valor crítico apropiado.

Pueden emplearse métodos más formales para el desarrollo de procedimientos para la prueba estadística de hipótesis. Un método muy utilizado para la construcción de pruebas es el **principio de la razón de verosimilitudes**. Muchos de los procedimientos de prueba presentados en este libro pueden obtenerse con el empleo de este método. Por ejemplo, la prueba anterior es una prueba de razón de verosimilitudes. A menudo, las pruebas estadísticas obtenidas a partir de este principio tienen el error tipo II más pequeño (la β más pequeña) de entre todas las pruebas que tienen la misma probabilidad para el error tipo I (α). Es así como, en cierto sentido, éstos son procedimientos de prueba óptimos. El material complementario del apéndice proporciona una descripción breve del principio de la razón de verosimilitudes así como un ejemplo resuelto.

8-3 PRUEBA DE HIPÓTESIS SOBRE LA IGUALDAD DE DOS MEDIAS, VARIANZAS CONOCIDAS

8-3.1 Desarrollo del procedimiento de prueba

Supóngase que se tienen dos poblaciones de interés. La primera tiene una media desconocida μ_1 y varianza conocida σ_1^2, mientras que la segunda tiene una media desconocida μ_2 y varianza conocida σ_2^2. El interés recae en probar la hipótesis de que las dos medias poblacionales μ_1 y μ_2 son iguales. Supóngase que las dos poblaciones son normales, y que si no lo son se aplican las condiciones del teorema del límite central.

Considérense primero las hipótesis alternativas bilaterales

$$H_0\colon \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2 \tag{8-27}$$

Supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño n_1 de la primera población, $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{n_1}$, y otra muestra aleatoria de tamaño n_2 de la segunda población, $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{n_2}$. Supóngase que las observaciones de la muestra 1 están distribuidas de manera independiente con media μ_1 y varianza σ_1^2, que las observaciones de la muestra 2 están distribuidas de manera independiente con media μ_2 y varianza σ_2^2, y que las dos muestras $\{X_{1j}\}$ y $\{X_{2j}\}$ son independientes. El procedimiento de prueba se basa en la distribución de la diferencia entre las medias muestrales $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. En general, se sabe que, a la luz de las hipótesis anteriores, la distribución de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ es normal con media $\mu_1 - \mu_2$ y varianza $\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$. Esto es,

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Por tanto, si la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2$ es verdadera, el estadístico de prueba

$$Z_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{8-28}$$

tiene una distribución normal estándar. Por consiguiente, el procedimiento para probar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ es calcular el valor numérico del estadístico de prueba z_0 de la ecuación 8-28, y rechazar la hipótesis nula si

$$z_0 > z_{\alpha/2} \tag{8-29a}$$

o

$$z_0 < -z_{\alpha/2} \tag{8-29b}$$

Las hipótesis alternativas unilaterales se analizan de forma similar. Para probar

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \tag{8-30}$$

se calcula el estadístico de prueba z_0 de la ecuación 8-28, y H_0: $\mu_1 = \mu_2$ se rechaza si

$$z_0 > z_\alpha \tag{8-31}$$

Para probar la otra hipótesis alternativa unilateral

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 < \mu_2 \tag{8-32}$$

se utiliza el estadístico de prueba z_0 de la ecuación 8-28, y se rechaza H_0: $\mu_1 = \mu_2$ si

$$z_0 < -z_\alpha \tag{8-33}$$

EJEMPLO 8-6

Un diseñador de productos está interesado en reducir el tiempo de secado de una pintura tapaporos. Se prueban dos fórmulas de pintura; la fórmula 1 tiene el contenido químico estándar, y la fórmula 2 tiene un nuevo ingrediente secante que debe reducir el tiempo de secado. De la experiencia se sabe que la desviación estándar del tiempo de secado es ocho minutos, y esta variabilidad inherente no debe verse afectada por la adición del nuevo ingrediente. Se pintan diez especímenes con la fórmula 1, y otros diez con la fórmula 2. Los dos tiempos promedio de secado muestrales son $\bar{x}_1 = 121$ min y $\bar{x}_2 = 112$ min, respectivamente. ¿A qué conclusiones puede llegar el diseñador del producto sobre la eficacia del nuevo ingrediente, utilizando $\alpha = 0.05$?

En este problema, el procedimiento de ocho pasos se aplica de la siguiente manera:

1. La cantidad de interés es la diferencia entre los tiempos promedio de secado, $\mu_1 - \mu_2$
2. H_0: $\mu_1 = \mu_2$
3. H_1: $\mu_1 > \mu_2$. Se desea rechazar H_0 si el nuevo ingrediente disminuye el tiempo promedio de secado.
4. $\alpha = 0.05$

5. El estadístico de prueba es

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

donde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (8)^2 = 64$ y $n_1 = n_2 = 10$.

6. Rechazar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ si $z_0 > 1.645 = z_{0.05}$.

7. Cálculos: Puesto que $\bar{x}_1 = 121$ min y $\bar{x}_2 = 112$ min, lo estadístico de prueba es

$$z_0 = \frac{121 - 112}{\sqrt{\dfrac{(8)^2}{10} + \dfrac{(8)^2}{10}}} = 2.52$$

8. Conclusión: Puesto que $z_0 = 2.52 > 1.645$, se rechaza H_0: $\mu_1 = \mu_2$ con un nivel $\alpha = 0.05$, y se concluye que la adición del nuevo ingrediente a la pintura sí disminuye de manera significativa el tiempo de secado. Como alternativa, puede encontrarse el valor P para esta prueba de la manera siguiente

$$P = 1 - \Phi(2.52) = 0.0059$$

Por consiguiente, H_0: $\mu_1 = \mu_2$ debe ser rechazada con un nivel de significancia $\alpha \geq 0.0059$.

8-3.2 Selección del tamaño de la muestra

Uso de las curvas características de operación

Las curvas características de operación que aparecen en los diagramas VI*a*, VI*b*, VI*c* y VI*d* del apéndice, pueden emplearse para evaluar la probabilidad del error tipo II para las hipótesis de las ecuaciones 8-27, 8-30 y 8-32. Estas curvas también son útiles para determinar el tamaño de la muestra. Las curvas se proporcionan para $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$. Para la hipótesis alternativa bilateral de la ecuación 8-27, la escala de la abcisa de las curva característica de operación de los diagramas VI*a* y VI*b* es d, donde

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{|\delta|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \tag{8-34}$$

y debe elegirse el mismo tamaño para las muestras, $n = n_1 = n_2$. Las hipótesis alternativas unilaterales requieren el uso de los diagramas VI*c* y VI*d*. Para la hipótesis alternativa unilateral H_1: $\mu_1 > \mu_2$ de la ecuación 8-30, la escala de la abcisa es

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \tag{8-35}$$

con $n = n_1 = n_2$. La otra hipótesis alternativa unilateral, H_1: $\mu_1 < \mu_2$, requiere que d se defina como

$$d = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \tag{8-36}$$

y $n = n_1 = n_2$.

No es poco usual encontrar problemas donde los costos de la recopilación de datos difieran de manera sustancial entre dos poblaciones, o donde la varianza de una de ellas sea mucho mayor que la de la otra. En estos casos, a menudo se utilizan tamaños de muestras que no son iguales. Si $n_1 \neq n_2$, las curvas características de operación pueden introducirse con un valor *equivalente* de n calculado a partir de

$$n = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \tag{8-37}$$

Si $n_1 \neq n_2$, y sus valores se fijan de antemano, entonces la ecuación 8-37 se utiliza de manera directa para calcular n, y se introducen las curvas características de operación con un valor específico de d para obtener β. Si d está dada y es necesario determinar n_1 y n_2 para obtener un valor específico de β, por ejemplo β^*, entonces se proponen valores de n_1 y n_2, se calcula n con la ecuación 8-37 y se introducen las curvas con el valor especificado de d para hallar β. Si $\beta = \beta^*$, entonces los valores propuestos para n_1 y n_2 son satisfactorios. Si $\beta \neq \beta^*$, entonces vuelven a proponerse otros valores para n_1 y n_2 y el proceso de repite.

EJEMPLO 8-7

Considérese el experimento de tiempo de secado de pintura del ejemplo 8-6. Si la verdadera diferencia en los tiempos promedio de secado es como máximo de 10 minutos, encuéntrense los tamaños de las muestras requeridos para detectar esta diferencia con una probabilidad al menos de 0.90.

El valor apropiado del parámetro de la abcisa es

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{10}{\sqrt{8^2 + 8^2}} = 0.88$$

y puesto que la probabilidad de detección o potencia de la prueba debe ser al menos de 0.90 con $\alpha = 0.05$, entonces, del diagrama VI*c* del apéndice, $n = n_1 = n_2 \simeq 11$.

Fórmulas para el tamaño de la muestra

También es posible obtener fórmulas para el tamaño de la muestra necesario para obtener una β específica para una diferencia dada en las medias δ y α. Estas fórmulas son alternativas útiles a la curva característica de operación. Para la hipótesis alternativa bilateral, el tamaño de la muestra $n_1 = n_2 = n$ es

$$n \simeq \frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\delta^2} \tag{8-38}$$

Esta aproximación es válida cuando $\Phi(-z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}/\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ es pequeña comparado con β. Para una alternativa unilateral, se tiene $n_1 = n_2 = n$, donde

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\delta^2} \tag{8-39}$$

La deducción de las ecuaciones 8-38 y 8-39 es muy similar al del caso de una sola muestra (sección 8-2.3). Por ejemplo, para obtener la ecuación 8-38, primero se escribe la expresión para el error β de una hipótesis alternativa bilateral, el cual es

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right)$$

donde $\delta = \mu_1 - \mu_2$ es la diferencia entre las medias de interés. Después, al seguir un procedimiento similar al utilizado para obtener la ecuación 8-25, puede obtenerse la expresión para β para el caso donde $n = n_1 = n_2$.

Para ilustrar el uso de estas ecuaciones para el tamaño de la muestra, considérese la situación descrita en el ejemplo 8-7. Se tiene una hipótesis alternativa unilateral con $\delta = 10$, $\alpha = 0.05$ (con lo que $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$), y puesto que la potencia es 0.9, $\beta = 0.10$ (así que $z_\beta = z_{0.10} = 1.28$), puede encontrarse el tamaño de la muestra a partir de la ecuación 8-39 de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} n &= \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\delta^2} = \frac{(1.645 + 1.28)^2[(8)^2 + (8)^2]}{(10)^2} \\ &= 11 \end{aligned}$$

resultado que concuerda con el obtenido en el ejemplo 8-7 mediante las curvas CO.

8-3.3 Identificación causa-efecto

Los ingenieros y los científicos a menudo están interesados en comparar dos situaciones diferentes para determinar si alguna de éstas produce un efecto significativo son la respuesta que observan. Estas condiciones a veces reciben el nombre de "tratamientos". El ejemplo 8-6 ilustra esta situación; los dos tratamientos diferentes son las dos fórmulas de pintura, y la respuesta es el tiempo de secado—. La finalidad del estudio es determinar si la fórmula nueva da origen a un efecto significativo —la disminución del tiempo de secado—. En esta situación, el diseñador del producto (el experimentador) asigna de manera aleatoria diez especímenes a una fórmula y 10 más a la otra. Luego se aplican las pinturas a los especímenes de prueba en un orden aleatorio hasta que los 20 están pintados. Éste es un ejemplo de un **experimento completamente aleatorizado.**

Cuando se observa la significancia estadística en un experimento aleatorizado, el experimentador puede tener confianza en que la diferencia en los tratamientos es la que origina la diferencia en la respuesta. Esto es, puede tenerse confianza en haber encontrado una relación causa-efecto.

A veces los objetos utilizados en la comparación no se asignan al azar a los tratamientos. Por ejemplo, el ejemplar de septiembre de 1992 de *Circulation* (revista médica publicada por la American Heart Association) dio a conocer un estudio que relaciona los altos niveles de hierro con un aumento en el riesgo de sufrir un ataque cardiaco. El estudio, efectuado en Finlandia, presentó el seguimiento por cinco años de 1931 hombres, y demostró un efecto estadístico significativo de los niveles de hierro altos sobre la incidencia de ataques cardiacos. En este estudio, la comparación no se realizó al seleccionar de manera aleatoria una muestra de hombres y luego asignarles a algunos un tratamiento "nivel bajo de hierro" y a otros un tratamiento "nivel alto de hierro". Los investigadores sólo hicieron el seguimiento en el tiempo de todos los sujetos. Este tipo de estudio recibe el nombre de **estudio observacional**.

En los estudios observacionales es difícil identificar la causalidad, ya que la diferencia significativa estadísticamente observada en la respuesta de los dos grupos puede deberse a algún otro factor (o grupo de factores) que no tiene una aleatorización igual y no tanto por los tratamientos. Por ejemplo, la diferencia en el riesgo de ataque cardiaco puede atribuirse a la diferencia en los niveles de hierro, o a otros factores subyacentes que constituyen una explicación razonable de los resultados observados —como pueden ser los niveles de colesterol o la hipertensión.

La dificultad para establecer la causalidad a partir de estudios observacionales también puede verse en la controversia entre el hábito de fumar y la salud. Numerosos estudios muestran que la incidencia de cáncer pulmonar y otras enfermedades respiratorias es más alta entre los fumadores que entre los no fumadores. Sin embargo, se ha demostrado que el establecimiento causa-efecto es muy difícil. Bastantes personas ya habían decidido fumar mucho antes del comienzo de los estudios de investigación, y existen muchos factores, además del hábito de fumar, que pueden tener un papel en el desarrollo del cáncer pulmonar.

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 8-2 Y 8-3

8-19. Se requiere que la tensión de ruptura de un hilo utilizado en la fabricación de material de tapicería sea al menos de 100 psi. La experiencia ha indicado que la desviación estándar de la tensión de ruptura es 2 psi. Se prueba una muestra aleatoria de nueve especímenes, y la tensión de ruptura promedio observada en ella es de 98 psi.

- **a.** ¿Debe considerarse la fibra como aceptable con $\alpha = 0.05$?
- **b.** ¿Cuál es el valor P de esta prueba?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula con $\alpha = 0.05$ si la tensión promedio de ruptura verdadera de la fibra es 104 psi?

8-20. Se estudia el rendimiento de un proceso químico. De la experiencia previa con este proceso, se sabe que la desviación estándar del rendimiento es 3. En los cinco días anteriores de operación de la planta, se han observado los siguientes rendimientos: 91.6%, 88.75%, 90.8%, 89.95% y 91.3%. Utilice $\alpha = 0.05$.

- **a.** ¿Existe evidencia de que el rendimiento no es del 90%?
- **b.** ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

c. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para detectar un rendimiento promedio verdadero de 85% con una probabilidad de 0.95?

d. ¿Cuál es la probabilidad del error tipo II si el rendimiento promedio verdadero es 92%?

8-21. Se sabe que el diámetro de los agujeros para una montura de cable tiene una desviación estándar de 0.01 in. Se obtiene una muestra aleatoria de diez monturas, donde el diámetro promedio resulta ser 1.5045 in. Utilice $\alpha = 0.01$.

a. Pruebe la hipótesis de que el diámetro promedio verdadero del agujero es 1.50 in.

b. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

c. ¿Qué tamaño de muestra se necesita para detectar un diámetro promedio verdadero de 1.505 in. con una probabilidad de al menos 0.90?

d. ¿Cuál es el valor de β si el diámetro promedio verdadero del agujero es 1.505 in.?

8-22. Considere los datos del ejercicio 7-1.

a. Pruebe la hipótesis de que el diámetro promedio verdadero de los anillos para pistón es 74.035 mm. Utilice $\alpha = 0.01$.

b. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

c. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para detectar un diámetro promedio verdadero de 74.030 con una probabilidad de al menos 0.95?

d. ¿Cuál es la potencia de la prueba del inciso a) si el verdadero diámetro promedio es $\mu = 74.025$ mm?

8-23. Considere los datos del ejercicio 7-2.

a. ¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que la duración promedio del foco es mayor que 1000 horas? Utilice $\alpha = 0.05$.

b. ¿Cuál es el valor P para la prueba del inciso a)?

c. ¿Cuál es el valor de β para la prueba del inciso a) si la verdadera duración promedio del foco es 1050 horas?

d. ¿Qué tamaño de muestra se necesita para asegurar que β no es mayor que 0.10 si la duración promedio verdadera del foco es 1025 horas?

8-24. Considere los datos del ejercicio 7-3.

a. Pruebe la hipótesis de que la resistencia a la compresión promedio es 3500 psi. Utilice $\alpha = 0.01$.

b. ¿Cuál es el nivel de significancia más pequeño con el que usted sería capaz de rechazar la hipótesis nula?

c. Suponga que se tiene interés en rechazar H_0: $\mu = 3500$ con una probabilidad de al menos 0.9 si μ difiere de 3500 tanto como 300 psi. ¿Cuál es el tamaño de la muestra que deberá emplearse para este fin? Utilice $\alpha = 0.01$.

8-25. Se utilizan dos máquinas para llenar botellas de plástico con un volumen neto de 16.0 onzas. Las distribuciones de los volúmenes de llenado pueden suponerse normales, con desviaciones estándar $\sigma_1 = 0.020$ y $\sigma_2 = 0.025$ onzas. Un miembro del grupo de ingeniería de calidad sospecha que el volumen neto de llenado de ambas máquinas es el mismo, sin importar si éste es o no de 16 onzas. De cada máquina se toma una muestra aleatoria de 10 botellas.

Máquina 1		Máquina 2	
16.03	16.01	16.02	16.03
16.04	15.96	15.97	16.04
16.05	15.98	15.96	16.02
16.05	16.02	16.01	16.01
16.02	15.99	15.99	16.00

a. ¿Se encuentra el ingeniero en lo correcto? Utilice $\alpha = 0.05$.

b. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

c. Si se supone que el tamaño de las muestras es el mismo, ¿qué tamaño de muestra debe utilizarse para asegurar que $\beta = 0.05$ si la diferencia verdadera entre las medias es 0.08? Suponga que $\alpha = 0.05$.

d. ¿Cuál es la potencia de la prueba del inciso a) si la diferencia verdadera entre las medias es 0.08?

8-26. Suponga que se realiza una prueba sobre la diferencia entre dos medias μ_1 y μ_2, donde las dos desviaciones estándar σ_1 y σ_2 son conocidas (como en la sección 8-3). De manera específica, se desea determinar si μ_1 difiere de μ_2 en una cantidad Δ, donde Δ es una constante conocida. Muestre la forma en que puede extenderse el procedimiento de la sección 8-3 para incorporar esta situación.

8-27. Existen dos tipos de plástico apropiados para su uso por un fabricante de componentes electrónicos. La tensión de ruptura de este plástico es un parámetro importante. Se sabe que $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.0$ psi. De una muestra aleatoria de tamaño $n_1 = 10$ y $n_2 = 12$, se tiene que $\bar{x}_1 = 162.5$ y $x_2 = 155.0$. La compañía no adoptará el plástico 1 a menos que la tensión de ruptura de éste exceda a la del plástico 2 al menos por 10 psi. Con base en la información contenida en la muestra, ¿la compañía deberá utilizar el plástico 1? Utilice $\alpha = 0.05$ para llegar a una decisión.

8-28. Considere los datos del ejercicio 7-7.

a. Pruebe la hipótesis de que ambas máquinas tienen el mismo volumen de llenado. Utilice $\alpha = 0.05$.

b. ¿Cuál es el valor P de la prueba del inciso a)?

c. Si el valor de β de la prueba, cuando la verdadera diferencia en el volumen de llenado es 0.2 onzas de fluido, no debe ser mayor que 0.1, ¿qué tamaño de muestras es necesario emplear? Utilice $\alpha = 0.05$.

8-29. Considere los datos del ejercicio 7-8.

a. Pruebe la hipótesis de que los dos combustibles sólidos tienen la misma rapidez promedio de combustión. Utilice $\alpha = 0.05$.

b. ¿Cuál es el valor P de la prueba del inciso a)?

c. ¿Cuál es el valor β de la prueba del inciso a) si la verdadera diferencia en la rapidez promedio de combustión es 2.5 cm/s?

8-30. Considere los datos de octanaje de gasolina del ejercicio 7-9. Si la fórmula 2 produce un rendimiento mayor en carretera que la fórmula 1, entonces al fabricante le gustaría detectar esto. Proponga y pruebe una hipótesis apropiada, utilizando $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-31. Considere los datos de viscosidad del lote de polímero del ejercicio 7-13. Al fabricante le gustaría detectar con una probabilidad muy alta si la viscosidad promedio del lote difiere de 750.

a. Proponga y pruebe una hipótesis apropiada utilizando $\alpha = 0.10$. ¿Cuáles son sus conclusiones?

b. Calcule el valor P de esta prueba.

c. Compare los resultados de los incisos a) y b) con la longitud del intervalo de confianza del 90% obtenido en el ejercicio 7-13, y analice sus hallazgos.

d. ¿Cuál es la potencia de la prueba del inciso a) si la viscosidad promedio es 760?

e. Si es importante que la potencia de la prueba sea al menos de 0.9 en caso de que la media verdadera sea 760, ¿qué tamaño de muestra debe emplearse para alcanzar este fin? Utilice $\alpha = 0.10$.

8-32. Para el problema del detergente del ejercicio 7-14, pruebe la hipótesis de que las concentraciones activas promedio son las mismas para los dos tipos de catalizador. Utilice $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-4 PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL, VARIANZA DESCONOCIDA

Cuando se prueban hipótesis sobre la media μ de una población cuando σ^2 es desconocida, es posible utilizar los procedimientos de prueba de la sección 8-2, siempre y cuando el tamaño de la muestra sea grande (por ejemplo, $n \geq 30$). Estos procedimientos son aproximadamente válidos (como consecuencia del teorema del límite central) sin importar si la población de interés es normal o no. Sin embargo, cuando la muestra es pequeña y σ^2 es desconocida, debe plantearse una hipótesis sobre la forma de la distribución subyacente con la finalidad de obtener un procedimiento de prueba. En muchos casos, una hipótesis razonable es que la distribución subyacente es normal.

Muchas de las poblaciones que se encuentran en la práctica quedan bien aproximadas por la distribución normal, motivo por el que esta hipótesis conduce a un procedimiento de prueba de gran aplicabilidad. De hecho, un alejamiento moderado de la normalidad tiene poco efecto sobre la validez de la prueba. Cuando la hipótesis no es razonable, entonces puede especificarse otra distribución (exponencial, Weibull, etc.) y usar algún método general para la construcción de pruebas con la finalidad de obtener un procedimiento válido, o también puede utilizarse una de las pruebas no paramétricas que son válidas para cualquier distribución (véase el capítulo 13).

8-4.1 Desarrollo del procedimiento de prueba

Supóngase que la población de interés tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 desconocidas. Se desea probar la hipótesis de que μ es igual a una constante μ_0. Nótese que esta situación es similar a la de la sección 8-2, con la excepción de que ahora tanto μ

como σ^2 son desconocidas. Supóngase que se tiene disponible una muestra aleatoria de tamaño $n, X_1, X_2, \ldots, X_n$, y sea $\overline{X}$ y S^2 la media y la varianza muestrales, respectivamente.

Se desea probar la hipótesis alternativa bilateral

$$H_0\colon \mu = \mu_0$$
$$H_1\colon \mu \neq \mu_0 \tag{8-40}$$

El procedimiento de prueba se basa en el estadístico

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{8-41}$$

el cual tiene una distribución t con $n - 1$ grados de libertad si la hipótesis nula $H_0\colon \mu = \mu_0$ es verdadera. Para probar $H_0\colon \mu = \mu_0$ de la ecuación 8-40, se calcula el valor del estadístico de prueba t_0 de la ecuación 8-41, y se rechaza H_0 si

$$t_0 > t_{\alpha/2,n-1} \tag{8-42a}$$

o

$$t_0 < -t_{\alpha/2,n-1} \tag{8-42b}$$

donde $t_{\alpha/2,\,n-1}$ y $-t_{\alpha/2,\,n-1}$ son los puntos superior e inferior que corresponden al porcentaje $100\alpha/2$ de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad.

Para la hipótesis alternativa unilateral

$$H_0\colon \mu = \mu_0$$
$$H_1\colon \mu > \mu_0 \tag{8-43}$$

se calcula la estadística de prueba t_0 de la ecuación 8-41, y se rechaza H_0 si

$$t_0 > t_{\alpha,n-1} \tag{8-44}$$

→ Cuando hipótesis dice mayor a algo

Para la otra alternativa unilateral

$$H_0\colon \mu = \mu_0$$
$$H_1\colon \mu < \mu_0 \tag{8-45}$$

se rechaza H_0 si

$$t_0 < -t_{\alpha,n-1} \tag{8-46}$$

EJEMPLO 8-8

Un artículo publicado en la revista *Materials Engineering* (1989, Vol. II, No. 4, págs. 275-281) describe los resultados de pruebas de resistencia a la adhesión de 22 especímenes de aleación U-700. La carga para la que cada espécimen falla es la siguiente (en MPa):

19.8	18.5	17.6	16.7	15.8
15.4	14.1	13.6	11.9	11.4
11.4	8.8	7.5	15.4	15.4
19.5	14.9	12.7	11.9	11.4
10.1	7.9			

La media muestral es $\bar{x} = 13.71$, mientras que la desviación estándar muestral es $s = 3.55$. ¿Sugieren los datos que la carga promedio de falla es mayor que 10 MPa? Supóngase que la carga donde se presenta la falla tiene una distribución normal, y utilícese $\alpha = 0.05$.

La solución, con el empleo del procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis, es la siguiente:

1. El parámetro de interés es la carga promedio de falla, μ.
2. H_0: $\mu = 10$
3. H_1: $\mu > 10$. Se desea rechazar H_0 si la carga promedio de falla es mayor que 10 MPa.
4. $\alpha = 0.05$.
5. El estadístico de prueba es

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

6. Rechazar H_0 si $t_0 > t_{0.05,21} = 1.721$.
7. Cálculos: Puesto que $\bar{x} = 13.71$, $s = 3.55$, $\mu_0 = 10$ y $n = 22$, se tiene que

$$t_0 = \frac{13.71 - 10}{3.55/\sqrt{22}} = 4.90$$

8. Conclusiones: Dado que $t_0 = 4.90 > 1.721$, se rechaza H_0 y se concluye que, con un nivel de significancia de 0.05, la carga de falla promedio es mayor que 10 MPa.

Tal como ya se indicó, la prueba t supone que las observaciones se obtienen de manera aleatoria de una población normal. Cuando se aplica cualquier procedimiento estadístico, siempre es buena idea investigar la **validez de las suposiciones**. En la figura 8-8 se presenta un diagrama de caja (generado por el paquete Statgraphics) de las 22 observaciones de la carga de falla del ejemplo 8-8. La impresión que se tiene al observar este diagrama es que la muestra proviene de una población simétrica, y que no existe una razón inmediata para cuestionar la hipótesis de normalidad. Recuérdese que la prueba t es bastante insensible a esta suposición. Más adelante, en este capítulo, se muestra otra técnica gráfica: la **gráfica de probabilidad normal**, que puede emplearse para verificar suposiciones sobre las distribuciones.

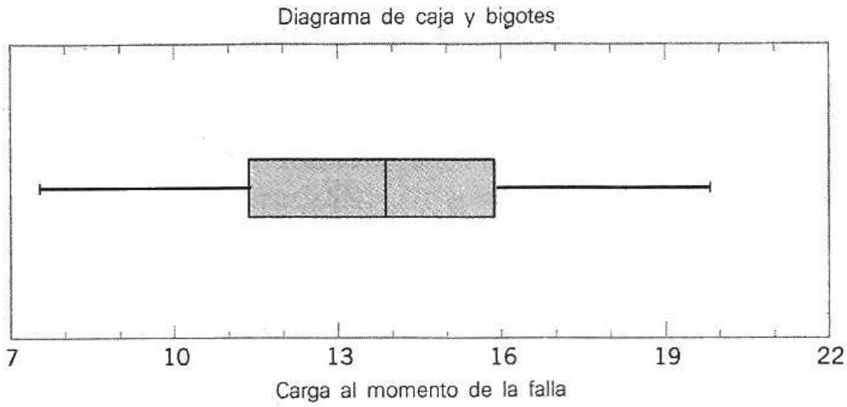


Figura 8-8 Diagrama de caja y bigotes (generado por el paquete Statgraphics) para los datos de la carga de falla del ejemplo 8-8.

8-4.2 Valor *P* de una prueba *t*

El valor P de una prueba t es sólo el valor más pequeño del nivel de significancia para el que debe rechazarse la hipótesis nula. Esto es, es el área de la cola que está más allá del valor t_0 del estadístico de prueba para una prueba unilateral, o dos veces esta área para pruebas bilaterales. Dado que la tabla t que aparece en la tabla IV del apéndice contiene sólo diez valores críticos para cada distribución t, resulta en general imposible calcular de manera exacta el valor P a partir de la tabla. Sin embargo, es fácil encontrar las cotas inferior y superior para el valor P a partir de la tabla.

Para ilustrar esto, considérese la prueba t basada en 21 grados de libertad del ejemplo 8-8. Los valores críticos importantes de la tabla IV del apéndice son los siguientes:

Valor crítico:	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
Área de la cola:	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005

Nótese que, como $t_0 = 4.90$ en el ejemplo 8-8, se tiene $P(T_{21} > 4.90) < 0.0005$, dado que $t_0 = 4.90$ es mayor que 3.819. Por tanto, el valor P debe ser menor que 0.0005 para esta prueba, con lo que puede decirse que una cota superior para el valor P es 0.0005.

Supóngase ahora que el valor calculado de la estadística de prueba hubiese sido 2.75. Este valor se encuentra entre los dos valores críticos 2.518 (el cual corresponde a $\alpha = 0.01$) y 2.831 (que corresponde a 0.005). Por tanto, se sabe que el valor P es menor que 0.01 pero mayor que 0.005. Esto da las cotas inferior y superior del valor P, esto es, $0.005 < P < 0.01$.

El ejemplo 8-8 es una prueba de cola superior. Si la prueba fuese de cola inferior, entonces sólo se cambia el signo de t_0 y se procede de la misma manera que para la prueba de cola superior. Por ejemplo, si $t_0 = -2.75$ para una prueba de cola inferior con 21 grados de libertad, entonces las cotas inferior y superior son $0.005 < P < 0.01$, igual que en el caso anterior. Recuérdese que, para una prueba de dos colas, el nivel de significancia asociado con un valor crítico en particular es dos veces el que corresponde al área de la cola que aparece en el encabezado de la columna. Esta consideración debe tomarse en cuenta cuando se calcula la cota sobre el valor P. Por ejemplo, supóngase que $t_0 = 2.75$ para una alternativa de dos colas basada en 21 grados de libertad. Para $\alpha = 0.02$, $t_0 > 2.518$ y para $\alpha =$

Tabla 8-2 Análisis de una muestra producido por el paquete Statgraphics para el ejemplo 8-8

Resultados del análisis de una muestra				
		ejemplo 8-8		
Estadísticos muestrales:	Número de obs.	22		
	Promedio	13.7136		
	Varianza	12.6279		
	Desviación est.	3.55358		
	Mediana	13.85		
Intervalo de confianza para la media:		95 por ciento		
	Muestra 1	12.1377	15.2896	21 G.L.
Intervalo de confianza para la varianza		95 por ciento		
	Muestra 1	7.47447	25.7891	21 G.L.
Prueba de hipótesis para	H0: Media = 10	Estadístico calculado = 4.90168		
	vs Alt: GT	Nivel de sign. = 3.78127E-5		
	con Alfa = 0.05	rechazar H0.		

0.01, $t_0 < 2.831$, de modo que las cotas inferior y superior del valor P son $0.01 < P < 0.02$ en este caso.

Finalmente, muchos programas de computadora notifican valores P junto con el valor calculado de la estadística de prueba. Algunas calculadoras de mano también tienen esta característica. Una de ellas es la HP-48. Con esta calculadora, el valor de P que corresponde al valor $t_0 = 4.90$ del ejemplo 8-8 es 0.000038.

8-4.3 Solución por computadora

Existen muchos paquetes de software estadístico, y la mayor parte de ellos tienen algunas facilidades para la prueba de hipótesis estadísticas. La tabla 8-2 contiene la salida generada por el paquete Statgraphics para los datos del ejemplo 8-8. Nótese que la salida incluye un resumen de algunos estadísticos de la muestra, así como los intervalos de confianza del 95% para la media y la varianza. (El analista puede escoger el nivel de confianza.) El programa también prueba las hipótesis de interés, permitiendo que el analista especifique μ_0 (en este caso, 10), la naturaleza de la hipótesis alternativa ("GT" implica que H_1: $\mu > 10$), y la selección de α (aquí, $\alpha = 0.05$).

La salida incluye el valor calculado de t_0, el valor P (denominado nivel de significancia), y la decisión que debe tomarse para el valor dado de α. Nótese que H_0: $\mu = 10$ debe rechazarse en favor de H_1: $\mu > 10$, conclusión que es la misma a la que se llegó en el ejemplo 8-8.

8-4.4 Selección del tamaño de la muestra

La probabilidad del error tipo II para pruebas sobre la media de una distribución normal con varianza desconocida, depende de la distribución del estadístico de prueba de la ecuación 8-41 cuando la hipótesis nula H_0: $\mu = \mu_0$ es falsa. Cuando el valor verdadero de la media es $\mu = \mu_0 + \delta$, nótese que la estadística de prueba puede escribirse como

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{[\overline{X} - (\mu_0 + \delta)]\sqrt{n}}{\sigma} + \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}}{S/\sigma} = \frac{Z + \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}}{W} \tag{8-47}$$

Las distribuciones de Z y W en la ecuación 8-47 son la distribución normal estándar y $\sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}$, respectivamente; Z y W son variables aleatorias independientes. Sin embargo, $\delta\sqrt{n}/\sigma$ es una constante diferente de cero, de modo que el numerador de la ecuación 8-47 es una variable aleatoria normal con media $\delta\sqrt{n}/s$ y desviación estándar uno. La distribución resultante para T_0 se conoce como **distribución *t* no central** con $n - 1$ grados de libertad y parámetro de no centralidad $\delta\sqrt{n}/\sigma$. Nótese que si $\delta = 0$, entonces la distribución t no central se reduce a la usual **distribución *t* central**. Por consiguiente, el error tipo II de la alternativa bilateral (por ejemplo) es

$$\begin{aligned}\beta &= P\{-t_{\alpha/2,n-1} \leq T_0 \leq t_{\alpha/2,n-1} \mid \delta \neq 0\}\\ &= P\{-t_{\alpha/2,n-1} \leq T_0' \leq t_{\alpha/2,n-1}\}\end{aligned}$$

donde T_0' denota la variable aleatoria t no central. Determinar la probabilidad β del error tipo II para la prueba t implica encontrar la probabilidad contenida entre dos puntos de la distribución t no central. Dado que la variable aleatoria t no central tiene una función de densidad compleja, la integración debe hacerse de manera numérica.

Afortunadamente, esta tarea poco placentera ya está hecha, y los resultados están resumidos en las curvas características de operación de los diagramas VI*e*, VI*f*, VI*g* y VI*h*, que son gráficas de β para la prueba t contra un parámetro d para varios tamaños de la muestra n. Se proporcionan curvas tanto para alternativas unilaterales y bilaterales, como para $\alpha = 0.05$ o $\alpha = 0.01$. Para la alternativa bilateral de la ecuación 8-40, el factor de escala d de la abcisa de los diagramas VI*e* y VI*f* está definido como

$$d = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma} \tag{8-48}$$

Para la alternativa unilateral $\mu > \mu_0$ como la de la ecuación 8-43, se utilizan los diagramas VI*g* y VI*h* con

$$d = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} = \frac{\delta}{\sigma} \tag{8-49}$$

mientras que si $\mu < \mu_0$, como en la ecuación 8-45

$$d = \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} = \frac{\delta}{\sigma} \tag{8-50}$$

Nótese que d depende del parámetro desconocido σ^2. Esta dificultad puede evitarse de varias maneras. En algunos casos pueden emplearse resultados de un experimento anterior o información previa para hacer una estimación inicial de σ^2. Si se está interesado en evaluar el desempeño de la prueba después de haber recopilado los datos, entonces puede emplearse la varianza muestral s^2 para estimar σ^2. Si no hay ninguna experiencia previa con la cual sea posible estimar σ^2, entonces se define la diferencia en la media d que se desea detectar con respecto a σ. Por ejemplo, si se desea detectar una diferencia pequeña en la media, puede emplearse un valor de $d = |\delta|/\sigma \leq 1$ (por ejemplo), mientras que si se tiene interés en detectar sólo diferencias moderadamente grandes en la media, entonces puede seleccionarse $d = |\delta|/\sigma = 2$ (por ejemplo). Esto es, lo importante al determinar el tamaño de la muestra es el valor del cociente $|\delta|/\sigma$, y si es posible especificar el tamaño relativo de la diferencia entre medias que se tiene interés en detectar, entonces lo usual es que pueda seleccionarse un valor apropiado de d.

EJEMPLO 8-9

Considérese el problema de resistencia a la adhesión del ejemplo 8-8. Si la carga promedio de falla difiere de 10 MPa cómo máximo por 1 MPa, ¿resulta adecuado utilizar un tamaño de muestra $n = 22$ para asegurar que H_0: $\mu = 10$ será rechazada con una probabilidad de al menos 0.8?

Para resolver este problema se hace uso de la desviación estándar muestral $s = 3.55$ para estimar σ. Entonces, $d = |\delta|/\sigma = 1.0/3.55 = 0.28$. Al consultar las curvas características de operación del diagrama VI*g* del apéndice (para $\alpha = 0.05$) con $d = 1/3.55 = 0.28$ y $n = 22$, se tiene que $\beta = 0.68$, aproximadamente. Por tanto, la probabilidad de rechazar H_0: $\mu = 10$ si la media verdadera excede el valor propuesto por 1 MPa es aproximadamente $1 - \beta = 1 - 0.68 = 0.32$, con lo que se concluye que un tamaño de muestra $n = 22$ no es adecuado para proporcionar la sensibilidad deseada. Para determinar el tamaño de la muestra necesario para tener el grado de sensibilidad deseada, se consultan las curvas características de operación del diagrama VI*g* con $d = 0.28$ y $\beta = 0.2$, de donde se tiene que el tamaño de la muestra correspondiente es $n = 75$.

8-5 PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE LAS MEDIAS DE DOS DISTRIBUCIONES NORMALES, VARIANZAS DESCONOCIDAS

Ahora se considerarán pruebas de hipótesis sobre la igualdad de las medias μ_1 y μ_2 de dos distribuciones normales donde las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas. Para probar esta hipótesis se usará una estadística t. Tal como se indicó en la sección 8-4.1, se requiere la hipótesis de normalidad para desarrollar el procedimiento de prueba, pero los alejamientos moderados de la normalidad no tendrán efectos adversos sobre el procedimiento. Es necesario considerar dos situaciones diferentes. En el primer caso, se supondrá que las varianzas de las dos distribuciones normales son desconocidas pero iguales; esto es, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. En el segundo, se supondrá que σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas y no necesariamente iguales.

8-5.1 Caso 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Supóngase que se tienen dos poblaciones normales independientes con medias desconocidas μ_1 y μ_2, y varianzas desconocidas pero iguales, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Se desea probar

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \tag{8-51}$$

Sean $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ una muestra aleatoria de n_1 observaciones tomadas de la primera población, y $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ una muestra aleatoria de n_2 observaciones tomadas de la segunda población.[1] Sean $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, S_1^2, S_2^2 las medias muestrales y las varianzas muestrales, respectivamente. Puesto que tanto S_1^2 como S_2^2 son estimaciones de la varianza común σ^2, pueden combinarse para formar un solo estimador, por ejemplo,

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \tag{8-52}$$

En la sección 7-5 se presentó este estimador combinado. Para probar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ de la ecuación 8-51, se calcula el estadístico de prueba

$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \tag{8-53}$$

Si H_0: $\mu_1 = \mu_2$ es verdadera, T_0 tiene una distribución $t_{n_1+n_2-2}$. Si t_0 es el valor calculado del estadístico de prueba, entonces si

$$t_0 > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \tag{8-54a}$$

o si

$$t_0 < -t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \tag{8-54b}$$

debe rechazarse H_0: $\mu_1 = \mu_2$.

Las alternativas unilaterales se tratan de manera similar. Para probar

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \tag{8-55}$$

se calcula el estadístico de prueba t_0 de la ecuación 8-53, y se rechaza H_0. $\mu_1 = \mu_2$ si

$$t_0 > t_{\alpha, n_1+n_2-2} \tag{8-56}$$

[1] Si bien se proporciona el desarrollo de este procedimiento para el caso donde los tamaños de las muestras pueden ser diferentes, existe una ventaja en el uso de muestras del mismo tamaño $n_1 = n_2 = n$. Cuando el tamaño de las muestras de ambas poblaciones es el mismo, la prueba t es muy robusta con respecto a la hipótesis de varianzas iguales.

Tabla 8-3 Datos de rendimiento de un catalizador, ejemplo 8-10.

Número de observación	Catalizador 1	Catalizador 2
1	91.50	89.19
2	94.18	90.95
3	92.18	90.46
4	95.39	93.21
5	91.79	97.19
6	89.07	97.04
7	94.72	91.07
8	89.21	92.75
	$\bar{x}_1 = 92.255$	$\bar{x}_2 = 92.733$
	$s_1 = 2.39$	$s_2 = 2.98$

Para la otra hipótesis alternativa unilateral,

$$\begin{aligned} H_0&: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1&: \mu_1 < \mu_2 \end{aligned} \tag{8-57}$$

se calcula el estadístico de prueba t_0 y se rechaza H_0: $\mu_1 = \mu_2$ si

$$t_0 < -t_{\alpha, n_1+n_2-2} \tag{8-58}$$

La prueba t para dos muestras dado en esta sección a menudo recibe el nombre de **prueba *t* combinada**, ya que las varianzas muestrales se combinan para estimar la varianza común. También se conoce como **prueba *t* independiente**, debido a que se supone que las dos poblaciones normales son independientes.

EJEMPLO 8-10

Se analizan dos catalizadores para determinar la forma en que afectan el rendimiento promedio de un proceso químico. De manera específica, el catalizador 1 es el que se está empleando en este momento, pero el catalizador también es aceptable. Debido a que el catalizador 2 es más económico, éste puede adoptarse siempre y cuando no cambie el rendimiento del proceso. Se hace una prueba en una planta piloto; los resultados obtenidos aparecen en la tabla 8-3. ¿Existe alguna diferencia entre los rendimientos promedio? Utilícese $\alpha = 0.05$.

La solución, con el empleo del procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis, es la siguiente:

1. Los parámetros de interés son μ_1 y μ_2, los cuales representan el rendimiento promedio del proceso con los catalizadores 1 y 2, respectivamente.
2. H_0: $\mu_1 = \mu_2$
3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
4. $\alpha = 0.05$

5. El estadístico de prueba es

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

6. Rechazar H_0 si $t_0 > t_{0.025,14} = 2.145$ o si $t_0 < -t_{0.025,14} = -2.145$.
7. Cálculos: De la tabla 8-3, se tiene que $\bar{x}_1 = 92.255$, $s_1 = 2.39$, $n_1 = 8$, $\bar{x}_2 = 92.733$, $s_2 = 2.98$ y $n_2 = 8$. Por consiguiente,

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(7)(2.39)^2 + 7(2.98)^2}{8 + 8 - 2} = 7.30$$

$$s_p = \sqrt{7.30} = 2.70$$

y

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2.70\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{92.255 - 92.733}{2.70\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}}} = -0.35$$

8. Conclusiones: Dado que $-2.145 < t_0 = -0.35 < 2.145$, no es posible rechazar la hipótesis nula. Esto es, con un nivel de significancia de 0.05, no se tiene evidencia fuerte que permita concluir que el catalizador 2 dará como resultado un rendimiento promedio diferente del obtenido con el uso del catalizador 1.

En este ejemplo también puede utilizarse un valor P para tomar la decisión. De la tabla IV del apéndice, se tiene que $t_{0.40,14} = 0.258$ y $t_{0.25,14} = 0.692$. Por tanto, puesto que $0.258 < 0.35 < 0.692$, se concluye que las cotas inferior y superior del valor P son $0.50 < P < 0.80$. De hecho, el valor real de P es 0.7315. (Este valor se obtuvo con una calculadora HP-48.) En consecuencia, como el valor P es mayor que $\alpha = 0.05$, no es posible rechazar la hipótesis nula.

8-5.2 Caso 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

En algunas situaciones no es razonable suponer que las varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2 son iguales. En este caso no existe una estadística t exacta para probar H_0: $\mu_1 = \mu_2$. Sin embargo, el estadístico

$$T_0^* = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \tag{8-59}$$

tiene una distribución que es aproximadamente una distribución t con grados de libertad dados por

$$v = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 + 1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 + 1}} - 2 \tag{8-60}$$

si la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2$ es verdadera. Por tanto, si $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, las hipótesis de las ecuaciones 8-51, 8-55 y 8-57 se prueban como en la sección 8-5.1, con la excepción de que ahora se emplea T_0^* como estadístico de prueba, con el remplazo de $n_1 + n_2 - 2$ por v para determinar el número de grados de libertad de la prueba.

EJEMPLO 8-11

Un fabricante de monitores prueba dos diseños de microcircuitos para determinar si producen un flujo de corriente equivalente. El departamento de ingeniería ha obtenido los datos siguientes:

Diseño 1:	$n_1 = 15$	$\overline{x}_1 = 24.2$	$s_1^2 = 10$
Diseño 2:	$n_2 = 10$	$\overline{x}_2 = 23.9$	$s_2^2 = 20$

Con $\alpha = 0.10$, se desea determinar si existe alguna diferencia significativa en el flujo de corriente promedio entre los dos diseños, donde se supone que las dos poblaciones son normales, pero no es posible suponer que las varianzas desconocidas σ_1^2 y σ_2^2 sean iguales.

Al aplicar el procedimiento de ocho pasos, se tiene lo siguiente:

1. Los parámetros de interés son los flujos de corriente promedio de los circuitos diseños μ_1 y μ_2.
2. H_0: $= \mu_2$
3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
4. $\alpha = 0.10$
5. El estadístico de prueba es

$$t_0^* = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

6. Los grados de libertad de t_0^* se obtienen con la ecuación 8-60

$$v = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 + 1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 + 1}} - 2 = \frac{\left(\dfrac{10}{15} + \dfrac{20}{10}\right)^2}{\dfrac{(10/15)^2}{16} + \dfrac{(20/10)^2}{11}} - 2 = 16.17 \simeq 16$$

Por tanto, puesto que $\alpha = 0.10$, se rechaza H_0: $\mu_1 = \mu_2$ si $t_0^* > t_{0.05,16} = 1.746$ o si $t_0^* < -t_{0.05,16} = -1.746$.

7. Cálculos: Al utilizar los datos contenidos en la muestra, se tiene que

$$t_0^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{24.2 - 23.9}{\sqrt{\dfrac{10}{15} + \dfrac{20}{10}}} = 0.18$$

8. Conclusiones: Puesto que $-1.746 < 0.18 < 1.746$, no es posible rechazar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ con el nivel de significancia $\alpha = 0.10$. Esto es, no hay evidencia fuerte que indique que el flujo de corriente promedio de los dos diseños sea diferente. El valor P para $t_0^* = 0.18$ es, aproximadamente, 0.859.

8-5.3 Solución por computadora

La prueba t de dos muestras puede realizarse con el empleo de muchos paquetes de software estadístico. La tabla 8-4 presenta los resultados de la rutina de análisis de dos muestras del paquete Statgraphics, para los datos de rendimiento del catalizador del ejemplo 8-10. La salida incluye un resumen de los estadísticos de cada muestra, los resultados muestrales

Tabla 8-4 Resultados del análisis de dos muestras efectuado por el paquete Statgraphics para el ejemplo 8-10

Resultados del análisis de dos muestras

		cata1	cata2	combinado
Estadísticos muestrales:	Número de obs.	8	8	16
	Promedio	92.255	92.7325	92.4938
	Varianza	5.68831	8.90099	7.29465
	Desviación est.	2.38502	2.98345	2.70086
	Mediana	91.985	91.91	91.985
Diferencia entre medias = - 0.4775		95 por ciento		
Intervalo de conf. para dif. entre medias:		-3.37462	2.41962	14 G.L.
(Varianzas iguales) Muestra 1 - Muestra 2		-3.38786	2.43386	13.4 G.L.
(Varianzas desiguales) Muestra 1 - Muestra 2				
Cociente de las varianzas = 0.639065				
Intervalo de conf. para el cociente de varianzas:		95 por ciento		
	Muestra 1 ÷ Muestra 2	0.127229	3.20998	7 7 G.L.
Prueba de hipótesis para H0: Dif = 0		Estadístico calculado= -0.353591		
	vs Alt : NE	Nivel de sig. = 0.728914		
	con Alfa = 0.05	no rechazar H0.		

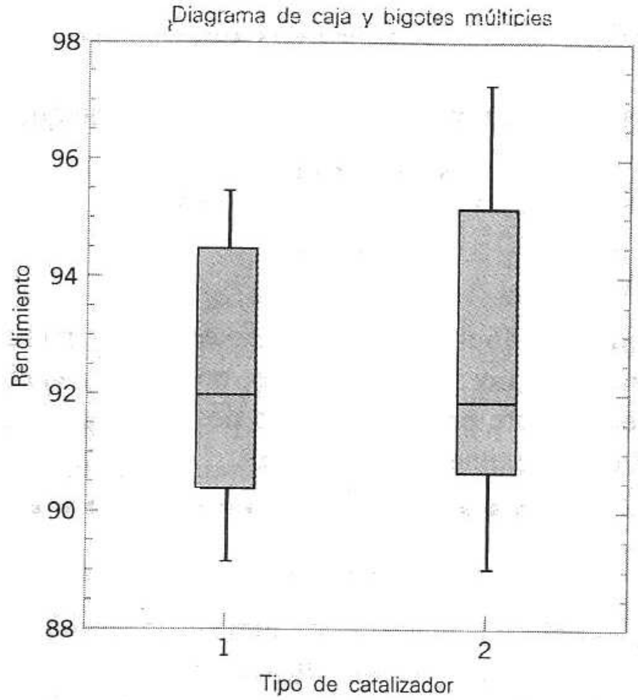


Figura 8-9 Diagrama de caja comparativo para los datos del ejemplo 8-10.

combinados, los intervalos de confianza para la diferencia entre medias (para las hipótesis de varianzas iguales y de varianzas desiguales), un intervalo de confianza para el cociente de las dos varianzas y los resultados de la prueba de hipótesis. El usuario puede especificar los niveles de confianza y el valor α. Nótese que, dado que el intervalo de confianza del cociente de dos varianzas incluye el valor uno, la hipótesis de varianzas iguales hecha para la prueba t del ejemplo 8-10 está justificada. El procedimiento de prueba de hipótesis indica que no es posible rechazar la hipótesis de que los rendimientos promedio son iguales, lo que concuerda con la conclusión a la que se llegó originalmente en el ejemplo 8-10. Además, como la computadora utiliza más decimales significativos que los empleados en el ejemplo 8-10, los resultados ofrecidos por ésta difieren un poco de los cálculos originales.

La figura 8-9 presenta dos diagramas de caja comparativos (generadas por el paquete Statgraphics) de los datos de rendimiento para los dos tipos de catalizadores del ejemplo 8-10. Estas gráficas comparativas indican que no hay una diferencia obvia en las medias de las dos muestras, aunque la segunda muestra tiene una desviación estándar un poco mayor. No hay reglas exactas para comparar dos muestras con diagramas de caja; el principal valor de éstas se encuentra en la impresión visual que proporcionan como instrumento para explicar los resultados de una prueba de hipótesis, así como en la verificación de las suposiciones. Por ejemplo, de la figura 8-9 puede concluirse que las dos poblaciones tienen desviaciones estándar aproximadamente iguales, y que no se viola de manera seria la hipótesis de normalidad.

8-5.4 Selección del tamaño de la muestra

Las curvas características de operación de los diagramas VIe, VIf, VIg y VIh se utilizan para evaluar el error tipo II para el caso donde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Desafortunadamente, cuando

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, la distribución de T_0^* es desconocida si la hipótesis nula es falsa, y para este caso no hay disponible ninguna curva característica de operación.

Para la alternativa bilateral de la ecuación 8-51, cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ y $n_1 = n_2 = n$, los diagramas VI*e* y VI*f* se utilizan con

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{2\sigma} = \frac{|\delta|}{2\sigma} \tag{8-61}$$

Para utilizar estas curvas debe tomarse un tamaño de muestra $n^* = 2n - 1$. Para la hipótesis alternativa unilateral de la ecuación 8-55, se utilizan los diagramas VI*g* y VI*h*, y se define

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\sigma} = \frac{\delta}{2\sigma} \tag{8-62}$$

mientras que para la otra hipótesis alternativa unilateral de la ecuación 8-57, se utiliza

$$d = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\sigma} = \frac{\delta}{2\sigma} \tag{8-63}$$

Debe notarse que el parámetro d es una función de σ, que es desconocida. Al igual que en el caso de la prueba t de una sola muestra (sección 8-4), es necesario utilizar una estimación previa de σ o una estimación subjetiva. Como alternativa, pueden definirse con respecto a σ las diferencias en la media que se desean detectar.

EJEMPLO 8-12

Considérese el experimento del catalizador del ejemplo 8-10. Supóngase que, si el catalizador 2 produce un rendimiento promedio que difiere en un 4.0% del rendimiento promedio del catalizador 1, entonces es deseable rechazar la hipótesis nula con una probabilidad al menos de 0.85. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para este fin?

Al utilizar $s_p = 2.70$ como estimación de la desviación estándar común σ, se tiene que $d = |\delta|/2\sigma = |4.0|/[(2)(2.70)] = 0.74$. Del diagrama VI*e* del apéndice, con $d = 0.74$ y $\beta = 0.15$, se tiene que $n^* = 20$, aproximadamente. Por consiguiente, ya que $n^* = 2n - 1$,

$$n = \frac{n^* + 1}{2} = \frac{20 + 1}{2} = 10.5 \simeq 11 \text{(por ejemplo)}$$

con lo que deben emplearse muestras de tamaño $n_1 = n_2 = n = 11$.

8-6 PRUEBA t PAREADA

Se presenta un caso especial de las pruebas t de dos muestras de la sección 8-5, cuando las observaciones sobre las dos poblaciones de interés se recopilan por **pares**. Cada par de observaciones, por ejemplo (X_{1j}, X_{2j}), se toman bajo condiciones homogéneas, pero éstas pueden cambiar de un par a otro. Por ejemplo, supóngase que se tiene interés en comparar dos tipos diferentes de puntas para una máquina probadora de dureza. Esta máquina presiona la punta sobre un espécimen de metal con una fuerza conocida. La dureza del material se obtiene al medir la profundidad de la deformación causada por la punta. Si se escogen varios especímenes al azar, la mitad con la punta 1, y la otra con la punta 2, y se aplica la prueba t combinada o independiente de la sección 8-5, los resultados pueden ser erróneos. Los especímenes de metal bien podrían haber sido cortados de barras producidas con diferente calor o con una homogeneidad diferente que tal vez afecte la dureza. Entonces la diferencia observada entre las lecturas de dureza promedio de los dos tipos de puntas también incluye diferencias de dureza entre los especímenes.

Un procedimiento experimental más poderoso es recopilar los datos por pares —esto es, hacer dos lecturas de dureza sobre cada espécimen, una con cada punta—. Entonces el procedimiento de prueba consistiría en analizar las *diferencias* entre las lecturas de dureza de cada espécimen. Si no hay ninguna diferencia entre las puntas, entonces la media de las diferencias debe ser cero. Este procedimiento de prueba se conoce como **prueba *t* pareada.**

Sean $(X_{11}, X_{21}), (X_{12}, X_{22}), \ldots, (X_{1n}, X_{2n})$ un conjunto de n observaciones pareadas donde se supone que la media y la varianza de la población representada por X_1 son μ_1 y σ_1^2, y la media y la varianza de la población representada por X_2 son μ_2 y σ_2^2. Las diferencias entre cada par de observaciones se definen como $D_j = X_{1j} - X_{2j}, j = 1, 2, \ldots, n$. Se supone que las D_j están distribuidas de manera normal con media

$$\mu_D = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \mu_1 - \mu_2$$

y varianza σ_D^2, de modo que la prueba de hipótesis sobre la igualdad de μ_1 y μ_2 puede efectuarse al realizar una prueba t de una muestra sobre μ_D. De manera específica, la prueba de H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ es equivalente a probar

$$H_0: \mu_D = 0$$
$$H_1: \mu_D \neq 0 \qquad (8\text{-}64)$$

El estadístico de prueba apropiada para la ecuación 8-64 es

$$T_0 = \frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}} \qquad (8\text{-}65)$$

donde

$$\overline{D} = \frac{\sum_{j=1}^{n} D_j}{n} \qquad (8\text{-}66)$$

y

$$S_D^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} D_j^2 - \left[\left(\sum_{j=1}^{n} D_j\right)^2 / n\right]}{n-1} \qquad (8\text{-}67)$$

son la media y la varianza muestrales de las diferencias. Debe rechazarse H_0: $\mu_D = 0$ (lo que implica que $\mu_1 = \mu_2$) si el valor calculado del estadístico de prueba $t_0 > t_{\alpha/2, n-1}$ o si $t_0 < -t_{\alpha/2, n-1}$. Las alternativas unilaterales se tratan igual que en el caso usual de la prueba t de una muestra.

Tabla 8-5 Predicciones de resistencia para nueve vigas de placa de acero (carga predecida/carga observada)

Viga	Método de Karlsruhe	Método de Lehigh	Diferencia d_j
S1/1	1.186	1.061	0.119
S2/1	1.151	0.992	0.159
S3/1	1.322	1.063	0.259
S4/1	1.339	1.062	0.277
S5/1	1.200	1.065	0.138
S2/1	1.402	1.178	0.224
S2/2	1.365	1.037	0.328
S2/3	1.537	1.086	0.451
S2/4	1.559	1.052	0.507

EJEMPLO 8-13

Un artículo publicado en el *Journal of Strain Analysis* (1983, Vol. 18, No. 2) compara varios métodos para predecir la resistencia al corte de vigas de placa de acero. La tabla 8-5 presenta los datos para dos de estos métodos: los procedimientos de Karlsruhe y de Lehigh, cuando se aplican a nueve vigas específicas. Se desea determinar si existe alguna diferencia (en el promedio) entre estos dos métodos.

El procedimiento de ocho pasos se aplica de la siguiente manera:

1. El parámetro de interés es la diferencia en la resistencia promedio al corte entre los dos métodos, $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$.
2. H_0: $\mu_D = 0$
3. H_1: $\mu_D \neq 0$
4. $\alpha = 0.05$
5. El estadístico de prueba es

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

6. Rechazar H_0 si $t_0 > t_{0.025,8} = 2.306$ o si $t_0 < -t_{0.025,8} = -2.306$.
7. Cálculos: El promedio y la desviación estándar muestrales de las diferencias d_j son $\overline{d} = 0.2736$ y $s_d = 0.1356$, de modo que el estadístico de prueba es

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{0.2736}{0.1356/\sqrt{9}} = 6.05$$

8. Conclusiones: Puesto que $t_0 = 6.05 > 2.306$, se concluye que los métodos de predicción proporcionan resultados diferentes. De manera específica, los datos indican que el método de Karlsruhe produce, en promedio, predicciones de resistencia

al corte mayores que el método de Lehigh. El valor P para $t_0 = 6.05$ es $P = 0.0002$, de modo que el estadístico de prueba está bien ubicado dentro de la región crítica.

Comparaciones pareadas contra comparaciones no pareadas

Al efectuar un experimento comparativo, en ocasiones el investigador puede elegir entre un experimento pareado y el experimento de dos muestras (o no pareado). Si se toman n mediciones de cada población, la estadística t de dos muestras es

$$T_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}$$

la cual puede compararse con t_{2n-2} y, claro está, la estadística t pareada es

$$T_0 = \frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}}$$

la cual se compara con t_{n-1}. Nótese que dado que

$$\overline{D} = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_{1j} - X_{2j})}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{1j}}{n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{X_{2j}}{n} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

los numeradores de ambas estadísticas son idénticos. Sin embargo, el denominador de la prueba t de dos muestras está basado en la suposición de que X_1 y X_2 son *independientes*. En muchos experimentos pareados existe una correlación positiva muy fuerte entre X_1 y X_2. Esto es,

$$\begin{aligned} V(\overline{D}) &= V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \\ &= V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) - 2\,\mathrm{cov}(\overline{X}_1, \overline{X}_2) \\ &= \frac{2\sigma^2(1 - \rho)}{n} \end{aligned}$$

suponiendo que las dos poblaciones X_1 y X_2 tienen idénticas varianzas σ^2. Por otra parte, S_D^2/n estima la varianza de $\overline{D}$. Cada vez que existe una correlación positiva dentro de los pares, el denominador de la prueba t pareada será más pequeño que el denominador de la prueba t de dos muestras. Esto puede ser la causa de que la prueba t de dos muestras subestime considerablemente la significancia de los datos si se aplica de manera incorrecta a muestra pareadas.

Aunque el apareamiento a menudo conduce a un valor más pequeño de la varianza de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, tiene una desventaja: la prueba t pareada conduce a una pérdida de $n - 1$ grados de libertad en comparación con la prueba t de dos muestras. En general, se sabe que el aumento en los grados de libertad de una prueba incrementa la potencia contra cualesquiera valores alternativos fijos del parámetro.

Así que, ¿cómo decidir la clase de experimento a realizar? ¿Se deben o no parear las observaciones? Aunque no existe una respuesta general a estas preguntas, pueden darse algunos lineamientos con base en el análisis anterior.

1. Si las unidades experimentales son relativamente homogéneas (σ pequeña) y la correlación en los pares es pequeña, la ganancia en precisión atribuible al

apareamiento será desplazada por la pérdida de grados de libertad, por lo que deberá utilizarse un experimento de muestra independiente.

2. Si las unidades experimentales son relativamente heterogéneas (σ grande) y existe una correlación positiva grande en los pares, entonces debe utilizarse un experimento pareado.

La implantación de estas reglas requieren cierto criterio, ya que σ y ρ nunca se conocen con precisión. Por otro lado, si el número de grados de libertad es grande (por ejemplo, 40 o 50), entonces la pérdida de $n-1$ de ellos por el apareamiento puede no ser importante. Sin embargo, si el número de grados de libertad es pequeño (por ejemplo, 10 o 20), entonces la pérdida de la mitad de ellos es algo serio en potencia si no se compensa con un aumento en la precisión al momento de hacer el apareamiento.

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 8-4, 8-5 Y 8-6

8-33. Un ingeniero que trabaja para un fabricante de llantas investiga la duración promedio de un compuesto nuevo de caucho. Para ello, construye 16 llantas y las prueba en una carretera hasta alcanzar el fin de la vida útil de éstas. Los datos, en km, obtenidos son los siguientes:

60 613	59 836	59 554	60 252
59 784	60 221	60 311	50 040
60 545	60 257	60 000	59 997
69 947	60 135	60 220	60 523

a. Al ingeniero le gustaría demostrar que la vida útil promedio de la nueva llanta excede los 60 mil km. Proponga y pruebe hipótesis apropiadas. Obtenga una conclusión con $\alpha = 0.05$.

b. Suponga que si la vida media es de 61 mil km, al ingeniero le gustaría detectar esta diferencia con una probabilidad de al menos 0.90. ¿Es adecuado el tamaño de la muestra, $n = 16$, utilizado en el inciso a)? Utilice la desviación estándar muestral s como una estimación de σ para llegar a una decisión.

8-34. Se efectúa una prueba de impacto Izod sobre 20 muestras de tubería PVC. El estándar ASTM para este material requiere que la resistencia al impacto Izod sea mayor que 1.0 ft-lb/in. El promedio y la desviación estándar muestrales son $\bar{x} = 1.25$ y $s = 0.25$, respectivamente. Pruebe H_0: $\mu = 1.0$ contra H_1: $\mu > 1.0$ utilizando $\alpha = 0.01$. Obtenga conclusiones.

8-35. La brillantez de un cinescopio de televisión puede evaluarse midiendo la corriente necesaria para alcanzar un nivel de brillantez particular. Un ingeniero ha diseñado un cinescopio para el que cree que requiere 300 microamperes de corriente para producir el nivel deseado de brillantez. Se toma una muestra de 10 cinescopios y se obtienen los resultados siguientes: $\bar{x} = 317.2$ y $s = 15.7$. Proponga y pruebe una hipótesis apropiada utilizando $\alpha = 0.05$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-36. Se analiza una marca particular de margarina dietética para determinar el nivel de ácido graso poliinsaturado (en porcentaje). Se toma una muestra de seis paquetes y se obtienen los siguientes datos: 16.8, 17.2, 17.4, 16.9, 16.5, 17.1.

a. Pruebe la hipótesis H_0: $\mu = 170$ contra H_1: $\mu \neq 17.0$. Utilice $\alpha = 0.01$. ¿Cuáles son sus conclusiones?

b. Encuentre el valor P de la prueba del inciso a).

c. Suponga que si el contenido promedio de ácido graso poliinsaturado es realmente $\mu = 17.5$, entonces es importante detectar este hecho con una probabilidad de al menos 0.90. ¿Resulta adecuado el tamaño de la muestra $n = 6$? Utilice la desviación estándar muestral para estimar la desviación estándar de la población σ. Haga uso de $\alpha = 0.01$.

8-37. Considere los datos de resistencia a la compresión del concreto del ejercicio 7-15. Pruebe la hipótesis H_0: $\mu = 2250$ psi contra H_1: $\mu \neq 2250$ psi utilizando para ello $\alpha = 0.05$. Obtenga conclusiones basadas en el resultado de esta prueba estadística.

8-38. El ejercicio 7-17 describe los resultados de la medición del espesor de la pared de 25 botellas de vidrio para refresco. Suponga que es importante demostrar que el espesor de la pared es mayor que 4.0 mm. Proponga y pruebe una hipótesis apropiada utilizando estos datos. Obtenga conclusiones con $\alpha = 0.05$. Calcule el valor P de esta prueba.

8-39. El ejercicio 7-18 describe el porcentaje de enriquecimiento de las varillas de combustible nuclear utilizados en una central eléctrica de Noruega. Pruebe la hipótesis H_0: $\mu = 2.95$ contra H_1: $\mu \neq 2.95$ utilizando $\alpha = 0.05$ y obtenga conclusiones adecuadas. Calcule el valor P de esta prueba.

8-40. El ejercicio 7-20 presenta datos sobre el desempeño de una máquina de mezclado de bebidas.

a. ¿Los datos presentados en este ejercicio apoyan la afirmación de que la cantidad promedio de jarabe dispensado es 1.0 onza de fluido? Pruebe esta afirmación utilizando $\alpha = 0.05$.

b. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la cantidad promedio de jarabe dispensado es mayor que 1.0 onza de fluido? Pruebe esta afirmación utilizando $\alpha = 0.05$.

c. Considere la prueba de hipótesis del inciso a). Si la cantidad promedio de jarabe dispensado difiere de $\mu = 1.0$ tanto como 0.05, entonces es importante detectar este hecho con una probabilidad grande (por ejemplo, al menos 0.90). Si se hace uso de s como una estimación de σ, ¿qué puede decirse sobre la suficiencia del tamaño de la muestra $n = 25$ utilizada por el experimentador?

8-41. En la fabricación de semiconductores, a menudo se utiliza una sustancia química para quitar el silicio de la parte trasera de las obleas antes de la metalización. En este proceso es importante la rapidez con la que actúa la sustancia. Se han comparado dos soluciones químicas, utilizando para ello dos muestras aleatorias de 10 obleas para cada solución. La rapidez de acción observada es la siguiente (en mils/min):

Solución 1		**Solución 2**	
9.9	10.6	10.2	10.0
9.4	10.3	10.6	10.2
9.3	10.0	10.7	10.7
9.6	10.3	10.4	10.4
10.2	10.1	10.5	10.3

a. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la rapidez promedio de acción es la misma para ambas soluciones? Para obtener sus conclusiones, utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que las varianzas de ambas poblaciones son iguales.

b. Calcule el valor P para la prueba del inciso a).

c. Construya diagramas de caja para las dos muestras. ¿Estas gráficas apoyan la hipótesis de que las varianzas son iguales? Escriba una interpretación práctica de estas gráficas.

8-42. Se investiga la temperatura de deflexión bajo carga para dos tipos diferentes de tubería de plástico. Para ello se toman dos muestras aleatorias, cada una de 15 especímenes, anotando las temperaturas de deflexión observadas (en °F). Los resultados son los siguientes:

Tipo 1			Tipo 2		
206	193	192	177	176	198
188	207	210	197	185	188
205	185	194	206	200	189
187	189	178	201	197	203
194	213	205	180	192	192

a. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la temperatura de deflexión bajo carga para la tubería de tipo 2 es mayor que para la tubería de tipo 1? Para llegar a una conclusión, utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que las varianzas de ambas poblaciones son iguales.

b. Calcule un valor P para la prueba del inciso a).

c. Construya diagramas de caja para las dos muestras. ¿Estas gráficas apoyan la hipótesis de que las varianzas son iguales? Escriba una interpretación práctica para estas gráficas.

d. Suponga que si la temperatura de deflexión promedio para la tubería de tipo 2 es mayor que la de la tubería de tipo 1 tanto como 5 °F, entonces es importante detectar esta diferencia con una probabilidad de al menos 0.90. Para este problema, ¿resulta adecuada la selección $n_1 = n_2 = n = 15$ hecha en el inciso a)?

8-43. Considere las mediciones del diámetro de varilla del ejercicio 7-21.

a. Pruebe la hipótesis H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ utilizando $\alpha = 0.05$ y obtenga conclusiones.

b. Calcule un valor P aproximado para esta prueba.

8-44. Considere las mediciones del termocople descritas en el ejercicio 7-22.

a. Pruebe la hipótesis H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ utilizando $\alpha = 0.01$ y obtenga conclusiones.

b. Calcule un valor P aproximado para esta prueba.

8-45. Se realizó un estudio sobre economización de combustible para dos automóviles alemanes: Mercedes y Volkswagen. Para ello se escogió un vehículo de cada marca y se observó el rendimiento en kilometraje para 10 tanques de combustible en cada automóvil. Los datos son los siguientes (en kilómetros por galón):

Mercedes		Volkswagen	
24.7	24.9	41.7	42.8
24.8	24.6	42.3	42.4
24.9	23.9	41.6	39.9
24.7	24.9	39.5	40.8
24.5	24.8	41.9	29.6

a. Construya diagramas de caja para las dos muestras. Obtenga conclusiones tentativas a partir de estas gráficas.

b. Suponga que se descarta la observación que corresponde a un kilometraje inusualmente bajo para el Volkswagen. ¿Es posible suponer que los dos vehículos tienen la misma desviación estándar en cuanto al rendimiento en kilometraje?

c. ¿Los datos apoyan la afirmación que de el rendimiento en kilometraje del Volkswagen es al menos 15 kilómetros por galón mayor que el del Mercedes? Utilice $\alpha = 0.05$ para llegar a una conclusión.

d. Calcule el valor *P* de la prueba estadística del inciso c).

8-46. Suponga que se prueba H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ y que se planea utilizar muestras de las dos poblaciones del mismo tamaño. Se supone que ambas poblaciones son normales con varianzas desconocidas pero iguales. Si se utiliza $\alpha = 0.05$ y si la verdadera media μ_1 es $\mu_1 = \mu_2 + \sigma$, ¿qué tamaño de muestra debe utilizarse para que la potencia de esta prueba sea al menos 0.90?

8-47. Se fabrica una película fotoconductora con un espesor nominal de 25 mils. El ingeniero del producto desea aumentar la velocidad promedio de la película, y cree que puede lograr esto al reducir el espesor de ésta a 20 mils. En un proceso de producción piloto se fabrican ocho muestras de cada espesor de película, y después se mide la velocidad de cada una de ellas (en $\mu J/in^2$). Para la película de 25 mils, los datos de la muestra son $\bar{x}_1 = 1.15$ y $s_1 = 0.11$, mientras que para la película de 20 mils los resultados son $\bar{x}_2 = 1.06$ y $s_2 = 0.09$. Note que un aumento en la velocidad de la película debe reducir el valor de las observaciones en $\mu J/in^2$.

a. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la disminución en el espesor de la película aumenta la velocidad promedio de la misma? Haga uso de $\alpha = 0.05$ y suponga que las varianzas de las dos poblaciones son iguales.

b. ¿Cuál es el valor *P* de esta prueba?

8-48. Dos proveedores fabrican un engrane de plástico utilizado en una impresora láser. Una característica importante de estos engranes es la resistencia al impacto, la cual se mide en pies-libras. Una muestra aleatoria de 10 engranes suministrados por el primer proveedor arroja los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 290$ y $s_1 = 12$. Del segundo proveedor se toma una muestra aleatoria de 15 engranes, donde los resultados son $\bar{x}_2 = 321$ y $s_2 = 15$.

a. ¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que los engranes del proveedor 2 tienen una mayor resistencia promedio al impacto? Utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que las varianzas de las dos poblaciones son iguales.

b. ¿Cuál es el valor *P* de esta prueba?

c. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la resistencia promedio al impacto de los engranes del proveedor 2 es al menos 25 pies-libras mayor que la del proveedor 1? Haga las mismas suposiciones que en el inciso a).

8-49. Se investigan los puntos de fusión de dos aleaciones utilizadas en la fabricación de soldadura. Para ello, se funden 20 muestras de cada material. La media muestral y la desviación estándar de la aleación 1 son $\bar{x}_1 = 421$ °F y $s_1 = 4$ °F, mientras que para la aleación 2 los resultados son $\bar{x}_2 = 426$ °F y $s_2 = 3$ °F. ¿Los datos contenidos en la muestra apoyan la afirmación de que las dos aleaciones tienen el mismo punto de fusión? Utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que ambas poblaciones tienen las mismas desviaciones estándar. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-50. Con respecto al experimento del punto de fusión del ejercicio 8-49, supóngase que la verdadera diferencia promedio en los puntos de fusión es 3 °F. ¿Cuán grande debe ser la muestra para detectar esta diferencia utilizando una prueba de nivel $\alpha = 0.05$ con una probabilidad de al menos 0.90? Utilice $\sigma_1 = \sigma_2 = 4$ como estimación inicial de la desviación estándar común.

8-51. Se cree que el espesor (en mils) de la película de plástico que recubre un sustrato, está influenciado por la temperatura con la que se aplica el recubrimiento. Se recubren doce sustratos a una temperatura de 125 °F, lo que da como resultado un espesor promedio del recubrimiento de $\bar{x}_1 = 103.5$ y una desviación estándar $s_1 = 10.2$. Se recubren otros 15 sustratos a 150 °F, y se tiene que $\bar{x}_2 = 99.7$ y $s_2 = 9.4$. Inicialmente se sospechaba que el aumento en la temperatura del proceso reducía el espesor promedio del recubrimiento. ¿Los datos apoyan esta afirmación? Utilice $\alpha = 0.01$ y suponga que la desviación estándar de ambas poblaciones es la misma. Calcule el valor P de esta prueba.

8-52. Dos compañías fabrican un material de caucho para su uso en aplicaciones automovilísticas. La pieza estará sujeta a un desgaste abrasivo en el campo de aplicación, así que se decide comparar en una prueba el material producido por cada compañía. Para ello se toman 25 muestras de material provenientes de cada compañía y se someten a una prueba de abrasión, donde se observa el desgaste después de 1000 ciclos. Para la compañía 1, la media y la desviación estándar muestral del desgaste son $\bar{x}_1 = 20$ mg/1000 ciclos y $s_1 = 6$ mg/1000 ciclos, mientras que para la compañía 2 se tiene que $\bar{x}_2 = 15$ mg/1000 ciclos y $s_2 = 8$ mg/1000 ciclos.

   a. ¿Los datos apoyan la afirmación de que ambas compañías producen material que tiene el mismo desgaste promedio? Utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que las varianzas de las poblaciones son iguales.

   b. Encuentre el valor P de esta prueba.

   c. ¿Los datos apoyan la afirmación de que el material de la compañía 1 tiene un desgaste promedio mayor que el de la compañía 2? Utilice las mismas suposiciones que en el inciso a).

8-53. El ejercicio 7-25 describe un estudio donde se investiga la utilidad del diseño de dos lenguajes para mejorar la eficiencia en la programación de computadoras. ¿Los datos de este ejercicio sugieren que no existe diferencia alguna en los tiempos promedio de codificación de los dos lenguajes? Utilice $\alpha = 0.05$ para obtener conclusiones.

8-54. El ejercicio 7-26 describe una prueba donde participan dos marcas de llantas radiales. ¿Los datos de este experimento indican que no hay ninguna diferencia en la duración promedio de las dos marcas? Utilice $\alpha = 0.01$ para obtener conclusiones.

8-55. El ejercicio 7-27 presenta datos de un artículo del *Journal of Aircraft*, donde se comparan dos métodos para el cálculo de las frecuencias de vibración naturales del armazón del ala. ¿Los datos sugieren que los dos métodos producen los mismos valores promedio para este parámetro? Utilice $\alpha = 0.05$ para obtener conclusiones.

8-56. Quince hombre adultos, cuyas edades fluctúan entre 35 y 50 años, participan en un estudio para evaluar el efecto de la dieta y el ejercicio sobre los niveles de colesterol en la sangre. El colesterol total fue medido al inicio en cada sujeto, y tres meses después de participar en un programa de ejercicio aeróbico y de haber cambiado a una dieta baja en grasas. Los datos aparecen en la tabla siguiente. ¿Estos datos apoyan la afirmación de que la dieta baja en grasas y el ejercicio aeróbico son de gran valor en la disminución de los niveles de colesterol? Utilice $\alpha = 0.05$.

	Nivel de colesterol en la sangre	
Sujeto	Antes	Después
1	265	229
2	240	231
3	258	227
4	295	240
5	251	238
6	245	241
7	287	234
8	314	256
9	260	247
10	279	239
11	283	246
12	240	218
13	238	219
14	225	226
15	247	233

8-57. Se pueden utilizar dos pruebas analíticas diferentes para determinar el nivel de impureza en aleaciones de acero. Se prueban ocho especímenes con ambos procedimientos; los resultados aparecen en la siguiente tabla. ¿Existe suficiente evidencia para concluir que ambas pruebas dan el mismo nivel de impureza promedio, utilizando $\alpha = 0.01$?

Espécimen	Prueba 1	Prueba 2
1	1.2	1.4
2	1.3	1.7
3	1.5	1.5
4	1.4	1.3
5	1.7	2.0
6	1.8	2.1
7	1.4	1.7
8	1.3	1.6

8-58. Diez individuos participan en un programa de modificación de dieta diseñado para estimular la pérdida de peso. En la tabla siguiente se indica el peso de cada participante antes y después de haber participado en el programa. ¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que este programa de modificación de dieta es eficaz para reducir el peso? Utilice $\alpha = 0.05$.

Sujeto	Antes	Después
1	195	187
2	213	195
3	247	221
4	201	190
5	187	175
6	210	197
7	215	199
8	246	221
9	294	278
10	310	285

8-59. Considere los datos de pérdida de peso del ejercicio 8-58. ¿Existe evidencia que apoye la afirmación de que este programa de modificación de dieta en particular reduce el peso promedio al menos en 10 libras? Utilice $\alpha = 0.05$.

8-60. Considere el experimento de pérdida de peso del ejercicio 8-58. Suponga que, si el programa de modificación de dieta da como resultado una pérdida de peso promedio de al menos 10 libras, entonces es importante detectar esto con una probabilidad de al menos 0.90. ¿El uso de 10 sujetos constituye un tamaño de muestra adecuado? Si no es así, ¿cuántos sujetos deben emplearse?

8-7 PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE LA VARIANZA

Algunas veces se necesitan pruebas sobre la varianza o la desviación estándar de una población. En esta sección se presentan dos procedimientos; uno se basa en la hipótesis de que la población es normal, mientras que el otro es una prueba para una muestra grande que no requiere la suposición de normalidad.

8-7.1 Procedimientos de prueba para una población normal

Supóngase que se desea probar la hipótesis de que la varianza de una población normal σ^2 es igual a un valor específico, por ejemplo, σ_0^2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de n observaciones tomadas de esta población. Para probar

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad (8\text{-}68)$$

se utiliza el estadístico de prueba

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \qquad (8\text{-}69)$$

donde S^2 es la varianza muestral. Ahora, si H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ es verdadera, entonces el estadístico de prueba X_0^2 sigue una distribución ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Por consiguiente, se calcula el valor de la estadística de prueba χ_0^2, y la hipótesis H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ debe rechazarse si

$$\chi_0^2 > \chi_{\alpha/2,n-1}^2 \tag{8-70a}$$

o si

$$\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha/2,n-1}^2 \tag{8-70b}$$

donde $\chi_{\alpha/2,n-1}^2$ y $\chi_{1-\alpha/2,n-1}^2$ son los puntos que corresponden a los porcentajes $100\alpha/2$ inferior y superior de la distribución ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad, respectivamente.

El mismo estadístico de prueba se utiliza para hipótesis alternativas unilaterales. Para la hipótesis unilateral

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \tag{8-71}$$

se rechaza H_0 si

$$\chi_0^2 > \chi_{\alpha,n-1}^2 \tag{8-72}$$

Para la otra hipótesis unilateral

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \tag{8-73}$$

se rechaza H_0 si

$$\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha,n-1}^2 \tag{8-74}$$

EJEMPLO 8-14

Considérese la máquina de llenado de botellas del ejemplo 7-7. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas se obtiene una varianza muestral para el volumen de llenado de $s^2 = 0.0153$ (onzas de fluido)^2. Si la varianza del volumen de llenado es mayor que 0.01 (onzas de fluido)^2, entonces existe una proporción inaceptable de botellas que serán llenadas con una cantidad menor de líquido. ¿Existe evidencia en los datos muestrales que sugiera que el fabricante tiene un problema con el llenado de las botellas? Utilícese $\alpha = 0.05$.

Al utilizar el procedimiento de ocho pasos se tiene lo siguiente:

1. El parámetro de interés es la varianza de la población s^2.
2. H_0: $\sigma^2 = 0.01$
3. H_1: $\sigma^2 > 0.01$
4. $\alpha = 0.05$
5. El estadístico de prueba es

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

6. Se rechaza H_0 si $\chi_0^2 > \chi_{0.05,19}^2 = 30.14$.
7. Cálculos:

$$\chi_0^2 = \frac{19(0.0153)}{0.01} = 29.07$$

8. Conclusiones: Puesto que $\chi_0^2 = 29.07 < \chi_{0.05,19}^2 = 30.14$, se concluye que no hay ninguna evidencia fuerte de que la varianza del volumen de llenado sea mayor que 0.01 (onzas de fluido)^2.

Al utilizar la tabla III del apéndice, es fácil colocar cotas sobre el valor P de una prueba ji-cuadrada. Después de buscar en la tabla, se tiene que $\chi_{0.10,19}^2 = 27.20$ y $\chi_{0.05,19}^2 = 30.14$. Dado que $27.20 < 29.07 < 30.14$, se concluye que el valor P para la prueba del ejemplo 8-14 se encuentra en el intervalo $0.05 < P < 0.10$. El valor real de P es $P = 0.0649$. (Este valor se obtuvo con una calculadora HP-48.)

8-7.2 Valor de β y selección del tamaño de la muestra

Las curvas características de operación para las pruebas ji-cuadrada de la sección 8-7.1 aparecen en los diagramas VI*i* a VI*n* del apéndice para $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$. Para la hipótesis alternativa bilateral de la ecuación 8-68, los diagramas VI*i* y VI*j* son una gráfica de β contra un parámetro de abscisa

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0} \tag{8-75}$$

para varios tamaños de muestra n, donde σ denota el valor verdadero de la desviación estándar. Los diagramas VI*k* y VI*l* son para la hipótesis alternativa unilateral H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$, mientras que los diagramas VI*m* y VI*n* son para la otra hipótesis alternativa unilateral H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$. Al hacer uso de estos diagramas, debe considerarse a σ como el valor de la desviación estándar que desea detectarse.

Estas curvas pueden utilizarse para evaluar el valor de β (o la potencia) asociado con una prueba en particular. Alternativamente, también pueden emplearse para **diseñar** una prueba; esto es, para determinar el tamaño de la muestra necesario para detectar un valor particular de σ que difiera del valor propuesto σ_0.

EJEMPLO 8-15

Considérese el problema de llenado de botellas de los ejemplos 7-7 y 8-14. Si la varianza del proceso de llenado es mayor que 0.01 (onzas de fluido)^2, entonces muchas botellas tendrán un menor contenido de líquido. Por tanto, el valor propuesto de la desviación estándar es $\sigma_0 = 0.10$. Supóngase que si la verdadera desviación estándar del proceso de llenado excede este valor en un 25%, entonces sería deseable detectar esta situación con una probabilidad de al menos 0.8. ¿Resulta adecuado utilizar una muestra de tamaño $n = 20$ para este fin?

Para resolver este problema, nótese que se requiere

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{0.125}{0.10} = 1.25$$

Éste es el parámetro de la abcisa para el diagrama VIk. De este diagrama, con $n = 20$ y $\lambda = 1.25$, se tiene que $\beta \simeq 0.6$. Por tanto, sólo existe una posibilidad del 40% de que la hipótesis nula sea rechazada si la desviación estándar verdadera es en realidad tan grande como $\sigma = 0.125$ onzas de fluido.

Para reducir el valor de β, debe utilizarse una muestra de mayor tamaño. De la curva característica de operación con $\beta = 0.20$ y $\lambda = 1.25$, se tiene que, de manera aproximada, $n = 75$. En consecuencia, si se desea que el desempeño de la prueba sea el deseado, entonces el tamaño de la muestra debe ser al menos de 75 botellas.

8-7.3 Procedimiento de prueba para muestras grandes

El procedimiento de prueba ji-cuadrada de la sección 8-7 es bastante sensible a la suposición de normalidad. En consecuencia, es deseable desarrollar un procedimiento que no requiera esta hipótesis. Cuando la población subyacente no es necesariamente normal pero n es grande (por ejemplo, $n \geq 35$ o 40), entonces puede utilizarse el resultado siguiente: si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria tomada de una población que tiene una varianza σ^2, entonces la desviación estándar muestral S tiene una distribución que es aproximadamente normal con media $E(S) \simeq \sigma$ y varianza $V(S) \simeq \sigma^2/2n$, si n es grande. Entonces la distribución de

$$Z_0 = \frac{S - \sigma}{\sigma/\sqrt{2n}} \tag{8-76}$$

es aproximadamente normal estándar.

Para probar

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \tag{8-77}$$

se sustituye σ por σ_0 en la ecuación 8-76. Por tanto, el estadístico de prueba es

$$Z_0 = \frac{S - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}} \tag{8-78}$$

y se rechaza H_0 si $z_0 > z_{\alpha/2}$ o si $z_0 < -z_{\alpha/2}$. Para las alternativas unilaterales puede utilizarse el mismo estadístico de prueba. Si se prueban

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \tag{8-79}$$

debe rechazarse H_0 si $z_0 > z_\alpha$, mientras que si se prueban

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \tag{8-80}$$

debe rechazarse H_0 si $z_0 < -z_\alpha$.

EJEMPLO 8-16

En una impresora gráfica se utiliza una pieza de plástico moldeada por inyección. Antes de firmar un contrato de largo plazo, el fabricante de la impresora desea asegurarse de que el proveedor puede producir piezas con una desviación estándar de longitud de 0.025 mm como máximo. Para ello se obtiene una muestra aleatoria de 75 piezas, obteniéndose una desviación estándar muestral de longitud $s = 0.022$ mm. ¿A qué conclusión debe llegarse si se utiliza $\alpha = 0.01$?

Al aplicar el procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis, se tiene lo siguiente:

1. El parámetro de interés es la desviación estándar de la población.
2. H_0: $\sigma^2 = 6.25 \times 10^{-4}$ [puesto que $\sigma^2 = (0.025)^2 = 6.25 \times 10^{-4}$]
3. H_1: $\sigma^2 < 6.25 \times 10^{-4}$
4. $\alpha = 0.01$
5. El estadístico de prueba es

$$z_0 = \frac{s - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$$

6. Rechazar H_0 si $z_0 < -z_{0.01} = -2.33$.
7. Cálculos: El estadístico de prueba es

$$z_0 = \frac{s - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}} = \frac{0.022 - 0.025}{0.025/\sqrt{150}} = -1.47$$

8. Conclusiones: Dado que $z_0 = -1.47$ no es menor que $-z_{0.01} = -2.33$, no es posible rechazar la hipótesis nula. Esto es, la evidencia del proveedor no es lo suficientemente fuerte para justificar un contrato de largo plazo. Nótese que el valor P de esta prueba es, de manera aproximada, $P = 0.0708$.

8-8 PRUEBAS PARA LA IGUALDAD DE DOS VARIANZAS

En esta sección se presentan pruebas para comparar dos varianzas. Con el mismo enfoque de la sección 8-7, se presentan pruebas para poblaciones normales y pruebas de muestras grandes que pueden aplicarse a poblaciones que no son normales.

8-8.1 Procedimiento de prueba para poblaciones normales

Supóngase que se tiene interés en dos poblaciones normales independientes, donde las medias y varianzas de la población, μ_1, σ_1^2, μ_2 y σ_2^2, son desconocidas. Se desea probar la hipótesis sobre la igualdad de las dos varianzas, H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, por ejemplo. Supóngase que para ello se tienen disponibles dos muestras aleatorias; una de tamaño n_1 tomada de la población 1, y otra de tamaño n_2 proveniente de la población 2, y sean S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales. Para probar la alternativa bilateral

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \tag{8-81}$$

se utiliza el hecho de que el estadístico

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{8-82}$$

tiene una distribución similar a la F con $n_1 - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_2 - 1$ grados de libertad en el denominador, si la hipótesis nula H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ es verdadera. Por consiguiente, debe rechazarse H_0 si el valor de la estadística de prueba

$$f_0 > f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \tag{8-83a}$$

o si

$$f_0 < f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \tag{8-83b}$$

donde $f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ y $f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ son los puntos inferior y superior que corresponden al porcentaje $100\alpha/2$ de la distribución F con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad. La tabla V del apéndice proporciona sólo los puntos de la cola superior de la distribución F, así que para encontrar $f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ debe utilizarse

$$f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} = \frac{1}{f_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}} \tag{8-84}$$

El estadístico de prueba de la ecuación 8-82 puede emplearse para probar hipótesis alternativas unilaterales. Puesto que las etiquetas asignadas a las poblaciones son arbitrarias, sea σ_1^2 la varianza de la población que se propone como la mayor. Por consiguiente, la hipótesis alternativa unilateral es

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \tag{8-85}$$

Si

$$f_0 > f_{\alpha, n_1-1, n_2-1} \tag{8-86}$$

entonces debe rechazarse H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

EJEMPLO 8-17

Las capas de óxido en las obleas semiconductoras son depositadas en una mezcla de gases para alcanzar el espesor apropiado. La variabilidad del espesor de las capas de óxido es una característica crítica de la oblea, y lo deseable para los siguientes pasos de la fabricación es tener una variabilidad baja. Para ello se estudian dos mezclas diferentes de gases con la finalidad de determinar con cuál se obtienen mejores resultados en cuanto a la reducción en la variabilidad del espesor del óxido. Veinte obleas son depositadas en cada gas. Las desviaciones estándar de cada muestra del espesor del óxido son $s_1 = 1.96$ angstroms y $s_2 = 2.13$ angstroms, respectivamente. ¿Existe alguna evidencia que indique preferencia por alguno de los gases? Utilice $\alpha = 0.05$.

En este problema puede aplicarse el procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis, de la manera siguiente:

1. Los parámetros de interés son las varianzas del espesor del óxido σ_1^2 y σ_2^2. Se supondrá que el espesor del óxido es una variable aleatoria normal para ambas mezclas de gases.
2. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
3. H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
4. $\alpha = 0.05$
5. El estadístico de prueba está dado por la ecuación 8-82:
$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$
6. Dado que $n_1 = n_2 = 20$, se rechaza H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ si $f_0 > f_{0.025,19,19} = 2.53$ o si $f_0 < f_{0.975,19,19} = 1/f_{0.025,19,19} = 1/2.53 = 0.40$.
7. Cálculos: Dado que $s_1^2 = (1.96)^2 = 3.84$ y $s_2^2 = (2.13)^2 = 4.54$, el estadístico de prueba es
$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3.84}{4.54} = 0.85$$
8. Conclusiones: Como $f_{0.975,19,19} = 0.40 < 0.85 < f_{0.025,19,19} = 2.53$, no es posible rechazar la hipótesis nula H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ con el nivel de significancia $\alpha = 0.05$. Por consiguiente, no hay evidencia fuerte que indique cuál de los dos gases dará como resultado una varianza más pequeña en el espesor de la capa de óxido.

También es posible encontrar un valor P para el estadístico F del ejemplo 8-17. Dado que $f_{0.50,19,19} = 1.00$, el valor calculado del estadístico de prueba $f_0 = s_1^2/s_2^2 = 3.84/4.54 = 0.85$ está más próximo a la cola inferior de la distribución F que a la cola superior. La probabilidad de que una variable aleatoria F con 19 grados de libertad en el numerador y en el denominador sea menor que 0.85, es 0.3634. Ya que es arbitrario el hecho de cuál población sea identificada como la "uno", el estadístico de prueba también pudo calcularse como $f_0 = 4.54/3.84 = 1.18$. La probabilidad de que una variable aleatoria F con 19 grados de libertad en el numerador y en el denominador, sea mayor que 1.18, es 0.3610. Por consiguiente, el valor P del estadístico de prueba $f_0 = 0.85$ es la suma de estas dos probabilidades, o $P = 0.3634 + 0.3610 = 0.7244$. Como el valor de P es mayor que 0.05, no es posible rechazar la hipótesis nula H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. (Las probabilidades dadas anteriormente fueron obtenidas con una calculadora HP-48.)

8-8.2 Valor de β y selección del tamaño de la muestra

Los diagramas VIo, VIp, VIq y VIr del apéndice proporcionan las curvas características de operación para la prueba F dada en la sección 8-8.1 para $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$, suponiendo que $n_1 = n_2 = n$. Los diagramas VI*o* y VI*p* se utilizan con la alternativa bilateral de la ecuación 8-81. En ellas se hace una gráfica de β contra el parámetro de la abscisa

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{8-87}$$

para varios $n_1 = n_2 = n$. Los diagramas VI*q* y VI*r* se utilizan para la alternativa unilateral de la ecuación 8-85.

EJEMPLO 8-18

Para el problema de depósito de óxido en obleas de semiconductor del ejemplo 8-17, supóngase que uno de los gases da como resultado una desviación estándar del espesor de la capa de óxido igual a la mitad de la desviación estándar de la capa producida por el otro gas. Si se desea detectar esta situación con una probabilidad de al menos 0.80, ¿resulta adecuado utilizar un tamaño de muestra $n_1 = n_2 = 20$?

Nótese que si una desviación estándar es la mitad de la otra, entonces

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

Al consultar el diagrama VI*o* del apéndice con $n_1 = n_2 = 20$ y $\lambda = 2$, se tiene que $\beta \simeq 0.20$. En consecuencia, si $\beta = 0.20$, la potencia de la prueba (que es la probabilidad de que la prueba detecte una diferencia en las desviaciones estándar) es 0.80, con lo que puede concluirse que los tamaños de las muestras $n_1 = n_2 = 20$ son adecuados.

8-8.3 Procedimiento de prueba para muestras grandes

Cuando el tamaño de las dos muestras n_1 y n_2 es grande, puede desarrollarse un procedimiento de prueba para la igualdad de las dos varianzas que no requiere la suposición de normalidad. La prueba se basa en el resultado de que las desviaciones estándar muestrales S_1 y S_2 tienen distribuciones aproximadamente normales con medias σ_1 y σ_2, respectivamente, y varianzas $\sigma_1^2/2n_1$ y $\sigma_2^2/2n_2$, respectivamente. Para probar

$$H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1\colon \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \tag{8-88}$$

se utiliza el estadístico de prueba

$$Z_0 = \frac{S_1 - S_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{2n_1} + \dfrac{1}{2n_2}}} \tag{8-89}$$

donde S_p es el estimador combinado de la desviación estándar común σ. Esta estadística tiene una distribución que es aproximadamente normal estándar cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Debe rechazarse H_0 si $z_0 > z_{\alpha/2}$ o si $z_0 < -z_{\alpha/2}$. Las regiones de rechazo para alternativas unilaterales tienen la misma forma que las de otras pruebas normales para dos muestras.

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 8-7 Y 8-8

8-61. Se inserta un remache en un agujero. Si la desviación estándar del diámetro del agujero es mayor que 0.01 mm, entonces existe una probabilidad inaceptablemente grande de que el remache no entre en el agujero. Se toma una muestra aleatoria de $n = 15$ piezas, y se mide el diámetro del agujero. La desviación estándar muestral de las mediciones de estos diámetros es $s = 0.008$ mm. ¿Existe evidencia fuerte que indique que la desviación estándar del diámetro del agujero es mayor que 0.01 mm? Utilice $\alpha = 0.01$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-62. El contenido de azúcar del almíbar de los duraznos enlatados tiene una distribución normal, donde se cree que la varianza es $\sigma^2 = 18$ (mg)^2. Pruebe la hipótesis H_0: $\sigma^2 = 18$ contra H_1: $\sigma^2 \neq 18$ si al tomar una muestra de $n = 10$ latas la desviación estándar muestral es $s = 4.8$ mg, con $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-63. Considere los datos de duración de llantas del ejercicio 8-33. ¿Puede concluirse, con $\alpha = 0.05$, que la desviación estándar de la duración de la llanta excede los 200 km? Encuentre el valor P de esta prueba.

8-64. Considere los datos de prueba de impacto Izod del ejercicio 8-34. Pruebe la hipótesis de que $\sigma = 0.10$ contra una alternativa que especifica que $\sigma \neq 0.10$, utilizando $\alpha = 0.01$. Obtenga conclusiones. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-65. Se mide el porcentaje de titanio de una aleación utilizada en piezas para vehículos espaciales. Para ello se seleccionan 50 piezas al azar. La desviación estándar muestral es $s = 0.37$.

- **a.** Pruebe la hipótesis H_0: $\sigma = 0.25$ contra H_1: $\sigma \neq 0.25$ utilizando para ello $\alpha = 0.05$.
- **b.** Repita el inciso a), con el procedimiento de muestras grandes descrito en la sección 8-7.3.

8-66. Considere los datos de diámetros de agujeros del ejercicio 8-61. Suponga que la desviación estándar real del diámetro del agujero es mayor que el valor propuesto en un 50%. ¿Cuál es la probabilidad de que esta diferencia sea detectada por la prueba descrita en el ejercicio 8-61?

8-67. Considere los datos de contenido de azúcar del ejercicio 8-62. Suponga que la verdadera varianza es $\sigma^2 = 40$. ¿Cuán grande debe ser la muestra necesaria para detectar esta diferencia con una probabilidad de al menos 0.90?

8-68. Dos compañías de compuestos químicos pueden surtir materia prima. La concentración de un elemento en particular en este material es importante. La concentración promedio de ambos proveedores es la misma, pero se sospecha que la variabilidad en la concentración puede diferir entre las dos compañías. La desviación estándar de la concentración en una muestra aleatoria de $n_1 = 15$ lotes producidos por la compañía 1 es $s_1 = 4.7$ g/l, mientras que para la compañía 2, una muestra aleatoria de $n_2 = 20$ lotes proporciona una $s_2 = 5.8$ g/l. ¿Existe evidencia suficiente para concluir que las varianzas de las dos poblaciones son diferentes? Utilice $\alpha = 0.05$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-69. Considere los datos de rapidez de acción de la sustancia química del ejercicio 8.41. Pruebe la hipótesis H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ con $\alpha = 0.05$, y obtenga conclusiones. ¿Cuál será el valor de P de esta prueba?

8-70. Considere los datos de rapidez de acción de la sustancia química del ejercicio 8-41. Suponga que si la varianza de una de las poblaciones es dos veces más grande que la de la otra, entonces se desea detectar este hecho con una probabilidad de al menos 0.90. ¿Los tamaños de las muestras $n_1 = n_2 = 10$ resultan adecuados para este fin? Utilice $\alpha = 0.05$.

8-71. Considere las mediciones de economización de combustible del ejercicio 8-45.

- **a.** Si se emplean las 10 observaciones de ambos tipos de vehículos, ¿existe alguna evidencia fuerte que apoye la afirmación de que la variabilidad del rendimiento en kilometraje es mayor para el Volkswagen que para el Mercedes? Utilice $\alpha = 0.05$.

b. Encuentre el valor P de la prueba del inciso a).

c. Resuelva de nuevo el inciso a) suponiendo que se descarta la medición inusualmente baja del Volkswagen.

8-72. Considere los datos de velocidad de película del ejercicio 8-47. Pruebe H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ con $\alpha = 0.01$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-73. Considere los datos de resistencia al impacto de engranes del ejercicio 8-48. ¿Existe evidencia suficiente para concluir que la varianza de la resistencia al impacto es diferente para los dos proveedores? Utilice $\alpha = 0.05$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-74. Considere los datos de punto de fusión del ejercicio 8-49. ¿Los datos de la muestra apoyan la afirmación de que las dos aleaciones tienen la misma varianza en lo que respecta al punto de fusión? Utilice $\alpha = 0.05$ para llegar a una conclusión. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-75. El ejercicio 8-51 presenta mediciones del espesor de un recubrimiento plástico para dos temperaturas de aplicación diferentes. Pruebe H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ con $\alpha = 0.01$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-76. Se efectúa un estudio para determinar si existe diferencia entre hombres y mujeres en lo que toca a la repetibilidad al ensamblar componentes en tarjetas de circuito impreso. Para ello se seleccionan dos muestras de 50 hombres y 50 mujeres, y cada uno se somete a una prueba de ensamblado de unidades. Las desviaciones estándar de los tiempos de ensamblado de las dos muestras son $s_{\text{hombres}} = 0.98$ min y $s_{\text{mujeres}} = 1.02$ min. ¿Existe alguna evidencia que apoye la afirmación de que los hombres y las mujeres difieren en cuanto a la repetibilidad para esta tarea de ensamblado? Utilice el procedimiento de prueba para muestras grandes descrito en la sección 8-8.3 con $\alpha = 0.01$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-9 PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE UNA PROPORCIÓN

8-9.1 Desarrollo del procedimiento de prueba

En muchos problemas de ingeniería, se tiene interés en una variable aleatoria que sigue una distribución binomial. Por ejemplo, considérese un proceso de producción que fabrica artículos que son clasificados como aceptables o defectuosos. Lo usual y más razonable es modelar la ocurrencia de artículos defectuosos con la distribución binomial, donde el parámetro binomial p representa la proporción de artículos defectuosos producidos. En consecuencia, muchos problemas de decisión en ingeniería incluyen una prueba de hipótesis con respecto a p.

Considérese la prueba

$$H_0: p = p_0$$
$$H_1: p \neq p_0 \tag{8-90}$$

A continuación se proporciona una prueba basada en la aproximación normal de una distribución binomial. Este procedimiento aproximado es válido siempre y cuando p no sea muy próximo a cero o uno, y si el tamaño de la muestra es relativamente grande. Sea X el número de observaciones en una muestra aleatoria de tamaño n que pertenece a la clase asociada con p. Entonces, si la hipótesis nula H_0: $p = p_0$ es verdadera, se tiene que $X \sim N(np_0, np_0(1 - p_0))$, aproximadamente. Para probar H_0: $p = p_0$, se calcula el estadístico de prueba

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \tag{8-91}$$

y se rechaza H_0: $p = p_0$ si

$$z_0 > z_{\alpha/2} \quad \text{o} \quad z_0 < -z_{\alpha/2}$$

Las regiones críticas para las hipótesis alternativas unilaterales se construyen de la manera usual.

EJEMPLO 8-19

Un fabricante de semiconductores produce controladores que se emplean en aplicaciones de motores automovilísticos. El cliente requiere que la fracción de controladores defectuosos en uno de los pasos de manufactura críticos no sea mayor que 0.05, y que el fabricante demuestre esta característica del proceso de fabricación con este nivel de calidad, utilizando $\alpha = 0.05$. El fabricante de semiconductores toma una muestra aleatoria de 200 dispositivos y encuentra que cuatro de ellos son defectuosos. ¿El fabricante puede demostrar al cliente la calidad del proceso?

Este problema puede resolverse usando del procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis, como sigue:

1. El parámetro de interés es la fracción p de artículos defectuosos en el proceso.
2. H_0: $p = 0.05$
3. H_1: $p < 0.05$

   Este planteamiento del problema permitirá que el fabricante haga una afirmación fuerte sobre la calidad del proceso si se rechaza la hipótesis nula H_0: $p = 0.05$.
4. $\alpha = 0.05$
5. El estadístico de prueba es (de la ecuación 8-91)

$$z_0 = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

   donde $x = 4$, $n = 200$ y $p_0 = 0.05$.
6. Rechazar H_0: $p = 0.05$ si $z_0 < -z_{0.05} = -1.645$
7. Cálculos: El estadístico de prueba es

$$z_0 = \frac{4 - 200(0.05)}{\sqrt{200(0.05)(0.95)}} = -1.95$$

8. Conclusiones: Puesto que $z_0 = -1.95 < -z_{0.05} = -1.645$, se rechaza H_0 y se concluye que la fracción de artículos defectuosos p es menor que 0.05. El valor P para este valor del estadístico de prueba z_0 es $P = 0.0256$, que es menor que $\alpha = 0.05$. Por tanto, se concluye que el proceso tiene la calidad deseada.

En ocasiones se encuentra otra forma del estadístico de prueba Z_0 de la ecuación 8-91. Nótese que si X es el número de observaciones en una muestra aleatoria de tamaño n que pertenece a una clase de interés, entonces $\hat{P} = X/n$ es la proporción muestral que pertenece a dicha clase. Ahora, si se dividen el numerador y denominador de Z_0 en la ecuación 8-91 entre n, se tiene

$$Z_0 = \frac{X/n - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

o

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \tag{8-92}$$

Esto presenta la estadística de prueba en términos de la proporción muestral, en lugar de hacerlo con el número de objetos X de la muestra que pertenecen a la clase de interés.

8-9.2 Valor de β y selección del tamaño de la muestra

Es posible obtener ecuaciones en forma cerrada para el error β aproximado para las pruebas de la sección 8-9.1. Supóngase que p es el verdadero valor de la proporción en la población. El valor aproximado de β para la alternativa bilateral H_1: $p \neq p_1$ es

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}{\sqrt{p(1 - p)/n}}\right) - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}{\sqrt{p(1 - p)/n}}\right) \tag{8-93}$$

Si la alternativa es H_1: $p < p_0$, entonces

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha}\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}{\sqrt{p(1 - p)/n}}\right) \tag{8-94}$$

mientras que si la alternativa es H_1: $p > p_0$, entonces

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha}\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}{\sqrt{p(1 - p)/n}}\right) \tag{8-95}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para encontrar el tamaño aproximado de la muestra n que brinda a la prueba un nivel α con un riesgo β específico. Las ecuaciones para el tamaño de la muestra son

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1 - p_0)} + z_{\beta}\sqrt{p(1 - p)}}{p - p_0}\right)^2 \tag{8-96}$$

para la alternativa bilateral, y

$$n = \left(\frac{z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0}\right)^2 \qquad (8\text{-}97)$$

para una alternativa unilateral.

EJEMPLO 8-20

Considérese al fabricante de semiconductores del ejemplo 8-19. Supóngase que la fracción de componentes defectuosos del proceso es en realidad $p = 0.03$. ¿Cuál es el valor de β para la prueba de la calidad del proceso, la cual emplea $n = 200$ y $\alpha = 0.05$?

El valor de β puede calcularse con la ecuación 8-94, de la siguiente forma:

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{0.05 - 0.03 - (1.645)\sqrt{0.05(0.95)/200}}{\sqrt{0.03(1-0.03)/200}}\right) = 1 - \Phi(-0.44) = 0.67$$

En consecuencia, existe una probabilidad alrededor de 0.7 de que el fabricante de semiconductores falle al concluir que el proceso tiene la calidad deseada si la fracción verdadera de componentes defectuosos es $p = 0.03$ (3%). Esto parece ser un error β muy grande, pero la diferencia entre $p = 0.05$ y $p = 0.03$ es bastante pequeña, y el tamaño de la muestra $n = 200$ no es particularmente grande.

Supóngase que el fabricante de semiconductores está dispuesto a aceptar un valor de β tan grande como 0.10 si el valor verdadero de la fracción de componentes defectuosos del proceso es $p = 0.03$. Si el fabricante continúa utilizando $\alpha = 0.05$, ¿qué tamaño de muestra se requiere para tal fin?

El tamaño de la muestra puede calcularse a partir de la ecuación 8-97, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{1.645\sqrt{0.05(0.95)} + 1.28\sqrt{0.03(0.97)}}{0.03 - 0.05}\right)^2 \\ &\simeq 832 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado $p = 0.03$ en la ecuación 8-97. Nótese que $n = 832$ es un tamaño de muestra muy grande. Sin embargo, se trata de detectar una desviación bastante pequeña con respecto al valor nulo $p_0 = 0.05$.

8-10 PRUEBAS DE HIPÓTESIS SOBRE DOS PROPORCIONES

Las pruebas de la sección 8-9 pueden extenderse al caso donde existen dos parámetros binomiales de interés (por ejemplo, p_1 y p_2), y se desea probar que son iguales. Esto es, se desea probar

$$H_0: p_1 = p_2$$
$$H_1: p_1 \neq p_2 \tag{8-98}$$

A continuación se presenta un procedimiento para muestras grandes basado en la aproximación normal de la distribución binomial.

8-10.1 Prueba de muestra grande para H_0: $p_1 = p_2$

Supóngase que se toman dos muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 de dos poblaciones, y sean X_1 y X_2 el número de observaciones que pertenecen a la clase de interés en las muestras 1 y 2, respectivamente. Por otra parte, supóngase que se aplica la aproximación normal a la distribución binomial de cada población, de modo que los estimadores de las proporciones poblacionales $\hat{P}_1 = X_1/n_1$ y $\hat{P}_2 = X_2/n_2$ tienen distribuciones aproximadamente normales. Ahora bien, si la hipótesis nula H_0: $p_1 = p_2$ es verdadera, entonces al utilizar el hecho de que $p_1 = p_2 = p$, la variable aleatoria

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

tiene una distribución $N(0, 1)$ aproximadamente. Un estimador del parámetro común p es

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

El estadístico de prueba para H_0: $p_1 = p_2$, es, entonces,

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \tag{8-99}$$

Sea z_0 el valor calculado del estadístico de prueba. Entonces, si

$$z_0 > z_{\alpha/2} \quad \text{o} \quad z_0 < -z_{\alpha/2} \tag{8-100}$$

se rechaza la hipótesis nula.

EJEMPLO 8-21

Se evalúan dos tipos diferentes de soluciones para pulir, para su posible uso en una operación de pulido en la fabricación de lentes intraoculares utilizados en el ojo humano después de una cirugía de cataratas. Se pulen 300 lentes con la primera solución y, de éstos, 253 no presentaron defectos inducidos por el pulido. Después se pulen otros 300 lentes con la segunda solución, de los cuales 196 resultan satisfactorios. ¿Existe alguna razón para creer que las dos soluciones para pulir son diferentes? Utilícese $\alpha = 0.01$.

El procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis conduce a los siguientes resultados:

1. Los parámetros de interés son p_1 y p_2, la proporción de lentes que son satisfactorios después del procedimiento de pulido con las soluciones 1 y 2.
2. $H_0: p_1 = p_2$
3. $H_1: p_1 \neq p_2$
4. $\alpha = 0.01$
5. El estadístico de prueba es

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

donde $\hat{p}_1 = 253/300 = 0.8433$, $\hat{p}_2 = 196/300 = 0.6533$, $n_1 = n_2 = 300$, y

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{253 + 196}{300 + 300} = 0.7483$$

6. Rechazar $H_0: p_1 = p_2$ si $z_0 > z_{0.005} = 2.58$ o si $z_0 < -z_{0.005} = -2.58$.
7. Cálculos: El valor del estadístico de prueba es

$$z_0 = \frac{0.8433 - 0.6533}{\sqrt{0.7483(0.2517)\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{300}\right)}} = 5.36$$

8. Conclusiones: Puesto que $z_0 = 5.36 > z_{0.005} = 2.58$, se rechaza la hipótesis nula. Nótese que el valor P es $P \simeq 8.32 \times 10^{-8}$. Por tanto, existe evidencia fuerte que apoya la afirmación de que los dos fluidos para pulir son diferentes. El fluido 1 produce una fracción mayor de lentes no defectuosos.

8-10.2 Valor de β y selección del tamaño de la muestra

El cálculo del valor de β para la prueba anterior es algo más complicado que para el caso de una sola muestra. El problema es que el denominador de Z_0 es una estimación de la desviación estándar de $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ bajo la hipótesis de que $p_1 = p_2 = p$. Cuando H_0: $p_1 = p_2$ es falsa, la desviación estándar de $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ es

$$\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \tag{8-101}$$

Si la hipótesis alternativa es bilateral, el valor de β es

$$\beta = \Phi\left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{p}\bar{q}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}\right) - \Phi\left(\frac{-z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{p}\bar{q}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}\right) \tag{8-102}$$

donde

$$\bar{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{q} = \frac{n_1(1-p_1) + n_2(1-p_2)}{n_1 + n_2}$$

y $\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}$ está dada por la ecuación 8-101. Si la hipótesis alternativa es H_1: $p_1 > p_2$, entonces

$$\beta = \Phi\left(\frac{z_{\alpha}\sqrt{\bar{p}\bar{q}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}\right) \tag{8-103}$$

y si la hipótesis alternativa es H_1: $p_1 < p_2$, entonces

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{-z_{\alpha}\sqrt{\bar{p}\bar{q}(1/n_1 + 1/n_2)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}}\right) \tag{8-104}$$

Para un par de valores específicos p_1 y p_2, pueden encontrarse los tamaños de muestras requeridos $n_1 = n_2 = n$ para dar a la prueba el tamaño α y el valor de β especificados. Para la hipótesis alternativa bilateral, el tamaño común de la muestra es

$$n = \frac{\left(z_{\alpha/2}\sqrt{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)/2} + z_{\beta}\sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}\right)^2}{(p_1 - p_2)^2} \tag{8-105}$$

donde $q_1 = 1 - p_1$ y $q_2 = 1 - p_2$. Para una alternativa unilateral, es necesario remplazar $z_{\alpha/2}$ en la ecuación 8-105 por z_{α}.

EJERCICIOS PARA LAS SECCIONES 8-9 Y 8-10

8-77. Se estudia la fracción de circuitos integrados defectuosos producidos en un proceso de fotolitografía. Para ello se somete a prueba una muestra de 300 circuitos, en la que 13 son defectuosos. Utilice los datos para probar H_0: $p = 0.05$ contra H_1: $p \neq 0.05$. Utilice $\alpha = 0.05$. Encuentre el valor P para esta prueba.

8-78. Considere los datos de circuitos defectuosos del ejercicio 8-77. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la fracción de unidades defectuosas producidas es menor que 0.05, utilizando $\alpha = 0.05$? Encuentre el valor P de esta prueba.

8-79. Un artículo publicado en *Fortune* (septiembre 21 de 1992) afirma que casi la mitad de todos los ingenieros continúan sus estudios académicos después de obtener la licenciatura, lo que los lleva, a fin de cuentas, a recibir un grado de maestro o un doctorado. El ejercicio 7-64 presenta datos de un artículo publicado en *Engineering Horizons* (primavera de 1990), donde se indica que 117 de 484 recién graduados planean continuar con sus estudios. ¿Los datos publicados en *Engineering Horizons* son consistentes con los publicados en *Fortune*? Utilice $\alpha = 0.05$ para llegar a una conclusión. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-80. Un fabricante de lentes intraoculares evalúa una nueva máquina pulidora. El fabricante aprobará la máquina si el porcentaje de lentes pulidos que contienen defectos en la superficie no es mayor del 2%. Se toma una muestra aleatoria de 250 lentes y se encuentra que seis de ellos tienen defectos.

a. Proponga y pruebe un conjunto apropiado de hipótesis para determinar si la máquina será aceptada. Utilice $\alpha = 0.05$.

b. Encuentre el valor P para la prueba del inciso a).

c. Suponga que si el porcentaje verdadero de lentes defectuosos es mayor que 0.05, el procedimiento de prueba debe detectar esto con una probabilidad de al menos 0.9. ¿Resulta adecuado para este fin utilizar un tamaño de muestra $n = 250$? Utilice $\alpha = 0.05$.

8-81. Un investigador afirma que al menos el 10% de los cascos de fútbol tienen defectos de fabricación que pueden provocar daños a quien los usa. Una muestra de 200 cascos revela que 16 de ellos contienen tales defectos. ¿Este hallazgo apoya la afirmación del investigador? Utilice $\alpha = 0.01$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-82. Se utilizan dos máquinas diferentes de moldeo por inyección para la fabricación de piezas de plástico. Una pieza se considera defectuosa si tiene un encogimiento excesivo o si le falta color. Se toman dos muestras aleatorias, cada una de tamaño 300, y se encuentran 15 piezas defectuosas en la muestra de la máquina 1, mientras que sólo ocho en la muestra de la máquina 2. ¿Es razonable concluir que ambas máquinas producen la misma fracción de partes defectuosas, utilizando $\alpha = 0.05$? Encuentre el valor P de esta prueba.

8-83. Considere la situación descrita en el ejercicio 8-82. Suponga que $p_1 = 0.05$ y $p_2 = 0.01$. Determine el tamaño de la muestra necesario para detectar esta diferencia con una probabilidad de al menos 0.9. Utilice $\alpha = 0.05$.

8-84. Considere la situación descrita en el ejercicio 8-82. ¿Qué tamaño de muestra se requiere si se desea detectar $p_1 = 0.05$ y $p_2 = 0.02$, con una probabilidad de al menos 0.9?

8-85. En una muestra aleatoria de 500 adultos residentes en cierto condado, se encuentra que 385 están a favor de aumentar el límite de velocidad en las autopistas a 70 mph, mientras que en otra muestra de 400 adultos residentes en un condado vecino se encuentra que 267 están a favor del aumento del límite de velocidad. ¿Estos datos indican que existe una diferencia en el apoyo al aumento del límite de velocidad entre los residentes de ambos condados? Utilice $\alpha = 0.05$ para llegar a una conclusión. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-11 PRUEBA DE BONDAD DEL AJUSTE

Los procedimientos de prueba de hipótesis que se han presentado en las secciones anteriores están diseñados para problemas en los que se conoce la población o distribución de probabilidad, y la hipótesis involucra los parámetros de la distribución. A menudo se encuentra otra clase de hipótesis: no se sabe cuál es la distribución de la población, y se desea probar la hipótesis de que una distribución en particular será un modelo satisfactorio de la población. Por ejemplo, tal vez se quiera probar la hipótesis de que la población es normal.

En esta sección se describe una procedimiento de prueba formal de la bondad del ajuste basada en la distribución ji-cuadrada. También se presenta una técnica gráfica muy útil denominada **gráfica de probabilidad**.

8-11.1 Prueba ji-cuadrada de bondad del ajuste

El procedimiento de prueba requiere una muestra aleatoria de tamaño n proveniente de la población cuya distribución de probabilidad es desconocida.[2] Estas n observaciones se acomodan en un histograma de frecuencia, el cual tiene k intervalos de clase. Sea O_i la frecuencia observada en el i-ésimo intervalo de clase. De la distribución de probabilidad propuesta, se calcula la frecuencia esperada en el i-ésimo intervalo de clase, la cual se denota por E_i. El estadístico de prueba es

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (8\text{-}106)$$

Puede demostrarse que, si la población sigue la distribución propuesta, X_0^2 tiene, de manera aproximada, una distribución ji-cuadrada con $k - p - 1$ grados de libertad, donde p representa el número de parámetros de la distribución propuesta estimada por los estadísticos muestrales. Esta aproximación mejora a medida que n aumenta. Debe rechazarse la hipótesis de que la distribución de la población es la distribución propuesta, si el valor calculado del estadístico de prueba es $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,k-p-1}$.

[2] La prueba ji-cuadrada de bondad del ajuste es sólo uno de los muchos procedimientos utilizados para tal fin. Cuando se trabaja con distribuciones continuas, la prueba ji-cuadrada tal vez no sea el mejor procedimiento. Sin embargo, dada su gran disponibilidad en los paquetes de software estadísticos, es necesario que los ingenieros se familiaricen con este procedimiento.

Tabla 8-6 Datos del ejemplo 8-22

											Total
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	n
Frecuencia observada, o_i	94	93	112	101	104	95	100	99	108	94	1000
Frecuencia esperada, E_i	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1000

Un aspecto que debe notarse en la aplicación de este procedimiento de prueba es el relacionado con la magnitud de las frecuencias esperadas. Si estas frecuencias son muy pequeñas, entonces el estadístico de prueba X_0^2 no reflejará el alejamiento entre lo observado y lo esperado, sino sólo la pequeña magnitud de las frecuencias esperadas. No hay ningún acuerdo general con respecto al valor mínimo de las frecuencias esperadas, pero los valores 3, 4 y 5 son los que más se utilizan como mínimos. Algunos autores sugieren que la frecuencia esperada puede ser tan pequeña como 1 o 2, con tal de que muchas de ellas sean mayores que 5. Si se espera que una frecuencia sea demasiado pequeña, entonces puede combinarse con la frecuencia esperada en un intervalo de clase adyacente. Las frecuencias observadas correspondientes también se combinan, por lo que k debe disminuirse en uno. No es necesario que los intervalos de clase tengan el mismo ancho.

A continuación se proporcionan tres ejemplos del procedimiento de prueba.

EJEMPLO 8-22

Distribución especificada de manera completa

Un científico de la computación ha desarrollado un algoritmo para generar enteros seudoaleatorios sobre el intervalo 0 a 9. El científico codifica el algoritmo y genera 1000 dígitos seudoaleatorios. La tabla 8-6 contiene los datos como frecuencias observadas. ¿Existe evidencia de que el generador de números aleatorios funciona de manera correcta? Utilice $\alpha = 0.05$.

Si el generador de números aleatorios está trabajando correctamente, entonces los valores 0-9 deben tener una distribución discreta uniforme, lo que implica que cada uno de los enteros debe presentarse exactamente 100 veces. Por tanto, las frecuencias esperadas son $E_i = 100$, para $i = 0, 1, \ldots, 9$. Estas frecuencias esperadas también aparecen en la tabla 8-6. Puesto que estas frecuencias esperadas pueden obtenerse sin estimar ningún parámetro a partir de los datos muestrales, el estadístico ji-cuadrada de bondad del ajuste de la ecuación 8-106 tendrá $k - p - 1 = 10 - 1 = 9$ grados de libertad.

Ahora se aplica el procedimiento de ocho pasos de la prueba de hipótesis para resolver este problema.

1. La variable de interés es la forma de la distribución de los enteros seudoaleatorios sobre el intervalo 0 a 9.
2. H_0: La forma de la distribución es la distribución uniforme discreta.
3. H_1: La forma de la distribución no es la distribución uniforme discreta.
4. $\alpha = 0.05$
5. El estadístico de prueba es

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}$$

6. Rechazar H_0 si $\chi_0^2 > \chi^2_{0.05,9} = 16.92$
7. Cálculos: Al utilizar las frecuencias observadas y esperadas de la tabla 8-3, se tiene que

$$\begin{aligned}\chi_0^2 &= \sum_{i=1}^{10} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}\\ &= \frac{(94 - 100)^2}{100} + \frac{(93 - 100)^2}{100} + \cdots + \frac{(94 - 100)^2}{100}\\ &= 3.72\end{aligned}$$

8. Conclusiones: Puesto que $\chi_0^2 = 3.72 < \chi^2_{0.05,9} = 16.92$, no es posible rechazar la hipótesis de que los datos provienen de una distribución uniforme discreta. Por consiguiente, parece ser que el generador de números aleatorios trabaja de manera satisfactoria. El valor P para $\chi_0^2 = 3.72$ es $P = 0.929$ (obtenido con una calculadora HP-48).

EJEMPLO 8-23

Distribución discreta

Se propone que el número de defectos en las tarjetas de circuito impreso sigue una distribución Poisson. Se reúne una muestra aleatoria de $n = 60$ tarjetas de circuito impreso y se observa el número de defectos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Número de defectos	Frecuencia observada
0	32
1	15
2	9
3	4

La media de la distribución Poisson propuesta en este ejemplo es desconocida y debe estimarse a partir de los datos contenidos en la muestra. La estimación del número promedio de defectos por tarjeta es el promedio muestral, esto es, $(32 \times 0 + 15 \times 1 + 9 \times 2 + 4 \times 3)/60 = 0.75$. A partir de la distribución Poisson con parámetro 0.75, puede calcularse p_i, que es la probabilidad hipotética asociada con el i-ésimo intervalo de clase. Puesto que cada intervalo de clase corresponde a un número particular de defectos, puede hallarse p_i de la siguiente manera:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{e^{-0.75}(0.75)^0}{0!} = 0.472$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{e^{-0.75}(0.75)^1}{1!} = 0.354$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{e^{-0.75}(0.75)^2}{2!} = 0.133$$

$$p_4 = P(X \geq 3) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0.041$$

Las frecuencias esperadas se calculan multiplicando el tamaño de la muestra $n = 60$ por las probabilidades p_i. Esto es, $E_i = np_i$. A continuación se proporcionan las frecuencias esperadas.

Número de defectos	Probabilidad	Frecuencia esperada
0	0.472	28.32
1	0.354	21.24
2	0.133	7.98
3 (o más)	0.041	2.46

Puesto que la frecuencia esperada en la última celda es menor que 3, se combinan las dos últimas celdas:

Número de defectos	Frecuencia observada	Frecuencia esperada
0	32	28.32
1	15	21.24
2 (o más)	13	10.44

La estadística de prueba ji-cuadrada de la ecuación 8-106 tiene $k - p - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$ grado de libertad, debido a que la media de la distribución Poisson fue estimada a partir de los datos.

Ahora puede aplicarse el procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis, utilizando $\alpha = 0.05$, de la manera siguiente:

1. La variable de interés es la forma de la distribución de los defectos en las tarjetas de circuito impreso.
2. H_0: La forma de la distribución de los defectos es Poisson.
3. H_1: La forma de la distribución de los defectos no es Poisson.
4. $\alpha = 0.05$
5. El estadístico de prueba es

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}$$

6. Se rechaza H_0 si $\chi_0^2 > \chi_{0.05,1}^2 = 3.84$.
7. Cálculos:

$$\chi_0^2 = \frac{(32 - 28.32)^2}{28.32} + \frac{(15 - 21.24)^2}{21.24} + \frac{(13 - 10.44)^2}{10.44} = 2.94$$

8. Conclusiones: Como $\chi_0^2 = 2.94 < \chi_{0.05,1}^2 = 3.84$, no es posible rechazar la hipótesis nula de que la distribución de los defectos en las tarjetas de circuito impreso es

Poisson. El valor P de la prueba es $P = 0.0864$. (Este valor se obtuvo con una calculadora HP-48.)

EJEMPLO 8-24

Distribución continua

Un ingeniero del departamento de manufactura prueba la fuente de alimentación utilizada en una computadora portátil. Con $\alpha = 0.05$, desea determinar si el voltaje de salida está descrito de manera adecuada por una distribución normal. A partir de una muestra aleatoria de $n = 100$ unidades, obtiene las estimaciones muestrales de la media y la desviación estándar $\bar{x} = 5.04$ V y $s = 0.08$ V.

Una práctica común en la construcción de intervalos de clase para la distribución de frecuencia empleada en la prueba ji-cuadrada de bondad del ajuste, es seleccionar los límites de las clases de modo que las frecuencias esperadas $E_i = np_i$ sean iguales para todas las celdas. Para utilizar este método, se desea escoger las fronteras de las celdas $a_0, a_1, \ldots, a_k$ para las k clases, de modo que todas las probabilidades

$$p_i = P(a_{i-1} \leq X \leq a_i) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\, dx$$

sean iguales. Supóngase que se decide utilizar $k = 8$ celdas. Para la distribución normal estándar, los intervalos que dividen la escala en ocho segmentos igualmente probables son $[0, 032)$, $[0.32, 0.675)$, $[0.675, 1.15)$ y $[1.15, \infty)$ junto con sus cuatro "imágenes especulares" que están del otro lado del cero. Para cada intervalo $p_i = 1/8 = 0.125$, de modo que las frecuencias esperadas de las celdas son $E_i = np_i = 100(0.125) = 12.5$. La tabla completa de frecuencias observadas y esperadas es la siguiente:

Intervalo de clase	Frecuencia observada o_i	Frecuencia esperada E_i
$x < 4.948$	12	12.5
$4.948 \leq x < 4.986$	14	12.5
$4.986 \leq x < 5.014$	12	12.5
$5.014 \leq x < 5.040$	13	12.5
$5.040 \leq x < 5.066$	12	12.5
$5.066 \leq x < 5.094$	11	12.5
$5.094 \leq x < 5.132$	12	12.5
$5.132 \leq x$	14	12.5
Totales	100	100

La frontera del primer intervalo de clase es $\bar{x} - 1.15s = 4.948$. El segundo intervalo de clase es $[\bar{x} - 1.15s,\ \bar{x} - 0.675s)$ y así sucesivamente. Ahora puede aplicarse al problema el procedimiento de ocho pasos para la prueba de hipótesis.

1. La variable de interés es la forma de la distribución del voltaje de la fuente de alimentación.
2. H_0: La forma de la distribución es normal.
3. H_1: La forma de la distribución no es normal.
4. $\alpha = 0.05$

5. El estadístico de prueba es

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}$$

6. Como se han estimado los dos parámetros de la distribución normal, el estadístico ji-cuadrada anterior tiene $k - p - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$ grados de libertad. Por tanto, se rechaza H_0 si $\chi_0^2 > \chi_{0.05,5}^2 = 11.07$.

7. Cálculos:

$$\begin{aligned}\chi_0^2 &= \sum_{i=1}^{8} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} \\ &= \frac{(12 - 12.5)^2}{12.5} + \frac{(14 - 12.5)^2}{12.5} + \cdots + \frac{(14 - 12.5)^2}{12.5} \\ &= 0.64\end{aligned}$$

8. Conclusiones: Como $\chi_0^2 = 0.64 < \chi_{0.05,5}^2 = 11.07$, no es posible rechazar H_0, por lo que no hay evidencia fuerte que indique que el voltaje de salida no esté distribuido de manera normal. El valor P para el estadístico ji-cuadrada $\chi_0^2 = 0.64$ es $P = 0.9861$.

8-11.2 Gráfica de probabilidad

Los métodos gráficos también son útiles cuando se elige una distribución de probabilidad para describir una población. La **gráfica de probabilidad** es un método gráfico para determinar si los datos muestrales se ajustan a una distribución propuesta con base en un examen visual subjetivo de los datos. El procedimiento general es muy sencillo y puede efectuarse con rapidez. La gráfica de probabilidad hace uso de un papel especial, conocido como **papel de probabilidad**, el cual ha sido diseñado para la distribución propuesta. Hay papel de este tipo disponible para distribuciones normal, lognormal, Weibull y varias distribuciones ji-cuadrada y gamma.

Para construir una gráfica de probabilidad, primero se clasifican las observaciones en la muestra, de menor a mayor. Esto es, la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se acomoda como $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, donde $x_{(1)}$ es la observación más pequeña, $x_{(2)}$ es la segunda observación más pequeña, y así sucesivamente, con $x_{(n)}$ como la observación más grande. Después de esto, las observaciones ordenadas $x_{(j)}$ se grafican contra su frecuencia acumulada observada $(j - 0.5)/n$ sobre el papel de probabilidad apropiado. Si la distribución propuesta describe de manera adecuada los datos, los puntos de la gráfica se ubicarán de manera aproximada a lo largo de una línea recta; si los puntos se desvían significativamente de una línea recta, entonces el modelo propuesto no es el apropiado. Habitualmente, la determinación de si la gráfica de los datos es o no una línea recta, es subjetiva. El procedimiento se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8-25

Las siguientes son diez observaciones sobre la duración efectiva, en minutos, de las baterías utilizadas en una computadora portátil: 176, 191, 214, 220, 205, 192, 201, 190, 183,

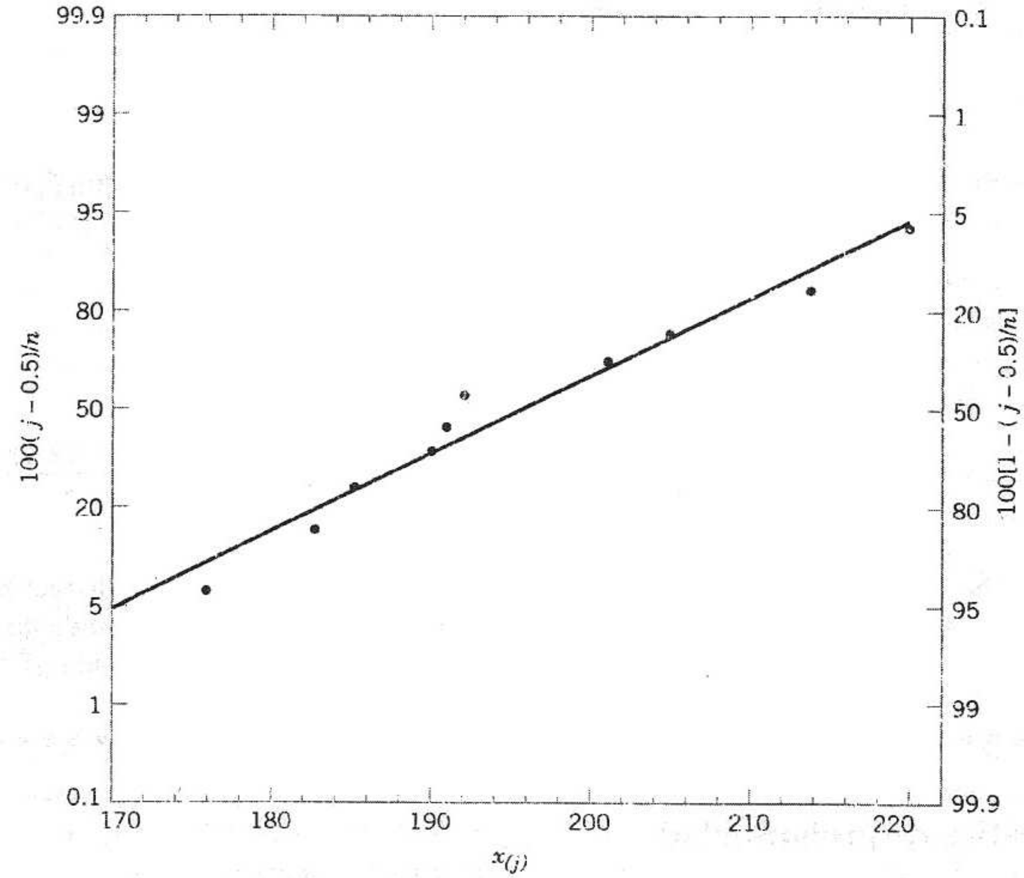


Figura 8-10 Gráfica de probabilidad normal, ejemplo 8-25.

185. Se hace la propuesta de que la duración de la batería está modelada adecuadamente por una distribución normal. Para utilizar la gráfica de probabilidad con la finalidad de investigar la hipótesis, primero se acomodan las observaciones en orden ascendente y se calculan sus frecuencias acumuladas $(j - 0.5)/10$ como sigue:

j	$x_{(j)}$	$(j - 0.5)/10$
1	176	0.05
2	183	0.15
3	185	0.25
4	190	0.35
5	191	0.45
6	192	0.55
7	201	0.65
8	205	0.75
9	214	0.85
10	220	0.95

Los pares de valores $x_{(j)}$ y $(j - 0.5)/10$ se grafican en un papel de probabilidad normal. Esta gráfica aparece en la figura 8-10. Muchas gráficas en papel de probabilidad normal, dibujan $100(j - 0.5)/n$ en la escala vertical izquierda, y $100[1 - (j - 0.5)/n]$ en la escala vertical derecha, con el valor de la variable graficado sobre la escala horizontal. Tiene que dibujarse una línea recta, seleccionada de manera subjetiva, que pase a través de los puntos de la gráfica. Al dibujar esta línea, debe hacerse más caso de los puntos que están en la parte media de la gráfica, que de los que se encuentran en los extremos. Una buena regla es dibujar la línea entre los puntos que corresponden a los percentiles 25 y 75. Ésta es la forma en que se obtuvo la gráfica de la figura 8-10. Al evaluar la "cercanía" de los puntos a la línea recta, es bueno imaginar un "lápiz grueso" sobre la recta. Si todos los puntos son cubiertos por este lápiz imaginario, entonces la distribución normal describe de manera adecuada los datos. Puesto que los puntos de la figura 8-10 pasan la prueba del "lápiz grueso", puede concluirse que la distribución normal es un modelo apropiado.

Puede obtenerse una estimación de la media y la desviación estándar directamente a partir de la gráfica de probabilidad normal. La media se estima como el percentil 50 sobre la gráfica de probabilidad, mientras que la estimación de la desviación estándar es la diferencia entre los percentiles 84 y 50. Para ilustrar el uso de la gráfica de probabilidad normal de la figura 8-10, se observa que el percentil 50 es aproximadamente 196 minutos, así que la estimación de la duración promedio es $\hat{\mu} = 196$ minutos. El percentil 84 es 212 minutos (de manera aproximada), así que la estimación de la desviación estándar de la duración es $\hat{\sigma} = 212 - 196 = 16$ minutos.

También es posible construir una gráfica de probabilidad normal sobre papel ordinario graficando los puntajes normales estandarizados z_j contra $x_{(j)}$, donde los puntajes normales estandarizados satisfacen

$$\frac{j - 0.5}{n} = P(Z \leq z_j) = \Phi(z_j)$$

Por ejemplo, si $(j - 0.5)/n = 0.05$, entonces $\Phi(z_j) = 0.05$ implica que $z_j = -1.64$. Para ilustrar esto, considérense los datos del ejemplo 8-25. En la tabla que sigue aparecen los puntajes normales estandarizados en la última columna.

j	$x_{(j)}$	$(j - 0.5)/10$	z_j
1	176	0.05	−1.64
2	183	0.15	−1.04
3	185	0.25	−0.67
4	190	0.35	−0.39
5	191	0.45	−0.13
6	192	0.55	0.13
7	201	0.65	0.39
8	205	0.75	0.67
9	214	0.85	1.04
10	220	0.95	1.64

La figura 8-11 presenta la gráfica de z_j contra $x_{(j)}$. Esta gráfica de probabilidad normal es equivalente a la de la figura 8-10.

Una aplicación muy importante de las gráficas de probabilidad normal es la *verificación de hipótesis* cuando se emplean procedimientos de inferencia estadística que requieren

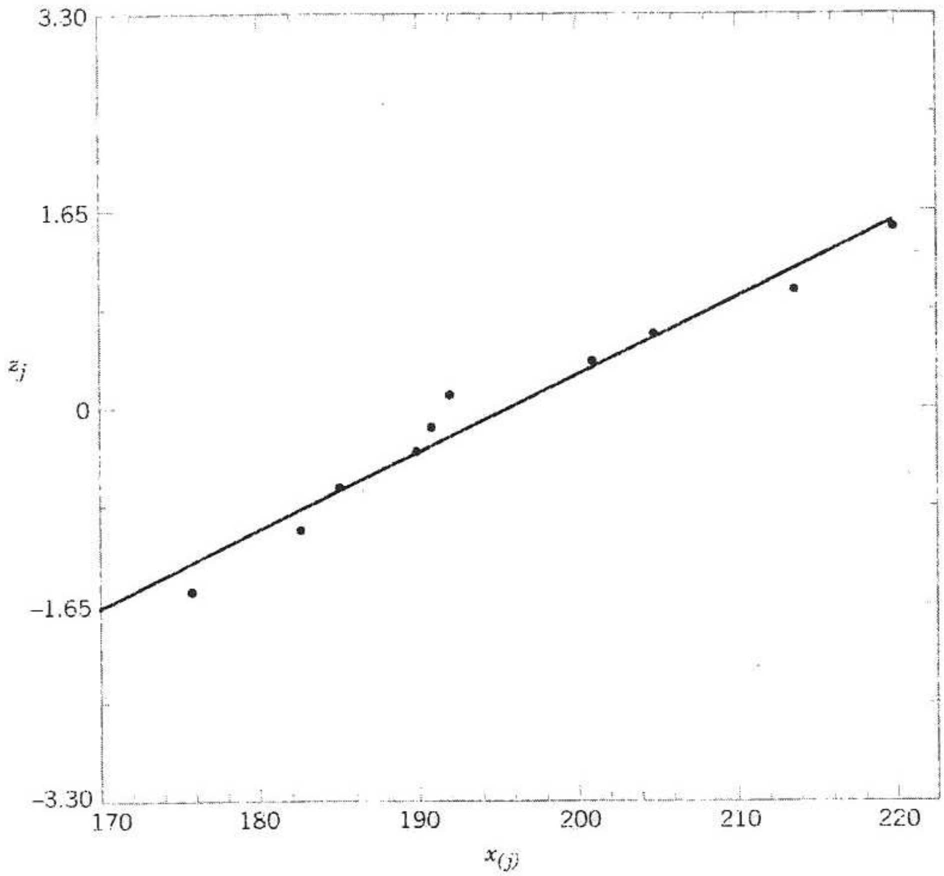


Figura 8-11 Gráfica de probabilidad normal.

la hipótesis de normalidad. Por ejemplo, considere la prueba de los datos de resistencia a la adhesión del ejemplo 8-8. Ahí, se utiliza una prueba t para una muestra para investigar una hipótesis sobre la carga promedio de falla. (Se prueba H_0: $\mu = 10$ contra H_1: $\mu > 10$.) La prueba t requiere la suposición de que los datos provienen de una distribución normal.

La figura 8-12 es una gráfica de probabilidad normal (generada por el paquete Statgraphics) de las 22 observaciones de carga al momento de la falla del ejemplo 8-8. Nótese que la gráfica no da ninguna indicación de que la hipótesis de una distribución normal sea inapropiada. Claro está, que los alejamientos moderados de la normalidad no afectan de manera seria la prueba t, pero una violación importante de esta hipótesis puede señalar la necesidad de utilizar otros métodos de análisis, tales como los métodos no paramétricos del capítulo 13.

La figura 8-13 presenta una gráfica de probabilidad normal (generada por NPLOT, un programa de distribución gratuita para dibujar gráficas de probabilidad normal) de las dos muestras de rendimiento obtenidas en el estudio del catalizador del ejemplo 8-10. Este programa permite dibujar la gráfica de varias muestras en una sola. Nótese que, para ambas muestras, la hipótesis de normalidad es razonable, y puesto que las dos líneas rectas tienen pendientes similares, es probable que las dos poblaciones tengan la misma varianza, así que el empleo de la prueba t para dos muestras, suponiendo $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, parece ser apropiado.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 8-11

8-86. Un grupo de estudiantes de ingeniería civil ha registrado el número de automóviles que transitan hacia el este en la intersección de dos avenidas, y obtienen los datos siguientes:

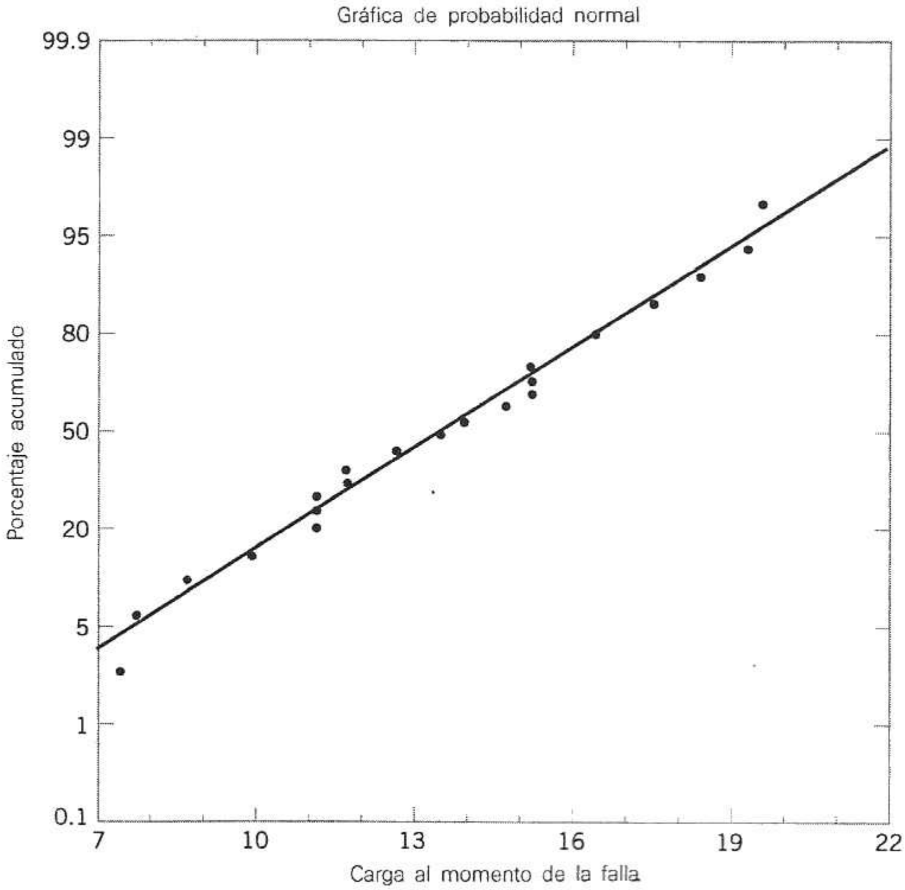


Figura 8-12 Gráfica de probabilidad normal (generada por el paquete Statgraphics) de los datos de carga al momento de la falla, del ejemplo 8-8.

Vehículos por minuto	Frecuencia observada	Vehículos por minuto	Frecuencia observada
40	14	53	102
41	24	54	96
42	57	55	90
43	111	56	81
44	194	57	73
45	256	58	64
46	296	59	61
47	378	60	59
48	250	61	50
49	185	62	42
50	171	63	29
51	150	64	18
52	110	65	15

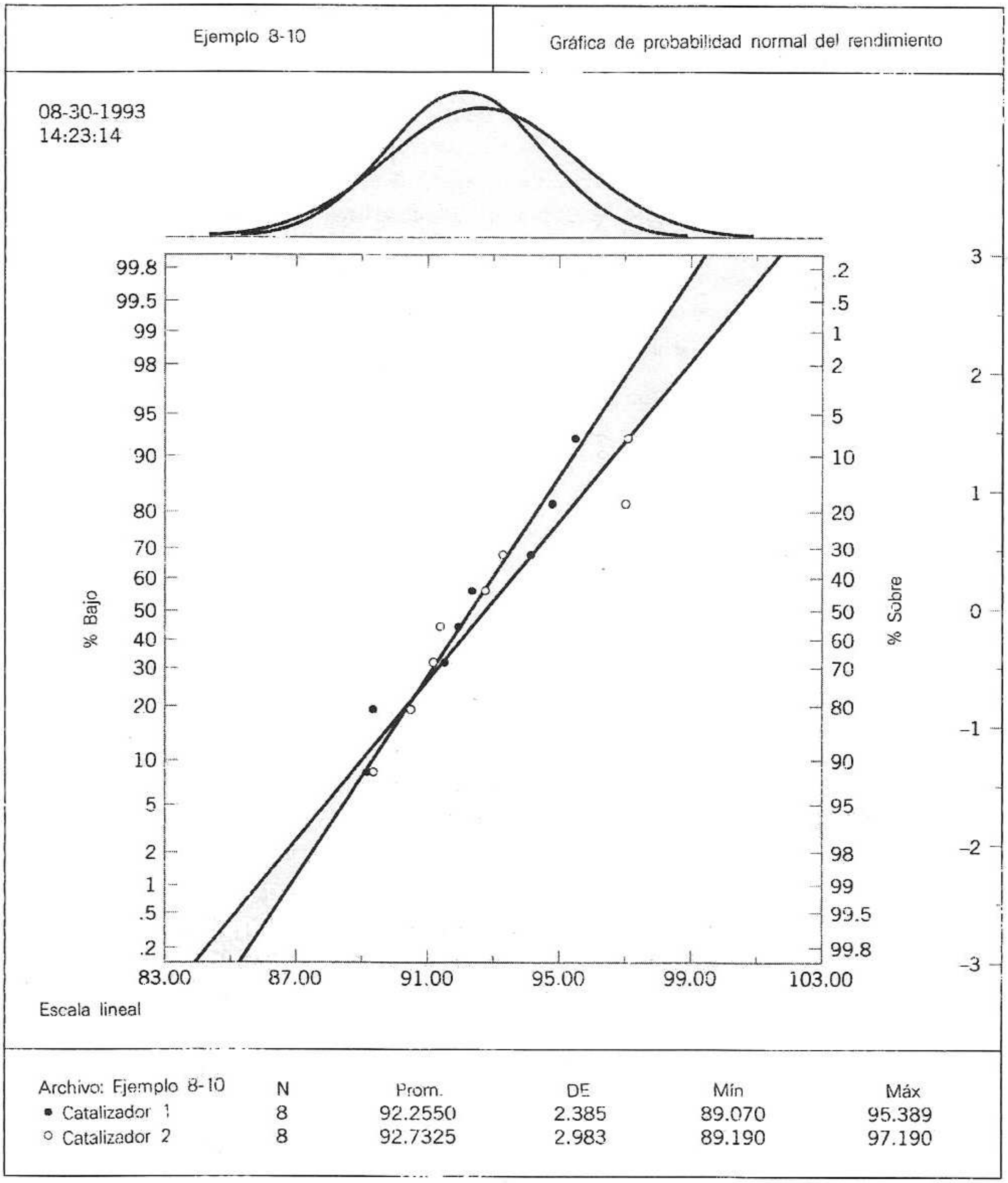


Figura 8-13 Gráfica de probabilidad normal de los datos de rendimiento del ejemplo 8-10.

a. Para este proceso, ¿la hipótesis de una distribución Poisson resulta ser un modelo de probabilidad apropiado? Utilice $\alpha = 0.05$.

b. Calcule el valor P de esta prueba.

8-87. Se diseña un generador de números seudoaleatorios de modo que los enteros 0 a 9 tengan la misma probabilidad de ocurrencia. Los primeros 10 mil números son:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
967	1008	975	1022	1003	989	1001	981	1043	1011

a. ¿El generador trabaja de manera apropiada? Utilice $\alpha = 0.01$.

b. Calcule el valor P de esta prueba.

8-88. Se observa y se anota la duración de un ciclo de una máquina automática.

Segundos	2.10	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15	2.16	2.17	2.18	2.19	2.20
Frecuencia	16	28	41	74	149	256	137	82	40	19	11

a. ¿La distribución normal parece ser un modelo de probabilidad razonable para la duración del ciclo? Utilice la prueba ji-cuadrada de bondad del ajuste, con $\alpha = 0.05$.

b. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-89. Un embotellador de refrescos estudia la resistencia a la presión interna en botellas de vidrio de un litro. Para ello somete a prueba una muestra aleatoria de 16 botellas y se obtienen los datos de resistencia a la presión que aparecen en la siguiente tabla. Haga una gráfica de ellos en papel de probabilidad normal. ¿Parece razonable concluir que la resistencia a la presión tiene una distribución normal?

226.16 psi	211.14 psi
202.20	203.62
219.54	188.12
193.73	224.39
208.15	221.31
195.45	204.55
193.71	202.21
200.81	201.63

8-90. De dos máquinas se toman muestras de 20 piezas, y se mide una dimensión importante en cada una de ellas. Los datos obtenidos aparecen a continuación. Haga la gráfica de los datos en papel de probabilidad normal. ¿Esta dimensión parece tener una distribución normal? ¿A qué conclusiones tentativas puede llegarse sobre las dos máquinas?

Máquina 1				**Máquina 2**			
99.4	101.5	102.3	96.7	90.9	100.7	95.0	98.8
99.1	103.8	100.4	100.9	99.6	105.5	92.3	115.5
99.0	99.6	102.5	96.5	105.9	104.0	109.5	87.1
98.9	99.4	99.7	103.1	91.2	96.5	96.2	109.8
99.6	104.6	101.6	96.8	92.8	106.7	97.6	106.5

8-91. Después de examinar los datos de las dos máquinas del ejercicio 8-90, el ingeniero de procesos concluye que la máquina 2 tienen una variabilidad mayor de una pieza a otra. El ingeniero hace algunos ajustes a la máquina que disminuirán la variabilidad y toma otra muestra de 20 piezas. Las mediciones de estas piezas se muestran a continuación. Haga una gráfica con estos datos sobre papel de probabilidad normal y compárela con las gráficas de probabilidad normal del ejercicio 8-90. ¿A qué conclusiones puede llegar?

103.4	107.0	107.7	104.5
108.1	101.5	106.2	106.6
103.1	104.1	106.3	105.6
108.2	106.9	107.8	103.7
103.9	103.3	107.4	102.6

8-92. Se prueba la duración de un componente electrónico bajo condiciones de temperatura aita para acelerar el mecanismo de falla. A continuación se proporciona el tiempo de falla (en horas) de 20 componentes seleccionados al azar. Haga una gráfica de los datos sobre papel de probabilidad normal. ¿El tiempo de falla parece tener una distribución normal?

176.1	35.3	124.5	90.6	99.6	150.4	55.0	34.9	46.0	40.4
79.6	24.7	155.7	2.42	131.5	197.6	73.0	122.8	133.8	40.4

8-93. Construya una gráfica de probabilidad normal para los datos de duración de llantas del ejercicio 8-33. ¿Parece razonable la hipótesis de normalidad?

8-94. Construya gráficas de probabilidad normal para los datos de rapidez de acción del ejercicio 8-41. ¿Parece razonable la hipótesis de normalidad para las dos poblaciones? ¿Parece razonable la hipótesis de varianzas iguales hecha en ese ejercicio?

8-95. Construya una gráfica de probabilidad normal para los datos de viscosidad del polímero del ejercicio 7-13. ¿Parece razonable la hipótesis de normalidad? ¿Cuál es su opinión sobre la hipótesis de que $\sigma = 20$ utilizada en ese ejercicio?

8-96. Construya gráficas de probabilidad normal para las dos muestras de datos de rendimiento de gasolina del ejercicio 8-45. ¿La hipótesis de normalidad parece razonable para las dos poblaciones? ¿Qué otras conclusiones tentativas pueden obtenerse a partir de la inspección de la gráfica?

8-12 PRUEBAS CON TABLAS DE CONTINGENCIA

En muchas ocasiones, los n elementos de una muestra tomada de una población pueden clasificarse de acuerdo con dos criterios diferentes. Por tanto, es interesante saber si los dos métodos de clasificación son estadísticamente independientes; por ejemplo, es posible considerar la población de estudiantes de ingeniería recién graduados y tal vez determinar si el

Tabla 8-7 Tabla de contingencia de $r \times c$

		Columnas			
		1	2	...	c
Renglones	1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1c}
	2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2c}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	r	O_{r1}	O_{r2}	...	O_{rc}

salario inicial depende de las disciplinas académicas de las que egresan. Supóngase que el primer método de clasificación tiene r niveles, y que el segundo tiene c niveles. Sea O_{ij} la frecuencia observada para el nivel i del primer método de clasificación y el nivel j del segundo método de clasificación. En general, los datos aparecerán como se muestra en la tabla 8-7. Una tabla de este tipo usualmente se conoce como **tabla de contingencia $r \times c$**.

El interés recae en probar la hipótesis de que los métodos de clasificación renglón-columna son independientes. Si se rechaza esta hipótesis, entonces se concluye que existe alguna interacción entre los dos criterios de clasificación. Los procedimientos de prueba exactos son difíciles de obtener, pero puede obtenerse un estadístico de prueba aproximado válido para n grande. Sea p_{ij} la probabilidad de que un elemento seleccionado al azar caiga en la ij-ésima celda, dado que las dos clasificaciones son independientes. Entonces, $p_{ij} = u_i v_j$, donde u_i es la probabilidad de que un elemento seleccionado al azar pertenezca al renglón de la clase i, y v_j es la probabilidad de que un elemento seleccionado pertenezca a la columna de la clase j. Ahora bien, si se supone independencia, los estimadores de u_i y v_j son

$$\hat{u}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{c} O_{ij}$$

$$\hat{v}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} O_{ij} \qquad \text{(8-107)}$$

Por tanto, la frecuencia esperada de cada celda es

$$E_{ij} = n\hat{u}_i\hat{v}_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{c} O_{ij}\sum_{i=1}^{r} O_{ij} \qquad \text{(8-108)}$$

Entonces, para n grande, el estadístico

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad \text{(8-109)}$$

tiene una distribución aproximada ji-cuadrada con $(r-1)(c-1)$ grados de libertad si la hipótesis nula es verdadera. Por consiguiente, la hipótesis de independencia debe rechazarse si el valor observado de la estadística de prueba χ_0^2 es mayor que $\chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)}$.

Tabla 8-8 Datos observados para el ejemplo 8-26

Clasificación del trabajo	Plan de pensión 1	2	3	Totales
Trabajadores asalariados	160	140	40	340
Trabajadores por horas	40	60	60	160
Totales	200	200	100	500

EJEMPLO 8-26

Una compañía tiene que escoger un plan de pensión de entre tres posibles. La gerencia desea saber si la preferencia por los planes es independiente de la clasificación del trabajo, con $\alpha = 0.05$. En la tabla 8-8 aparecen las opiniones de una muestra aleatoria de 500 empleados.

Para encontrar las frecuencias esperadas, primero se calcula $\hat{u}_1 = (340/500) = 0.68$, $\hat{u}_2 = (160/500) = 0.32$, $\hat{v}_1 = (200/500) = 0.40$, $\hat{v}_2 = (200/500) = 0.40$ y $\hat{v}_3 = (100/500) = 0.20$. Con esto pueden calcularse las frecuencias esperadas a partir de la ecuación 8-108. Por ejemplo, el número esperado de trabajadores asalariados que favorecen el plan de pensión 1 es

$$E_{11} = n\hat{u}_1\hat{v}_1 = 500(0.68)(0.40) = 136$$

Las frecuencias esperadas aparecen en la tabla 8-9.
Ahora puede aplicarse a este problema el procedimiento de prueba de hipótesis de ocho pasos.

1. La variable de interés es la preferencia de los empleados entre los planes de pensión.
2. H_0: La preferencia es independiente de la clasificación asalariado contra empleo por horas.
3. H_1: La preferencia no es independiente de la clasificación asalariado contra empleo por horas.
4. $\alpha = 0.05$
5. El estadístico de prueba es

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(o_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

6. Puesto que $r = 2$ y $c = 3$, los grados de libertad para la ji-cuadrada son $(r-1)(c-1) = (1)(2) = 2$, así que debe rechazarse H_0 si $\chi_0^2 > \chi^2_{0.05,2} = 5.99$.

Tabla 8-9 Frecuencias esperadas para el ejemplo 8-26

Clasificación del trabajo	Plan de pensión 1	2	3	Totales
Trabajadores asalariados	136	136	68	340
Trabajadores por horas	64	64	32	160
Totales	200	200	100	500

7. Cálculos:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(o_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$
$$= \frac{(160 - 136)^2}{136} + \frac{(140 - 136)^2}{136} + \frac{(40 - 68)^2}{68} + \frac{(40 - 64)^2}{64}$$
$$+ \frac{(60 - 64)^2}{64} + \frac{(60 - 32)^2}{32} = 49.63$$

8. Conclusiones: Como $\chi_0^2 = 49.63 > \chi_{0.05,2}^2 = 5.99$, se rechaza la hipótesis de independencia y se concluye que la preferencia por los planes de pensión no es independiente de la clasificación del trabajo. El valor P para $\chi_0^2 = 49.63$ es $P = 1.671 \times 10^{-11}$. (Este valor se obtuvo con una calculadora HP-48.)

El uso de la tabla de contingencia de dos clasificaciones para probar la independencia entre dos variables de clasificación en una muestra tomada de una sola población de interés, es sólo una de las aplicaciones de los métodos de tablas de contingencia. Otra situación común se presenta cuando existen r poblaciones de interés y cada una de ellas está dividida en las mismas c categorías. Luego se toma una muestra de la i-ésima población, y los conteos se introducen en las columnas apropiadas del i-ésimo renglón. En esta situación se desea investigar si las proporciones son o no las mismas en las c categorías de todas las poblaciones. La hipótesis nula de este problema establece que las poblaciones son *homogéneas* con respecto a las categorías. Por ejemplo, cuando existen sólo dos categorías, tales como éxito y fracaso, defectuoso y no defectuoso, etc., entonces la prueba de homogeneidad es en realidad una prueba sobre la igualdad de r parámetros binomiales. El cálculo de las frecuencias esperadas, la determinación de los grados de libertad y el cálculo de la estadística ji-cuadrada para la prueba de homogeneidad son idénticos a los de la prueba de independencia.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 8-12

8-97. Una compañía opera cuatro máquinas tres turnos al día. De los registros de producción, se obtienen los datos siguientes sobre el número de fallas:

	Máquinas			
Turno	*A*	*B*	*C*	*D*
1	41	20	12	16
2	31	11	9	14
3	15	17	16	10

Pruebe la hipótesis (con $\alpha = 0.05$) de que el número de fallas es independiente del turno. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-98. Los pacientes de un hospital son clasificados como quirúrgicos o ambulatorios. Se lleva un registro del número de veces que los pacientes requieren el servicio de enfermería durante la noche y si tienen o no el seguro Medicare. Los datos son los siguientes:

	Clasificación del paciente	
Medicare	Quirúrgico	Ambulatorio
Si	46	52
No	36	43

Pruebe la hipótesis (con $\alpha = 0.01$) de que las solicitudes de atención de ambas clases de pacientes son independientes del hecho de que cuenten o no con el seguro Medicare. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-99. De un grupo de estudiantes se toman al mismo tiempo las calificaciones que éstos obtienen en un curso de estadística y en otro de investigación de operaciones. Los resultados son los siguientes:

	Calificaciones de investigación de operaciones			
Calificaciones de estadística	*A*	*B*	*C*	Otras
A	25	6	17	13
B	17	16	15	6
C	18	4	18	10
Otras	10	8	11	20

¿Existe alguna relación entre las calificaciones de los cursos de estadística e investigación de operaciones? Utilice $\alpha = 0.01$ para llegar a una conclusión. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-100. Un experimento con proyectiles de artillería proporciona los datos siguientes sobre las características de las deflexiones y rangos laterales. ¿Puede concluirse que el rango y la deflexión son independientes? Utilice $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

	Deflexión lateral		
Rango (yardas)	Izquierda	Normal	Derecha
0–1 999	6	14	8
2 000–5 999	9	11	4
6 000–11 999	8	17	6

8-101. Se efectúa un estudio sobre las fallas de un componente electrónico. Existen cuatro tipos de fallas posibles y dos posiciones de montaje para el dispositivo. Se toman los datos siguientes:

	Tipo de falla			
Posición de montaje	*A*	*B*	*C*	*D*
1	22	46	18	9
2	4	17	6	12

¿Puede concluirse que el tipo de falla es independiente de la posición de montaje? Utilice $\alpha = 0.01$. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-102. Se toma una muestra de estudiantes y se les pide su opinión en cuanto a una propuesta de cambio en el plan de estudios. Los resultados son los siguientes:

	Opinión	
Clase	A favor	En contra
Primer año	120	80
Segundo año	70	130
Tercer año	60	70
Cuarto año	40	60

Pruebe la hipótesis de que la opinión con respecto al cambio es independiente del nivel de la clase. Utilice $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-13 TABLA RESUMEN DE PROCEDIMIENTOS PARA LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

La tabla 8-10 presenta un resumen de los procedimientos de prueba de hipótesis estudiados en este capítulo. La tabla contiene el planteamiento de la hipótesis nula, el estadístico de prueba, distintas hipótesis alternativas y los criterios asociados para el rechazo de H_0, así como los parámetros para las curvas características de operación.

Ejercicios complementarios

8-103. Se somete a prueba una muestra de 30 dispositivos para la medición de flujo utilizados para la administración intravenosa de medicamentos. La rapidez de flujo de prueba es 200 ml/h. La media muestral observada es de 194 ml/h, mientras que la desviación estándar muestral es 12 ml/h. ¿Sugieren estos datos que la rapidez de flujo real es diferente de la utilizada para la prueba? Pruebe esta hipótesis con $\alpha = 0.05$.

8-104. Suponga que en el ejercicio 8-103 el experimentador consideró que $\sigma = 10$ antes de recolectar los datos. Si él desea que la probabilidad β del error tipo II 0.05 y si la rapidez de flujo

Tabla 8-10 Resumen de procedimientos para la prueba de hipótesis

Caso	Hipótesis nula	Estadístico de prueba	Hipótesis alternativa	Criterios para el rechazo	Parámetro de la curva CO	Curva CO del diagrama IV del apéndice
1.	H_0: $\mu = \mu_0$ σ^2 conocida	$z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	H_1: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0\rvert > z_{\alpha/2}$	$d = \lvert\mu - \mu_0\rvert/\sigma$	a, b
			H_1: $\mu > \mu_0$	$z_0 > z_\alpha$	$d = (\mu - \mu_0)/\sigma$	c, d
			H_1: $\mu < \mu_0$	$z_0 < -z_\alpha$	$d = (\mu_0 - \mu)/\sigma$	c, d
2.	H_0: $\mu = \mu_0$ σ^2 desconocida	$t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	H_1: $\mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0\rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	$d = \lvert\mu - \mu_0\rvert/\sigma$	e, f
			H_1: $\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$	$d = (\mu - \mu_0)/\sigma$	g, h
			H_1: $\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$	$d = (\mu_0 - \mu)/\sigma$	g, h
3.	H_0: $\mu_1 = \mu_2$ σ_1^2 y σ_2^2 conocidas	$z_0 = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert z_0\rvert > z_{\alpha/2}$	$d = \lvert\mu_1 - \mu_2\rvert/\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	a, b
			H_1: $\mu_1 > \mu_2$	$z_0 > z_\alpha$	$d = (\mu_1 - \mu_2)/\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	c, d
			H_1: $\mu_1 < \mu_2$	$z_0 < -z_\alpha$	$d = (\mu_2 - \mu_1)/\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	c, d
4.	H_0: $\mu_1 = \mu_2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocidas	$t_0 = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert t_0\rvert > t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}$	$d = \lvert\mu - \mu_0\rvert/2\sigma$	e, f
			H_1: $\mu_1 > \mu_2$	$t_0 > t_{\alpha,n_1+n_2-2}$	$d = (\mu - \mu_0)/2\sigma$	g, h
			H_1: $\mu_1 < \mu_2$	$t_0 < -t_{\alpha,n_1+n_2-2}$	$d = (\mu_0 - \mu)/2\sigma$	g, h
5.	H_0: $\mu_1 = \mu_2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ desconocidas	$t_0 = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert t_0\rvert > t_{\alpha/2,\nu}$	—	—
		$\nu = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$	H_1: $\mu_1 > \mu_2$	$t_0 > t_{\alpha,\nu}$	—	—
			H_1: $\mu_1 < \mu_2$	$t_0 < -t_{\alpha,\nu}$	—	—

6.	Datos pareados	$t_0 = \dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$	$H_1: \mu_d \neq 0$	$\lvert t_0\rvert > t_{\alpha/2,n-1}$	—	—
	$H_0: \mu_D = 0$		$H_1: \mu_d > 0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$	—	—
			$H_1: \mu_d < 0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$	—	—
7.	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ or $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$	$\lambda = \sigma/\sigma_0$	i, j
3			$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$	$\lambda = \sigma/\sigma_0$	k, l
			$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$	$\lambda = \sigma/\sigma_0$	m, n
8.	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$f_0 = s_1^2/s_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ or $f_0 < f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$	$\lambda = \sigma_1/\sigma_2$	o, p
			$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$	$\lambda = \sigma_1/\sigma_2$	q, r
9.	$H_0: p = p_0$	$z_0 = \dfrac{x - np}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$	$H_1: p \neq p_0$	$\lvert z_0\rvert > z_{\alpha/2}$	—	—
			$H_1: p > p_0$	$z_0 > z_\alpha$	—	—
			$H_1: p < p_0$	$z_0 < -z_\alpha$	—	—
10.	$H_0: p_1 = p_2$	$z_0 = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left[\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right]}}$	$H_1: p_1 \neq p_2$	$\lvert z_0\rvert > z_{\alpha/2}$	—	—
			$H_1: p_1 > p_2$	$z_0 > z_\alpha$	—	—
			$H_1: p_1 < p_2$	$z_0 < -z_\alpha$	—	—

promedio real es 195 ml/h, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra que tiene que utilizar? Utilice $\alpha = 0.05$.

8-105. En un laboratorio se mide la altura de la espuma de un champú utilizando una muestra aleatoria $n = 10$. La altura promedio en la muestra es $\bar{x} = 220$ mm, y se sabe de la experiencia previa con el procedimiento de prueba que $\sigma = 8$ mm.

a. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la altura promedio de la espuma es mayor que 200 mm? Utilice $\alpha = 0.01$.

b. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

c. Si la altura promedio real de la espuma es $\mu = 205$ mm, ¿cuál es el valor de β para este procedimiento de prueba?

d. Suponga que antes de efectuar el experimento, el responsable del mismo desea elegir un tamaño de muestra de modo que si la altura promedio real de la espuma es mayor o igual que 210 mm, la probabilidad de rechazar H_0: $\mu = 200$ mm sea de al menos 0.8. ¿Qué tamaño de muestra debe emplear para tal fin? Utilice $\alpha = 0.01$.

8-106. Suponga que se desea probar la hipótesis H_0: $\mu = 85$ contra la alternativa H_1: $\mu > 85$ donde $\sigma = 16$. Suponga que la media verdadera es $\mu = 86$ y que en el contexto práctico de este problema, este alejamiento de $\mu_0 = 85$ no es de importancia.

a. Para una prueba con a = 0.01, calcule β para los tamaños de muestra $n = 25$, 100, 400 y 2500, suponiendo que $\mu = 86$.

b. Suponga que el promedio muestral es $\bar{x} = 86$. Encuentre el valor P del estadístico de prueba para cada uno de los diferentes tamaños de muestra indicados en el inciso a). ¿Los datos son estadísticamente significativos para $\alpha = 0.01$?

c. Haga un comentario sobre el uso de muestras de gran tamaño en este problema.

8-107. El sistema de enfriamiento de un submarino nuclear está formado por un ensamble de tuberías soldadas por donde circula un líquido refrigerante. Las especificaciones requieren que la resistencia de la soldadura sea mayor o igual que 150 psi.

a. Suponga que los ingenieros de diseño deciden probar la hipótesis H_0: $\mu = 150$ contra H_1: $\mu > 150$. Explique por qué esta elección de hipótesis alternativa es mejor que H_1: $\mu < 150$.

b. Al tomar una muestra aleatoria de 20 soldaduras se tiene que $\bar{x} = 153.7$ psi y $s = 11.3$ psi. ¿Qué conclusiones pueden obtenerse con respecto a la hipótesis del inciso a)? Utilice $\alpha = 0.05$.

8-108. Considere los datos sobre el diámetro de las varillas de la suspensión del automóvil del ejercicio 7-16.

a. Utilice estos datos para probar H_0: $\mu = 8.25$ mm contra H_1: $\mu \neq 8.25$ mm con $\alpha = 0.05$. Llegue a conclusiones apropiadas.

b. Construya una gráfica de probabilidad normal de los datos contenidos en la muestra. ¿Parece razonable la hipótesis de normalidad para los datos sobre el diámetro de las varillas?

8-109. En el ejercicio 7-24 se presentan datos tomados de un artículo publicado en *Fire Technology* donde se informa sobre los resultados obtenidos al probar dos agentes de dispersión de espuma utilizados en las boquillas de los extintores de fuego.

a. ¿Los datos de este estudio apoyan la afirmación de que el concentrado de alcohol produce una dispersión promedio mayor de la espuma que las que contienen agentes acuosos que forman película? Utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que ambas poblaciones tienen la misma desviación estándar.

b. Calcule el valor P de esta prueba.

8-110. Considere los datos de rendimiento de un proceso químico que aparecen en el ejercicio 7-23. ¿Existe alguna evidencia que apoye la afirmación que el rendimiento promedio de los tipos de catalizadores es diferente? Utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que las dos poblaciones tienen la misma desviación estándar. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-111. Se realiza un experimento para comparar las características de llenado del equipo de embotellado de dos fábricas vinícolas diferentes. Para ello se escogen al azar 20 botellas de Pinot Noir de los viñedos de Ridgecrest y otras 20 de Pinot Noir de los viñedos de Valley View. Con esto se obtienen los datos siguientes (el volumen está dada en ml):

Ridgecrest				**Valley View**			
755	751	752	753	756	754	757	756
753	753	753	754	755	756	756	753
754	752	751	753	754	755	755	754
752	753	753	752	754	756	755	756
755	753	750	753	756	756	756	756

a. ¿Los datos apoyan la afirmación de que ambas vinaterías llenan las botellas con el mismo volumen promedio? Utilice $\alpha = 0.05$ y suponga que, al obtener conclusiones, las dos poblaciones tienen la misma desviación estándar.

b. Calcule un valor P para la prueba estadística del inciso a).

c. Construya un diagrama de caja para las dos muestras. ¿Parece razonable la hipótesis de varianzas iguales hecha en el inciso a)? Proporcione una interpretación práctica de estas gráficas.

d. Construya gráficas de probabilidad normal para ambas muestras. ¿Le parece que se satisface la hipótesis de normalidad?

8-112. Considere el problema de llenado de botellas descrito en el ejercicio 8-111. Suponga que si la diferencia en el volumen promedio de llenado es tanto como 2 onzas de líquido, entonces es importante que el valor de β sea pequeño, por ejemplo, $\beta \leq 0.1$. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra que debe emplearse para tener esta capacidad de detección cuando $\alpha = 0.05$? Suponga que $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ es una estimación conservadora de la desviación estándar.

8-113. Una máquina para la prueba de dureza Rockwell presiona una punta sobre una muestra de prueba. La profundidad de la deformación resultante se emplea para indicar la dureza del material. Se comparan dos puntas con objeto de determinar si proporcionan las mismas lecturas de dureza en la escala C de Rockwell. Para ello se emplean nueve muestras de prueba, y las dos puntas se prueban en cada una de ellas. Los datos obtenidos aparecen a continuación. ¿Es posible concluir, con $\alpha = 0.01$, que las dos puntas producen las mismas lecturas de dureza promedio en la escala C de Rockwell?

Muestra	Punta 1	Punta 2
1	47	46
2	42	40
3	43	45
4	40	41
5	42	43
6	41	41
7	45	46
8	45	46
9	49	48

8-114. Considere el experimento de prueba de dureza Rockwell del ejercicio 8-113. Suponga que si la diferencia entre las lecturas de dureza promedio de ambas puntas es tanto como 1.0 entonces se desea que la potencia de la prueba sea de al menos 0.9. ¿Cuántas muestras deben utilizarse en la prueba?

8-115. Se emplean dos calibradores para medir la profundidad de un baño de material en una celda Hall utilizada para fundir aluminio. El mismo operador utiliza cada calibrador una vez en 15 celdas. ¿Existe algún indicio de que ambos calibradores producen medidas de profundidad diferentes? Utilice $\alpha = 0.05$.

Celda	Calibrador 1	Calibrador 2
1	46 in.	47 in.
2	50	53
3	47	45
4	53	50
5	49	51
6	48	48
7	53	54
8	56	53
9	52	51
10	47	45
11	49	51
12	45	45
13	47	49
14	46	43
15	50	51

8-116. Considere el experimento de determinación de brillantez de un cinescopio de televisión descrito en el ejercicio 8-35. ¿Los datos apoyan la afirmación de que la desviación estándar de la corriente es menor que 20 microamperes? Utilice $\alpha = 0.05$ para llegar a una conclusión. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-117. Considere las mediciones de ácido graso de la margarina dietética del ejercicio 8.36. Pruebe H_0: $\sigma^2 = 1.0$ contra H_1: $\sigma^2 \neq 1.0$ utilizando $\alpha = 0.05$. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

8-118. Considere los datos de temperatura de deflexión del ejercicio 8-42. Pruebe H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ utilizando $\alpha = 0.05$. Utilice el valor P de esta prueba para obtener conclusiones.

8-119. Para el experimento de temperatura de deflexión descrito en el ejercicio 8-42, suponga que la desviación estándar de una de las poblaciones es mayor que la de la otra en un 25%. Encuentre el valor de β para esta prueba. ¿Qué tamaño de muestra se requiere si se desea que la potencia de la prueba sea de al menos 0.85? Utilice $\alpha = 0.05$.

8-120. Una compañía de biotecnología produce un medicamento cuya concentración tiene una desviación estándar de 4 g/l. Se propone un método nuevo para producir este medicamento, lo que implica ciertos costos adicionales. La gerencia autorizará el cambio en la técnica de producción sólo si la desviación estándar de la concentración en el nuevo proceso es menor que 4 g/l. Si la desviación estándar de la concentración en el nuevo proceso es tan pequeña como 3 g/l, entonces a la compañía le gustaría cambiar los métodos de producción con una probabilidad de al menos 0.90. Suponga que la concentración está distribuida de manera normal y que $\alpha = 0.05$. ¿Cuántas observaciones deben tomarse? Suponga que los investigadores eligen $n = 10$ y obtienen los datos siguientes. ¿Es ésta una buena elección para n? ¿Qué conclusiones pueden obtenerse?

16.628 g/l	16.630 g/l
16.622	16.631
16.627	16.624
16.623	16.622
16.618	16.626

8-121. Un fabricante de instrumentos de precisión afirma que la desviación estándar en el uso de sus equipos es de 0.00002 mm como máximo. Un analista, que no conoce esta afirmación, utiliza el instrumento ocho veces y obtiene una desviación estándar muestral de 0.00005 mm.

a. Si se utiliza $\alpha = 0.01$, ¿la afirmación del fabricante está justificada?

b. Encuentre el valor P de esta prueba.

c. ¿Cuál es la potencia de la prueba si la desviación estándar real es 0.00001 mm? Utilice $\alpha = 0.01$.

d. ¿Cuál es el tamaño de muestra más pequeño que puede emplearse para detectar una desviación estándar verdadera de 0.00001 con una probabilidad de al menos 0.95? Utilice $\alpha = 0.01$.

8-122. Se supone que la desviación estándar de las mediciones efectuadas con un termocople es 0.005 °F. Si la desviación estándar es tan grande como 0.01, entonces se desea detectar este hecho con una probabilidad de al menos 0.90. Si se emplea $\alpha = 0.05$, ¿qué tamaño de muestra debe emplearse? Si se utiliza este tamaño de muestra y la desviación estándar muestral es $s = 0.007$, ¿a qué conclusión puede llegarse si se hace uso de $\alpha = 0.05$? Encuentre el valor P de esta prueba

8-123. Un fabricante de calculadoras electrónicas afirma que menos del 1% de su producción es defectuosa. Se toma una muestra aleatoria de 1200 calculadoras y se encuentran ocho unidades defectuosas. Utilizando $\alpha = 0.05$, determine si esto es evidencia suficiente para apoyar la afirmación del fabricante. Encuentre el valor P de esta prueba.

8-124. Suponga que se prueba H_0: $p = 0.5$ contra H_1: $p \neq 0.5$ y que $n = 200$ con $\alpha = 0.05$.

a. Encuentre, de manera aproximada, la potencia de esta prueba si $p = 0.6$.

b. ¿Qué tamaño de muestra se necesita si $p = 0.6$ y se desea que $\beta \leq 0.05$?

8-125. En una muestra aleatoria de 200 residentes de cierta ciudad que conducen un automóvil de fabricación estadounidense, 165 indicaron que emplean el cinturón de seguridad. Otra muestra de 250 residentes de la misma ciudad que conducen un automóvil de fabricación extranjera, reveló que 198 utilizan el cinturón de seguridad.

a. ¿Existe alguna evidencia que indique una diferencia en el uso del cinturón de seguridad entre los conductores de automóviles estadounidenses y extranjeros? Utilice $\alpha = 0.05$.

b. ¿Cuál es el valor P de esta prueba?

c. Suponga que la proporción verdadera que utiliza el cinturón de seguridad es $p_1 = 0.85$ para los conductores de automóviles estadounidenses, y $p_2 = 0.90$ para los conductores de automóviles extranjeros. Encuentre el valor de β para esta prueba.

8-126. El tiempo de falla (en meses) de un cinescopio de televisión aparece en la tabla siguiente. Construya una gráfica de probabilidad normal para estos datos. ¿Parece razonable suponer que el tiempo de falla tiene una distribución normal?

73	83	34	68	67
100	230	44	46	5
104	3	89	95	352
5	110	139	115	17
114	1	10	62	60

8-127. Construya gráficas de probabilidad normal para las dos muestras de concentración activa del ejercicio 7-14. ¿Parece razonable la hipótesis de normalidad para ambas poblaciones? ¿Parece correcta la hipótesis de que $\sigma = 3$ g/l en ambas poblaciones?

8-128. Construya gráficas de probabilidad normales para las dos muestras de temperatura de deflexión dadas en el ejercicio 8-42. ¿Parece razonable la hipótesis de normalidad para ambas poblaciones? ¿Qué otras conclusiones tentativas pueden obtenerse de estas gráficas?

8-129. Una tela se clasifica en tres categorías: A, B y C. Los resultados que aparecen a continuación se obtuvieron de cinco telares. ¿La clasificación de la tela es independiente del telar? Utilice $\alpha = 0.05$.

Telar	Número de piezas de tela en la clasificación		
	A	*B*	*C*
1	185	16	12
2	190	24	21
3	170	35	16
4	158	22	7
5	185	22	15

8-130. Un artículo publicado en el *Journal of Marketing Research* (1970, pág. 36-42) contiene un estudio de la relación entre las condiciones de las instalaciones de las gasolinerías y la dinámica de la política de mercadotecnia seguida por ellas. Para ello se investigó una muestra de 441 gasolinerías, y se obtuvieron los resultados siguientes. ¿Existe evidencia de que la política de mercadotecnia y las condiciones de la gasolinería son independientes? Utilice $\alpha = 0.05$.

Política	Condición		
	Subestándar	Estándar	Moderna
Dinámica	24	52	58
Neutral	15	73	86
No dinámica	17	80	36

8-131. Considere el proceso de moldeo por inyección descrito en el ejercicio 8-82.

a. Plantee este problema como una tabla de contingencia de 2×2 y realice el análisis estadístico indicado. Utilice $\alpha = 0.05$.

b. Proponga de manera clara la hipótesis que se va a probar. ¿Qué es lo que va a probar: homogeneidad o independencia?

c. ¿Este procedimiento es equivalente al procedimiento de prueba del ejercicio 8-82?

EJERCICIOS DE COMPRENSIÓN

8-132. Un fabricante de tabletas para el dolor desea demostrar que su producto surte efectos dos veces más rápido que el de los competidores. De manera específica, al fabricante le gustaría probar

$$H_0: \mu_1 = 2\mu_2$$

$$H_1: \mu_1 > 2\mu_2$$

donde μ_1 es el tiempo de absorción promedio del producto de la competencia y μ_2 es el tiempo de absorción promedio del nuevo producto. Suponga que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas. Desarrolle un procedimiento de prueba para esta hipótesis.

8-133. Suponga que se desea probar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$, donde σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas. El tamaño total de la muestra N es fijo, pero la asignación de observaciones a las dos poblaciones, de modo que $n_1 + n_2 = N$, se hace con base en el costo. Si los costos del muestreo de las poblaciones 1 y 2 son C_1 y C_2, respectivamente, encuentre los tamaños de muestreo de costo mínimo que proporcionan una varianza específica para la diferencia en las medias muestrales.

8-134. Suponga que se desea probar la hipótesis H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$, donde las dos varianzas σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas. Para ello pueden tomarse un total de $n_1 + n_2 = N$ observaciones. ¿Cómo deben asignarse las observaciones a las dos poblaciones para maximizar la probabilidad de rechazar H_0 si H_1 es verdadera y $\mu_1 - \mu_2 = \delta \neq 0$?

8-135. Supóngase que se desea probar H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1: $\mu \neq \mu_0$, donde la población es normal y σ es conocida. Sea $0 < \epsilon < \alpha$. La región crítica se define de modo que se rechace H_0 si $z_0 > z_\epsilon$ o si $z_0 < -z_{\alpha - \epsilon}$, donde z_0 es el valor del estadístico de prueba usual para estas hipótesis.

a. Demuestre que la probabilidad del error tipo I para esta prueba es α.

b. Suponga que la media verdadera es $\mu_1 = \mu_0 + \delta$. Obtenga una expresión para β de la prueba anterior.

8-136. Construya un conjunto de datos para los que el estadístico de la prueba t pareada sea muy grande, lo que indica cuando se emplea este análisis que las medias de las dos poblaciones son diferentes, pero t_0 para la prueba t de dos muestras es muy pequeño, de modo que el análisis incorrecto indicará que no hay ninguna diferencia significativa entre las medias.

8-137. Obtenga una expresión para β para la prueba sobre la varianza de una distribución normal. Suponga que se especifica una alternativa bilateral.

8-138. Obtenga una expresión para β para la prueba de igualdad de las varianzas de dos distribuciones normales. Suponga que se especifica una alternativa bilateral.