ESPERANZA MATEMATICA Y TOMA DE DECISIÓN

Prof.:MSc. Julio Vargas

Esperanza Matemática

Si las probabilidades de obtener las cantidades $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son $p_1, p_2, \ldots, p_k$ respectivamente, entonces la esperanza

$$\boxed{E = a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_kp_k} \quad \textbf{Ecuación 1.}$$

Las probabilidades son siempre $\mathbf{p_i \geq 0}$ y $\mathbf{\sum p_i = 1}$. Pero en el caso de los $\mathbf{a_i}$ es importante tener presente que serán positivos cuando representen utilidades, triunfos o ganancias y serán son negativos cuando representen pérdidas, déficit o castigos.

ACTIVIDAD PRÁCTICA

Ejemplo 1: Un sindicato al negociar salarios intuye que las probabilidades están 0.40, 0.30, 0.20 y 0.10 que los trabajadores consigan un aumento de $1.50 por hora, $1 por hora, $0.50 por hora o ningún aumento, respectivamente. ¿Cuál es su aumento esperado?

Aumento de	1.5	1	0.50	0
Probabilidad	0.40	0.30	0.20	0.10

Solución: aplicamos la ecuación 1.

- $\mathbf{E= 1.5(0.4) + 1(0.3) + 0.5(0.2) + 0(0.1)= 0.6 +0.3+0.10+0= 1}$

Ejemplo 2: Un contratista debe elegir entre dos obras. La primera promete una ganancia de $240,000, con una probabilidad de 0.75 o una pérdida de $60,000 (debido a huelgas y otras demoras), con una probabilidad de 0.25; la segunda obra promete una ganancia de $360,000 con una probabilidad de 0.5 o con una pérdida de $90,000 con una probabilidad de 0.5

a. ¿Cuál debería elegir el contratista, si quiere maximizar la ganancia esperada?
b. ¿Cuál sería la obra que probablemente escogería si su negocio anduviera mal y quebrara a menos de que lograra una ganancia de $300,000 en su próxima obra?

Solución: aplicamos la ecuación 1.

Definimos $\mathbf{E_1}$ como la esperanza matemática de la primera obra.

$\mathbf{E_1 = 240{,}000 \times 0.75 - 60{,}000 \times 0.25 = 180{,}000 - 15{,}000 = \$165{,}000}$

Definimos $\mathbf{E_2}$ como la esperanza matemática de la segunda obra.

$\mathbf{E_2 = 360{,}000 \times 0.5 - 90{,}000 \times 0.5 = 180{,}000 - 45{,}000 = \$135{,}000}$

- **Para responder la pregunta (a) basta con comparar los dos resultados y obviamente, resulta que la primera obra representa la mejor opción por tener una esperanza matemática más alta.**

- Para la pregunta (b) debemos de partir que **"el contratista se encuentra en una situación inminente de quiebra, por lo que ninguna obra inferior a los $300,000 le resultaría satisfactoria;** por lo su única salida es tomar **la segunda obra** que representa un mayor riesgo, ya que la posibilidad de que tenga éxito es solo del 50%, pero su ganancia sería de $360,000.

Ejemplo 3:

Se sabe por experiencia que la demanda diaria de un producto perecedero es como como se muestra en la tabla siguiente:

Número de ordenes	3	4	5	6	7	8	9
Probabilidad	0.05	0.12	0.20	0.24	0.17	0.14	0.08

Si cada artículo cuesta \$35 (incluyendo el costo de transportación a la bodega), con un precio de venta en bodega de \$50 y si permanece en la bodega al finalizar el día representa una pérdida total, ¿Cuántos artículos deberían ser almacenados en cada día a fin de maximizar la utilidad esperada?

Solución: Aplicamos la ecuación 1.

Calcularemos la Esperanza matemáticas en los casos de vender 3 artículos, 4 artículos, 5 artículos, 6 artículos, 7 artículos, 8 artículos y 9 artículos. Para posteriormente obtener las utilidades en cada caso de donde observaremos en que caso se obtiene la máxima utilidad.

a. Si hay tres artículos almacenados en bodega. La probabilidad de vender 3 o más es y la utilidad esperada es:

- E= (3)(1)(50)=\$150 venta esperada de los tres artículos
  La probabilidad 1 resulta de sumar todas las probabilidades $\sum p_i=1$.
- Costo = 3x35 =\$105 costo de los tres artículos
- Utilidad 150-105= **\$45 utilidad esperada de vender 3 artículos**

b. Si hay cuatro artículos almacenados en bodega. Hay una probabilidad de 0.05 de que se vendan tres artículos y una probabilidad de 0.95 de que haya demanda para cuatro o más y la utilidad esperada es.

- E= (3)(50)(0.05) + 200(0.95) = \$197.5 venta esperada de los 4 artículos.
  La probabilidad de 0.95 resulta de la suma de las probabilidades de 0.12 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 4x35 =\$140 costo de los cuatro artículos
- Utilidad 150-105= **\$57.5 utilidad esperada de vender 4 artículos**

c. Así mismo, si hay cinco artículos almacenados en bodegas, existe una probabilidad de 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.83 de que haya demanda para 5 o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.83)= $239 venta esperada de los cinco artículos.**
  La probabilidad de 0.83 resulta de la suma de las probabilidades de 0.20 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 5x35 =$175 costo de los cuatro artículos
- Utilidad 239-175= **$64.0 utilidad esperada de vender 4 artículos**

d. Así mismo, si hay seis artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.63 que se vendan 6 o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.63) =$270.5 venta esperada de los seis artículos.**
  La probabilidad de 0.63 resulta de la suma de las probabilidades de 0.24 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 6x35 =$210 costo de los seis artículos
- Utilidad 270.5-210= **$60.5 utilidad esperada de vender 6 artículos**

e. Así mismo, si hay siete artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.24 que se vendan 6 y una probabilidad de 0.39 de se vendan siete o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.24) + (7)(50)(0.39)= $290 venta esperada de los siete artículos.**
  La probabilidad de 0.39 resulta de la suma de las probabilidades de 0.17 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 7x35 =$245 costo de los siete artículos
- Utilidad 290-245= **$45 utilidad esperada de vender 7 artículos**

f. Así mismo, si hay ocho artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.24 que se vendan 6, una probabilidad de 0.17 que se vendan siete y una probabilidad 0.22 que se vendan ocho o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.24) + (7)(50)(0.17) + (8)(50)(0.22)= $378 venta esperada de los ocho artículos.**
  La probabilidad de 0.22 resulta de la suma de las probabilidades de 0.14 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 8x35 =$301 costo de los ocho artículos
- Utilidad 301-280= **$21 utilidad esperada de vender 8 artículos**

g. Así mismo, si hay nueve artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.24 que se vendan 6, una probabilidad de 0.17 de se vendan siete y una probabilidad 0.14 que se vendan ocho y 0.08 que se vendan 9.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.24) + (7)(50)(0.17) + (8)(50)(0.14) + (9)(50)(0.08) = $305 venta esperada de los nueve artículos.**
- Costo = 9x35 =$315 costo de los nueve artículos
- Utilidad 305-315= **-$10 utilidad esperada de vender 9 artículos**

Artículos en bodega	3	4	5	6	7	8	9
Probabilidad	0.05	0.12	0.20	0.24	0.17	0.14	0.08
Utilidad	**$45**	**$57.5**	**$64**	**$60.5**	**$45**	**$21**	**-$10**

Puede observar que las utilidades que se obtienen varían siendo la máxima cuando se ordenan 5 artículos con una utilidad de $64. Por lo que la mejor decisión es tener cinco artículos en bodegas. Ello nos garantiza la máxima utilidad esperada.