# UNIVERSIDAD DE MANAGUA

*Al más alto nivel*

**Estadística Inferencial**

**Encuentro #3**

**Tema: Distribución Discreta**

**Prof.: MSc. Julio Rito Vargas A.** **Grupo:CCEE y ADMVA /2016**

**Objetivos:**

- Definir la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
- Obtener probabilidades de eventos haciendo uso de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
- Establecer las propiedades de la función de distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta.
- Obtener y graficar la función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta, dada su función de probabilidad.
- Describir las características de la distribución de probabilidad Binomial y calcular las probabilidades usando esa distribución.
- Describir las características de la distribución de probabilidad Binomial y calcular las probabilidades usando esa distribución

**Desarrollo:**

**Función de probabilidad de una variable discreta:**

Una distribución de probabilidad es un modelo matemático que asocia valores de una variable aleatoria con sus respectivas probabilidades. Es decir

**Probabilidad de x =función de x**

Las distribuciones se caracterizan por una fórmula que determina el tipo de distribución y por un conjunto de parámetros, que son propios de cada espacio muestral.

En el caso de una variable discreta, la distribución puede describirse mediante una función de probabilidad, que para cada valor de x de la variable X determina la probabilidad de ser asumido:

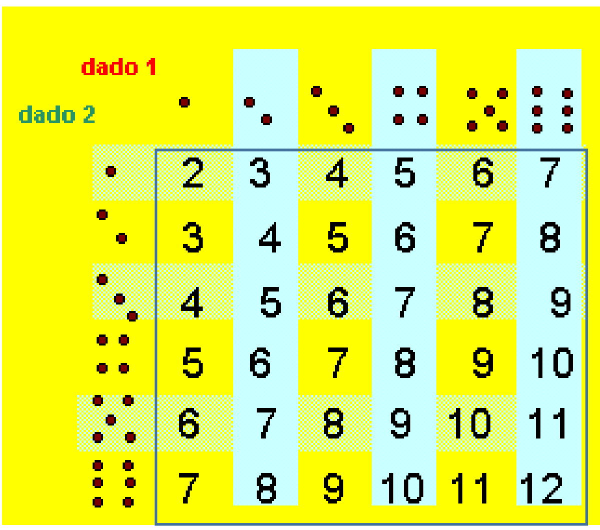
**P(X=x) =f(x)**

o bien por medio de una función de distribución de probabilidad acumulada o simplemente **función de distribución**, la que, para cada valor provee la probabilidad de no ser superado

$$P(X \leq x) = F(x)$$

Evidentemente, el valor de la función de distribución es igual a la suma de todos los valores de la función de probabilidad desde el extremo inferior del dominio de la variable hasta *x* inclusive

**Ejemplo 1:** Al lanzar dos dados la **suma** de ambos puede asumir 11 valores diferentes en 36 **puntos muestrales** que tiene e**l espacio muestral.**




| x | frec. | f(x) | F(x) |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1/36 | 1/36 |
| 3 | 2 | 2/36 | 3/36 |
| 4 | 3 | 3/36 | 6/36 |
| 5 | 4 | 4/36 | 10/36 |
| 6 | 5 | 5/36 | 15/36 |
| 7 | 6 | 6/36 | 21/36 |
| 8 | 5 | 5/36 | 26/36 |
| 9 | 4 | 4/36 | 30/36 |
| 10 | 3 | 3/36 | 33/36 |
| 11 | 2 | 2/36 | 35/36 |
| 12 | 1 | 1/36 | 1 |
| Suma | 36 | 1 | |

**Gráfico de Densidad**

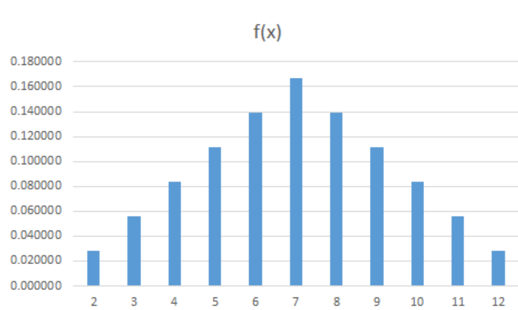
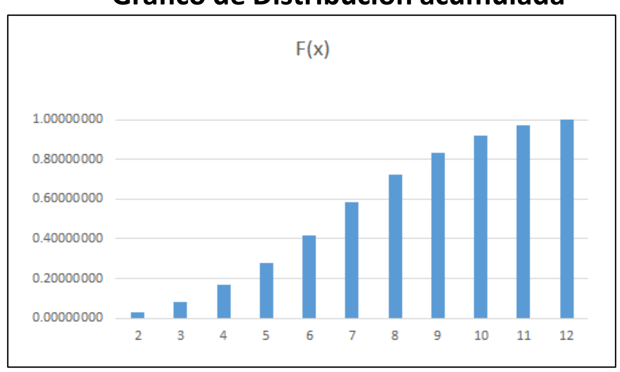



**Gráfico de Distribución acumulada**




**La función f(x) es la función de densidad**

**La función F(x) es la distribución acumulada**

**En este caso vemos que función de densidad f(x) es simétrica.**

***Vamos estudiar algunas de las distribuciones de variable discretas de mayor uso; la distribución Binomial y la Distribución de Poisson.***

***<u>Distribución Binomial:</u>***

Supongamos que un experimento aleatorio tiene las siguientes características:

- En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados: el suceso A (éxito) y su contrario $A^c$ (fracaso).
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- La probabilidad del suceso A es constante, la representamos por *p*, y no varía de una prueba a otra. La probabilidad de $A^c$ es 1- *p* y la representamos por *q*
- El experimento consta de un número *n* de pruebas.
- El objetivo de la distribución binomial es conocer la probabilidad de que se produzca un cierto número de éxitos.
- La **variable aleatoria** X, que indica el número de veces que aparece el suceso A (éxito), es **discreta**, y su **recorrido** es el conjunto {0, 1, 2, 3,..., n}.

Todo experimento que tenga estas características diremos que sigue el modelo de la ***distribución Binomial***. A la variable *X* que expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento, la llamaremos ***variable aleatoria binomial***.

Como hay que considerar todas las maneras posibles de obtener k-éxitos y (n-k) fracasos debemos calcular éstas por combinaciones (número combinatorio de n sobre k).

Se suele representar por *B(x; n,p)* o b(x; n,p) siendo x, *n* y *p* los parámetros de dicha distribución.

***Función de probabilidad de la distribución Binomial* o también denominada función de la distribución de Bernoulli (para n=1). Verificándose: $0 \leq p \leq 1$**

**Probabilidad de obtener x éxitos**

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Dónde:

x: número de éxitos (x=0,1,2,...,n)
p: probabilidad de éxito
1- p: probabilidad de fracaso.
n: tamaño de la muestra o número de ensayos.

La distribución de probabilidad acumulada se define como:

Sea **B(x;n,p)=** $\sum_{k=0}^{x} b(k;n,p)$ para X=0,1,2,…,n

**Teorema**: **Identidades binomiales**

**(a) b(x;n,p) = b(n-x; n,1-p)**

**(b) B(x;n,p) = 1 - B(n-x-1;n,1-p)**

**(c) b(x;n,p) = B(x;n,p) – B(x-1;n,p)**

**(d) b(x;n,p) = B(n-x;n,1-p) – B(n-x-1;n,1-p)**

**La media, la varianza y desviación típica de la distribución binomial:**

$\mu = np$ La media es igual al número de intentos por la probabilidad de éxitos.

$\sigma^2 = npq$ La varianza es igual al producto de n por p por q

$\sigma = \sqrt{npq}$ La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

Para efectos de la solución de los ejercicios planteados recurriremos a las fórmulas y teoremas antes descritos de la distribución binomial. También los ejercicios los resolveremos usando las tablas estadísticas y posteriormente con la hoja de cálculo **Excel** de **Microsoft Office.**

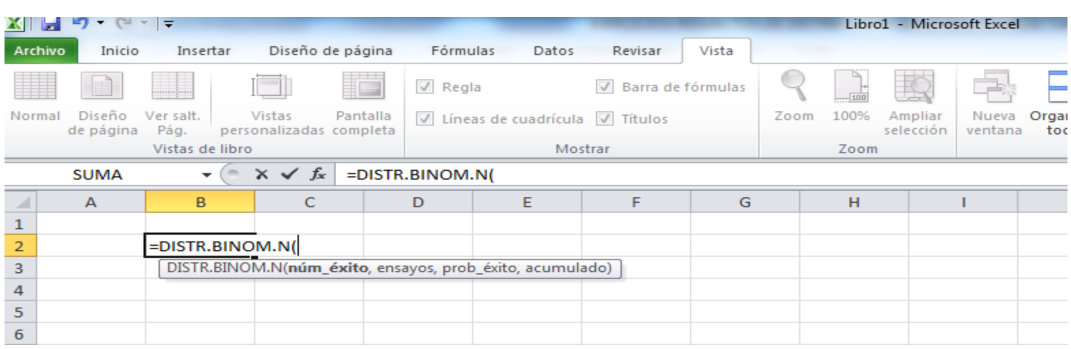
**Ejemplos:**

1. Por ejemplo si estamos interesado en encontrar la probabilidad binomial de n=3 ensayos de los cuales x=2 son éxitos con una probabilidad de acierto de p=0.40

**b(x=2;n=3,p=0.40)==** $\binom{3}{2}(0.4)^2(0.6)^1$ **=0.2880. La probabilidad que eso ocurra es de 0.2880**

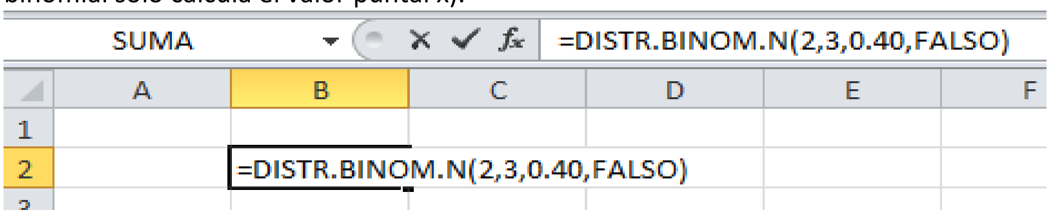
**Usando Excel 10 de Microsoft Office**

La hoja de cálculo Excel versión 10 de Microsoft Office tiene las principales funciones estadísticas.



Se ubica en una celda vacía y escribe =DISTR.BINOM.N el software le mostrará las distribuciones existentes mientras usted está escribiendo. Puede ver que entre paréntesis aparecen cuatro parámetros:

- ✓ **núm_éxitos**: aquí debe escribir el número de éxitos que se desea obtener.
- ✓ **ensayos**: es el tamaño de la muestra n
- ✓ **prob_éxito**: probabilidad p de éxito.
- ✓ **acumulado**: verdadero o falso. ( si escribe verdadero: la distribución calcula la distribución binomial acumulada desde x hasta cero; si escribe falso: la distribución binomial solo calcula el valor puntal x).




2. Un empleado que labora en el departamento de control de calidad de una empresa, inspecciona una muestra al azar de 10 camisas de un lote. Si el 20% de las camisas del lote están defectuosos. Cuál es la probabilidad de que en la muestra,
   a) ninguno esté defectuoso,
   b) uno salga defectuoso,
   c) al menos dos salgan defectuosos
   d) más de tres estén con defectos
   e) no más de tres estén con defectos

   **Solución usando tablas binomiales:**
   **a)** P(x=0)=b(x=0;n=10,p=0.20)= **0.1074**

   b) P(x=1)=b(x=1;n=10,p=0.20)= **0.2684**

   c) P(x≥2)=1-P(x≤1)=1-B(x≤1;n=10,p=0.20)=1-[0.1074+0.2684]=1-0.3758=**0.6242**

   d) P(x≥3)=1-P(x≤2)= 1-B(x≤2;n=10,p=0.20)= 1 - [0.1074+0.2684+0.3020]=1-0.6778=**0.3222**

   e) P(x≤3)= B(x≤3;n=10,p=0.20)= 0.1074 + 0.2684 + 0.3020 + 0.2013=**0.8791**

   **Solución usando Excel 10,** obtenemos los resultados siguientes:

   a) DISTR.BINOM.N(0,10,0.20,FALSO)=**0.10737≡ 0.1734**

   b) DISTR.BINOM.N(1,10,0.20,FALSO)=0.26844**≡ 0.2684**

   c) 1- DISTR.BINOM.N(1,10,0.20,VERDADERO)=1- 0.3758=**0.6242**

   d) **1 -** DISTR.BINOM.N(2,10,0.20,VERDADERO)= **1 – 0.6778=0.3222**

   e) DISTR.BINOM.N(3,10,0.20,VERDADERO)=**0.8791**

3. La probabilidad de que un CD de música dure al menos un año sin que falle es de 0.90, calcular la probabilidad de que en una muestra de 15,
   a) 12 duren al menos un año,

b) a lo más 5 duren al menos un año,
c) al menos 2 duren al menos un año.

**Solución**:
a) P(x=12)=b(x=12;n=15,p=0.90)= **= B(n-x;n,1-p) – B(n-x-1;n,1-p)**
b) P(x≤5)=B(x≤5;n=15,p=0.90)= **= 1- B(n-x-1;n,1-p)**
c) P(x≥2)=1-P(x≤1)=1-B(x≤1;n=15,p=0.90)=1-[1-B(n-x-1;n=15,1-p)]=B(n-x-1;n=15,1-p)

**Solución usando tablas binomiales:**
a) B(3;n=15,0.10) – B(2;n=15,p=0.10)= b(x=3;n=15,0.10)=**0.1285**

b) **1-B(9;n=15,0.10)=1-[0.2059+0.3432+0.2669+0.1285+0.0428+ 0.0105+ 0.0019+ 0.0003+ 0.0000+ 0.0000]=1-1=0**

c) B(15-2-1;15,0.10)=B(12;15;0.10)=0.0.2059+**+0.3432+0.2669+0.1285+0.0428+ 0.0105+ 0.0019+ 0.0003+ 0.0000+ 0.0000+0.0000+0.0000+0.0000=1**

**Solución usando Excel 10,** obtenemos los resultados siguientes:
a) b(x=12;n=15,p=0.90)=DISTR.BINOM.N(12,15,0.90,FALSO)=0.1285

b) B(x≤5;n=15,p=0.90)=DISTR.BINOM.N(12,15,0.90,VERDADERO)=0.0000002 (casi 0)

c) 1-B(x≤1;n=15,p=0.90)=1- DISTR.BINOM.N(1,15,0.90,VERDADERO)=1-0.000=1

1. El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservación, sabe por experiencia, que el 20% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 25 reservas pero sólo dispone de 20 mesas. ¿cuál es la probabilidad de que a todas las personas que asistan al restaurante se les asigne una mesa?

   DISTR.BINOM.N(2,3,0.40,FALSO)=0.2880

Puede ver que son los mismos resultados que obtuvimos con las tablas, no obstante en algunos casos habrá pequeñas diferencias dado que las tablas contiene solo valores de probabilidad de cuadro decimales (es decir del orden de las diezmilésimas) y en Excel usted puede pedirle que le muestre los decimales que quiera (usando formatos).

**ACTIVIDAD DE REAFIRMACION EN EL AULA:**

I. Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según las tablas actuales, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 2/3. Hállese la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:
   1. Las cinco personas
   2. Al menos tres personas
   3. Exactamente dos personas

II. La probabilidad de que un artículo producido por una fábrica sea defectuoso es p = 0.02. Se envió un cargamento de 10.000 artículos a unos almacenes. Hallar el número esperado de artículos defectuosos, la varianza y la desviación típica

### *Distribución de Poisson*

Esta distribución es una de las más importantes distribuciones de variable discreta. Sus principales aplicaciones hacen referencia a la modelización de situaciones en las que nos interesa determinar el número de hechos de cierto tipo que se pueden producir en un intervalo de tiempo o de espacio o de área, bajo supuestos de aleatoriedad y ciertas circunstancias restrictivas. Otro de sus usos frecuentes es la consideración límite de procesos dicotómicos reiterados un gran número de veces si la probabilidad de obtener un éxito es muy pequeña.

- Esta distribución se puede hacer derivar de un proceso experimental de observación en el que tengamos las siguientes características
- En este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, espacio, pieza, etc.
- Si $n \geq 20$ y $p \leq 0.05$; Si $n \geq 100$, la aproximación a Poisson es generalmente excelente a condición de que $np \leq 10$.

**Ejemplos:**

- Número de llamadas telefónicas que recibe un servicio de atención a urgencias durante un intervalo de tiempo determinado.
- Número de defectos de una tela por m2
- Número de cultivos infectados por una plaga en una cierta región geográfica
- Número de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día, hora, minuto, etc.
- Número de bacterias por cm2 de cultivo
- Número de llegadas de embarcaciones a un puerto por día, mes, etc.

**La función de probabilidad** de una variable aleatoria de Poisson con media **λ> 0**, que simplificamos con la notación **P(λ)**, es

Para determinar la probabilidad de que ocurran x éxitos por unidad de tiempo, área, o producto, la fórmula a utilizar sería:

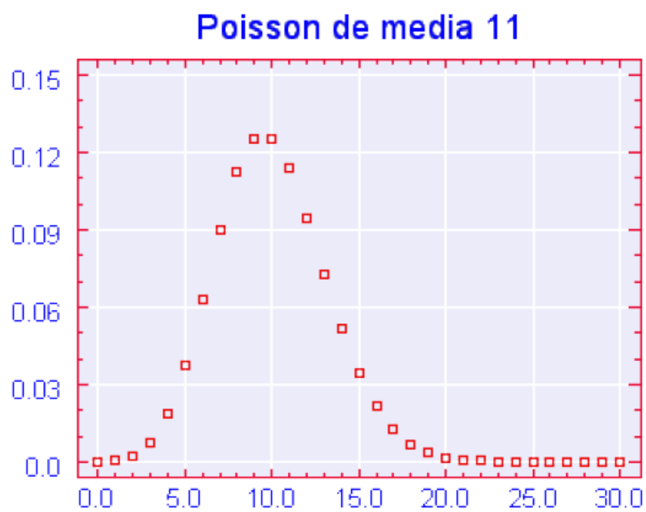
$$P(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{para } x=0,1,2,3,\ldots$$

**donde:**

**P(*x*; λ) =** probabilidad de que ocurran x éxitos, cuando el número promedio de ocurrencia de ellos es λ

**λ** (lambda)= media o promedio de éxitos por unidad de tiempo, área o producto (λ=np)
e = 2.718

***x*** = valor de la variable X que denota el número de éxitos que se desea que ocurra.




La representación gráfica para un modelo de media 11 sería la adjunta . Obsérvense los valores próximos en la media y su forma parecida a la campana de Gauss , en definitiva , a la distribución normal.

La **función de distribución** vendrá dada por :

$$P(X;\lambda) = \sum_{x=0}^{X} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Los ejercicios de Probabilidad de Poisson, los resolveremos primeramente con tablas estadísticas y posteriormente con la hoja de cálculo **Excel** de **Microsoft Office.**

**Es importante aclarar que las tablas de Poisson tienen una estructura como se muestra:**

**Tabla** (Continuación). Probabilidades de la distribución de Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

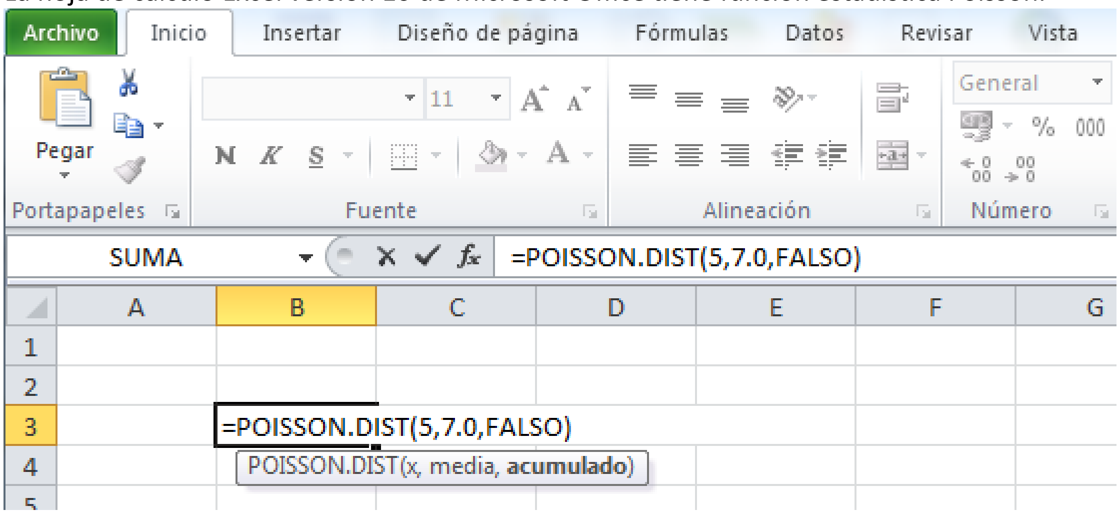
| $x$ | $\lambda = 5,5$ | $\lambda = 6,0$ | $\lambda = 6,5$ | $\lambda = 7,0$ | $\lambda = 7,5$ | $\lambda = 8,0$ | $\lambda = 8,5$ | $\lambda = 9,0$ | $\lambda = 9,5$ | $\lambda = 10,0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0041 | 0,0025 | 0,0015 | 0,0009 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0000 |
| 1 | 0,0225 | 0,0149 | 0,0098 | 0,0064 | 0,0041 | 0,0027 | 0,0017 | 0,0011 | 0,0007 | 0,0005 |
| 2 | 0,0618 | 0,0446 | 0,0318 | 0,0223 | 0,0156 | 0,0107 | 0,0074 | 0,0050 | 0,0034 | 0,0023 |
| 3 | 0,1133 | 0,0892 | 0,0688 | 0,0521 | 0,0389 | 0,0286 | 0,0208 | 0,0150 | 0,0107 | 0,0076 |
| 4 | 0,1558 | 0,1339 | 0,1118 | 0,0912 | 0,0729 | 0,0573 | 0,0443 | 0,0337 | 0,0254 | 0,0189 |
| 5 | 0,1714 | 0,1606 | 0,1454 | 0,1277 | 0,1094 | 0,0916 | 0,0752 | 0,0607 | 0,0483 | 0,0378 |
| 6 | 0,1571 | 0,1606 | 0,1575 | 0,1490 | 0,1367 | 0,1221 | 0,1066 | 0,0911 | 0,0764 | 0,0631 |
| 7 | 0,1234 | 0,1377 | 0,1462 | 0,1490 | 0,1465 | 0,1396 | 0,1294 | 0,1171 | 0,1037 | 0,0901 |
| 8 | 0,0849 | 0,1033 | 0,1188 | 0,1304 | 0,1373 | 0,1396 | 0,1375 | 0,1318 | 0,1232 | 0,1126 |

Puede apreciarse que en la primera columna aparece los valores de x, en las columnas restantes los valores λ (lambda) correspondiendo una probabilidad **P(x;λ)** para cada x con su respectivo λ.

Por ejemplo si estamos interesado en encontrar la probabilidad Poisson de x=5, para λ=7.0 obtendríamos una probabilidad de p(x=5;λ=7.0)=0.1277.

- **Usando Excel de Microsoft Office**

  La hoja de cálculo Excel versión 10 de Microsoft Office tiene función estadística Poisson.




Se ubica en una celda vacía y escribe =POISSON.DIST el software le mostrará las distribuciones existentes mientras usted está escribiendo. Puede ver que entre paréntesis aparecen tres parámetros:

- ✓ **x**: aquí debe escribir el número de éxitos que se desea obtener.
- ✓ **media**: es el valor de lamda (λ)
- ✓ **acumulado**: verdadero o falso. (si escribe verdadero: la distribución calcula la distribución binomial acumulada desde x hasta cero; si escribe falso: la distribución Poisson solo calcula el valor puntal x).

POISSON.DIST(5,7.0,FALSO) = **0.1277**1667

Puede ver que es el mismo resultado que obtuvimos con las tablas, no obstante en algunos casos habrá pequeñas diferencias dado que las tablas contiene solo valores de probabilidad de cuadro decimales (es decir diezmilésimas) y en Excel usted puede pedirle que le muestre los decimales que quiera (usando formatos).