UNIVERSIDAD DE MANAGUA

Al más alto nivel

Estadística Inferencial
Encuentro #2
Tema: Esperanza y Decisiones

Prof.: MSc. Julio Rito Vargas A. **Grupo:CCEE y ADMVA /2016**

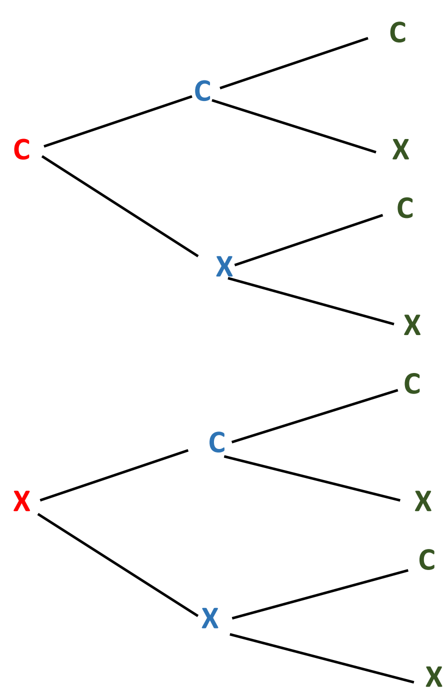
Objetivos:

- **Entender los conceptos básicos de Especio muestral, Variable aleatoria y Esperanza matemática**
- **Aplicar las reglas básicas sobre esperanza matemática en ejemplos prácticos de toma de decisiones.**

Desarrollo:
Ejemplo 1:

Para introducir los conceptos de Espacio muestral y Variable Aleatoria. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar 3 monedas, las monedas son iguales y cada una tienen dos posibilidades al caer: Cara (C) o Cruz (X)

1ra. Moneda 2da. Moneda 3ra. Moneda Suceso Probabilidad



Suceso	Probabilidad
CCC →	P(CCC)=1/2*1/2*1/2=1/8
CCX →	P(CCX)=1/2*1/2*1/2=1/8
CXC →	P(CXC)=1/2*1/2*1/2=1/8
CXX →	P(CXX)=1/2*1/2*1/2=1/8
XCC →	P(XCC)=1/2*1/2*1/2=1/8
XCX →	P(XCX)=1/2*1/2*1/2=1/8
XXC →	P(XXC)=1/2*1/2*1/2=1/8
XXX →	P(XXX)=1/2*1/2*1/2=1/8

En el gráfico pude observar todos los posibles resultados que se pueden obtener al lanzar tres monedas al aire.

A cada uno de esos posibles resultados llamaremos **suceso o evento** y todos tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ahora podemos formalizar el concepto de espacio muestral.

Espacio muestral: se define como el conjunto de todos los resultados posibles que se obtienen al realizar un experimento aleatorio.

Regularmente se denota con letra griega omega Ω

Basado en la definición podemos resumir que el espacio muestral del lanzamiento de las monedas es: **Ω**={CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}

Cada uno de los sucesos del espacio muestral del ejemplo lo vamos asociar a una probabilidad:

Sabemos que cada moneda al lanzarla tiene dos posibilidades: caer cara o caer cruz, ambas con la misma probabilidad que representaremos por P: P(C)= ½ y P(X)= ½.

Pero como nuestro experimento consiste en lanzar tres monedas y cada lanzamiento es independiente del otro: la probabilidad de cada suceso será 1/2*1/2*1/2=1/8, como se muestra en el gráfico. Es importante notar que las suma de las probabilidades de todos los sucesos del espacio muestral siempre será uno.

Ahora, supongamos que a cada uno de estos sucesos le asignamos un número entero igual al número de caras obtenidas.

Esto que acabamos de construir es una función del espacio muestral Ω en el conjunto de los números reales.

A esta función que denotaremos **X** la llamaremos **variable aleatoria**, que representa el número de caras obtenidas en el lanzamiento de 3 monedas

Ahora podemos formalizar la definición de variable aleatoria:

Variable Aleatoria: Se llama **variable aleatoria a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral Ω un número real.**

$$\mathbf{X: \Omega \rightarrow R}$$

Se utilizan letras mayúsculas X, Y, ... para designar variables aleatorias, y las respectivas minúsculas (x, y, ...) para designar valores concretos de las mismas.

Hay dos tipos de variables aleatorias: discretas y continuas:

Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria X es discreta, si solamente puede tomar un conjunto numerable de valores.

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria continua es una función X que asigna a cada resultado posible de un experimento un número real. Si X puede asumir cualquier valor en algún intervalo, se llama una variable aleatoria continua.

Ejemplo. Sea X la temperatura de una persona enferma, tomada con un termómetro de mercurio con una escala de 10° hasta 120°. Entonces X es una variable aleatoria continua.

Una vez que hemos formalizado el concepto de variable aleatoria, continuamos con el ejemplo, donde hemos dicho que la variable aleatoria discreta X es el número de caras al lanzar tres monedas.

Por lo que X puede asumir los valores 0, 1, 2 ó 3. Es decir, ninguna cara, una cara, dos caras o tres caras. Por lo que asociamos las probabilidades respectivas a cada valor de la variable aleatoria.

X Variable aleatoria discreta	Sucesos del espacio muestral	Probabilidad
0	XXX	1/8
1	CXX	1/8+1/8+1/8=3/8
	XCX	
	XXC	
2	CCX	1/8+1/8+1/8=3/8
	CXC	
	XCC	
3	CCC	1/8
		Suma= 1

ESPERANZA MATEMÁTICA DISCRETA:

Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad P(X=x), la esperanza de X viene dada por:

E[X]=$\sum_{i=1}^{n} x_i * P(X = x_i) = x_1 * P(X = x_1) + x_2 * P(X = x_2) + \cdots + x_n * P(X = x_n).$

Las probabilidades $P(X = x_i) \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \quad P(X = x_i) = 1.$ Pero en el caso de los x_i es importante tener presente que serán positivos cuando representen utilidades, triunfos o ganancias y serán negativos cuando representen pérdidas, déficit o castigos.

Propiedades de la Esperanza matemática.

Sean X e Y variables aleatorias; a y b dos constantes cualesquiera

1. $\mathrm{E}(X + c) = \mathrm{E}(X) + c$
2. $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$
3. $\mathrm{E}(aX) = a\mathrm{E}(X)$

Combinando estas propiedades, podemos ver que -

4. $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$
5. $\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y)$

Varianza y desviación estándar de la Esperanza Matemática

$\boldsymbol{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 * P(X = x_i) - [E(X)]^2$ $\qquad$ $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 * P(X = x_i) - [E(X)]^2}$

Ejemplo 2:

Se sabe por experiencia que la demanda diaria de un producto perecedero es como como se muestra en la tabla siguiente:

Número de pedidos	3	4	5	6	7	8	9
Probabilidad	0.05	0.12	0.20	0.24	0.17	0.14	0.08

Si cada artículo cuesta $35 (incluyendo el costo de transportación a la bodega), con un precio de venta en bodega de $50. Pero si permanece en la bodega al finalizar el día representa una pérdida total, ¿Cuántos artículos deberían ser almacenados en cada día a fin de maximizar la utilidad esperada?

Solución: Aplicamos la ecuación de Esperanza matemática para variable discreta

Calcularemos la Esperanza matemáticas en los casos de vender 3 artículos, 4 artículos, 5 artículos, 6 artículos, 7 artículos, 8 artículos y 9 artículos. Para posteriormente obtener las utilidades, en cada caso se obtiene la utilidad.

a. Si hay tres artículos almacenados en bodega. La probabilidad de vender 3 o más es
   - E= (3)(1)(50)=$150 venta esperada de los tres artículos
     La probabilidad 1 resulta de sumar todas las probabilidades $\sum p_i=1$.
   - Costo = 3x35 =$105 costo de los tres artículos

   La utilidad esperada es:

   - Utilidad: 150-105= **$45 utilidad esperada de vender 3 artículos**

b. Si hay cuatro artículos almacenados en bodega. Hay una probabilidad de 0.05 de que se vendan tres artículos y una probabilidad de 0.95 de que haya demanda para cuatro o más .

   - E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.95) = $197.5 venta esperada de los 4 artículos.
     La probabilidad de 0.95 resulta de la suma de las probabilidades de 0.12 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
   - Costo = 4x35 =$140 costo de los cuatro artículos

   La utilidad esperada es:

   - Utilidad: 197.5 - 140= **$57.5 utilidad esperada de vender 4 artículos**

c. Así mismo, si hay cinco artículos almacenados en bodegas, existe una probabilidad de 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.83 de que haya demanda para 5 o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.83)= $239 venta esperada de los cinco artículos.**
  La probabilidad de 0.83 resulta de la suma de las probabilidades de 0.20 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 5x35 =$175 costo de los cuatro artículos

La utilidad esperada es:

- Utilidad: 239-175= **$64.0 utilidad esperada de vender 4 artículos**

d. Así mismo, si hay seis artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.63 que se vendan 6 o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.63) =$270.5 venta esperada de los seis artículos.**
  La probabilidad de 0.63 resulta de la suma de las probabilidades de 0.24 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 6x35 =$210 costo de los seis artículos

La utilidad esperada es:

- Utilidad: 270.5-210= **$60.5 utilidad esperada de vender 6 artículos**

e. Así mismo, si hay siete artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.24 que se vendan 6 y una probabilidad de 0.39 de se vendan siete o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.24) + (7)(50)(0.39)= $290 venta esperada de los siete artículos.**
  La probabilidad de 0.39 resulta de la suma de las probabilidades de 0.17 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 7x35 =$245 costo de los siete artículos

La utilidad esperada es:

- Utilidad: 290-245= **$45 utilidad esperada de vender 7 artículos**

f. Así mismo, si hay ocho artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.24 que se vendan 6, una probabilidad de 0.17 que se vendan siete y una probabilidad 0.22 que se vendan ocho o más.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.24) + (7)(50)(0.17) + (8)(50)(0.22)= $301 venta esperada de los ocho artículos.**
  La probabilidad de 0.22 resulta de la suma de las probabilidades de 0.14 hasta 0.08 (ver la tabla de probabilidades del problema).
- Costo = 8x35 =$280 costo de los ocho artículos

La utilidad esperada es:

- Utilidad: 301-280= **$21 utilidad esperada de vender 8 artículos**

g. Así mismo, si hay nueve artículos almacenados en bodega, existe una probabilidad 0.05 de que se vendan 3, una probabilidad de 0.12 que se vendan 4, una probabilidad de 0.20 que se vendan 5 y una probabilidad de 0.24 que se vendan 6, una probabilidad de 0.17 de se vendan siete y una probabilidad 0.14 que se vendan ocho y 0.08 que se vendan 9.

- **E= (3)(50)(0.05) + (4)(50)(0.12) + (5)(50)(0.20) +(6)(50)(0.24) + (7)(50)(0.17) + (8)(50)(0.14) + (9)(50)(0.08) = $305 venta esperada de los nueve artículos.**
- Costo = 9x35 =$315 costo de los nueve artículos

La utilidad esperada es:

- Utilidad: 305-315= **-$10 utilidad esperada de vender 9 artículos**

Artículos en bodega	3	4	5	6	7	8	9
Probabilidad	0.05	0.12	0.20	0.24	0.17	0.14	0.08
Utilidad	**$45**	**$57.5**	**$64**	**$60.5**	**$45**	**$21**	**-$10**

Puede observar que las utilidades que se obtienen varían siendo la máxima cuando se ordenan 5 artículos con una utilidad de $64. Por lo que la mejor decisión es tener cinco artículos en bodegas. Ello nos garantiza la máxima utilidad esperada.

EJERCICIO DE REAFIRMACIÓN (ACTIVIDAD EN EL AULA):

Un jugador lanza dos monedas. Gana 1 ó 2 dólares si aparecen una o dos caras. Por otra parte, pierde 5 dólares si no aparece ninguna cara. Determinar la esperanza matemática del juego y si éste es favorable al jugador.

Sugerencia:

1. Construya el espacio muestral del experimento
2. Asigne las probabilidades a cada suceso del espacio muestral
3. Determine los valores de la Variable aleatoria.
4. Obtenga la esperanza matemática
5. Determine si el juego es favorable al jugador.

ACTIVIDAD EXTRACLASE:

Una variable aleatoria X puede tomar los valores 30, 40, 50 y 60 con probabilidades de 0.4, 0.2, 0.1 y 0.3 respectivamente.

a. Calcular la esperanza matemática de la v. a. X
b. Calcular la varianza de la v. a. X
c. Calcular la desviación estándar de la v. a. X
d. Sea c una constante con valor 5, calcular E(X+c) y E(cX)