ESTADÍSTICA INFERENCIAL

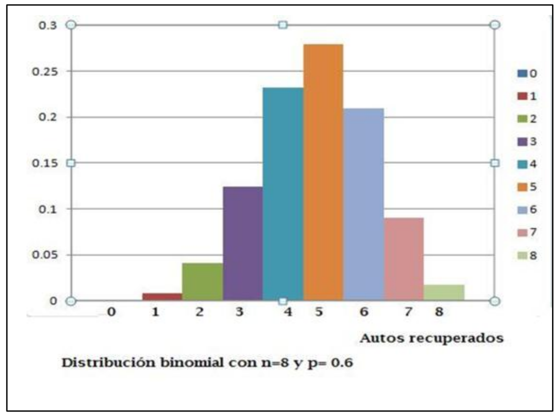
FUNCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS: BINOMIAL y POISSON

EJERCICIOS RESUELTOS DE FUNCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL USANDO TABLAS y EXCEL

Prof.: MSc. Julio R. Vargas A.

Fórmulas de probabilidades de la Distribución Binomial.

La distribución binomial se caracteriza porque su **función de probabilidad** viene dada por la expresión siguiente:



$$\boldsymbol{b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}}$$

Dónde:

x: número de éxitos (x=0,1,2,…,n)
p: probabilidad de éxito
1- p: probabilidad de fracaso.
n: tamaño de la muestra o número de ensayos.

Condiciones para una distribución binomial

Una distribución se denomina binomial cuando se cumplen las condiciones siguientes:

- El **experimento aleatorio** de base se repite n veces, y todos los resultados obtenidos son mutuamente independientes.
- En cada prueba se tiene una misma **probabilidad** de **éxito** (suceso A), expresada por **p**. Asimismo, existe en cada prueba una misma probabilidad de **fracaso** (suceso $\overline{A}$), que es igual a **1 - p**.
- El objetivo de la distribución binomial es conocer la probabilidad de que se produzca un cierto número de éxitos. La **variable aleatoria** X, que indica el número de veces que aparece el suceso A (éxito), es **discreta**, y su **recorrido** es el conjunto {0, 1, 2, 3, ..., n}.

La distribución de probabilidad acumulada se define como:

Sea **B(x;n,p)=** $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{x} b(k;n,p)}$ para X=0,1,2,…,n

Teorema: Identidades binomiales

(a) b(x;n,p) = b(n-x;,n,1-p)
(b) B(x;n,p) = 1 - B(n-x-1;n,1-p)
(c) b(x;n,p) = B(x;n,p) – B(x-1;n,p)
(d) b(x;n,p) = B(n-x;n,1-p) – B(n-x-1;n,1-p)

Para efectos de la solución de los ejercicios planteados recurriremos a las fórmulas y teoremas antes descritos de la distribución binomial.

Los ejercicios los resolveremos primeramente con tablas estadísticas y posteriormente con la hoja de cálculo **Excel** de **Microsoft Office 10.**

- **Es importante aclarar que las tablas tienen una estructura como se muestra:**

Tabla 1. Probabilidades de la distribución binomial $(n;\, p)$

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	x	$p = 0{,}1$	$p = 0{,}2$	$p = 0{,}3$	$p = 0{,}4$	$p = 0{,}5$
2	0	0,8100	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	1	0,1800	0,3200	0,4200	0,4800	0,5000
	2	0,0100	0,0400	0,0900	0,1600	0,2500
3	0	0,7290	0,5120	0,3430	0,2160	0,1250
	1	0,2430	0,3840	0,4410	0,4320	0,3750
	2	0,0270	0,0960	0,1890	0,2880	0,3750
	3	0,0010	0,0080	0,0270	0,0640	0,1250

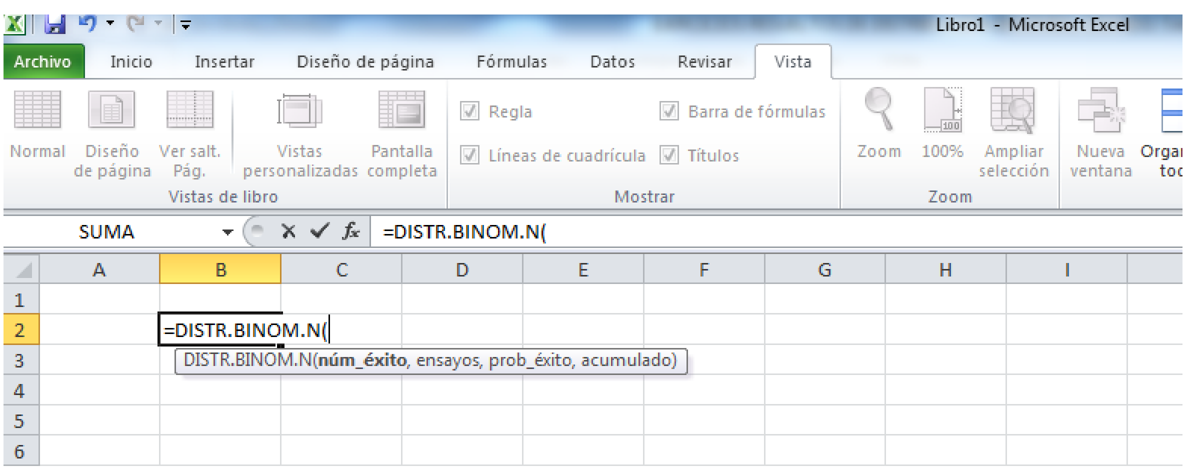
Puede apreciarse que en la primera columna aparece n en la segunda columna los valores de x por cada n y luego las columnas correspondientes a las probabilidades p.

Por ejemplo si estamos interesado en encontrar la probabilidad binomial de n=3 ensayos de los cuales x=2 son éxitos con una probabilidad de acierto de p=0.40

b(x=2;n=3,p=0.40)= 0.2880. La probabilidad que eso ocurra es de 0.2880

- **Usando Excel 10 de Microsoft Office**

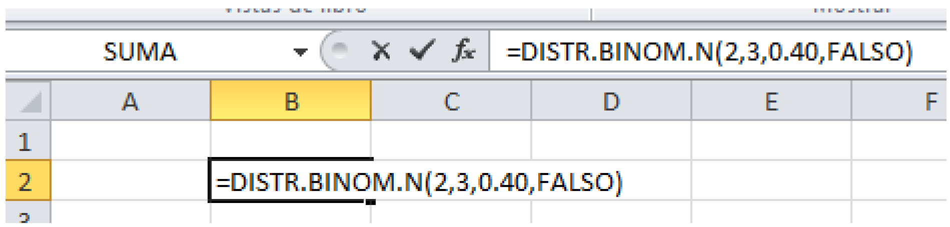
La hoja de cálculo Excel versión 10 de Microsoft Office tiene las principales funciones estadísticas.



Se ubica en una celda vacía y escribe =DISTR.BINOM.N el software le mostrará las distribuciones existentes mientras usted está escribiendo. Puede ver que entre paréntesis aparecen cuatro parámetros:

- ✓ **núm_éxitos**: aquí debe escribir el número de éxitos que se desea obtener.
- ✓ **ensayos**: es el tamaño de la muestra n
- ✓ **prob_éxito**: probabilidad p de éxito.
- ✓ **acumulado**: verdadero o falso. (si escribe verdadero: la distribución calcula la distribución binomial acumulada desde x hasta cero; si escribe falso: la distribución binomial solo calcula el valor puntal x).

Por ejemplo si estamos interesado en encontrar la probabilidad binomial de n=3 ensayos de los cuales x=2 son éxitos con una probabilidad de acierto de p=0.40



DISTR.BINOM.N(2,3,0.40,FALSO)=0.2880

Puede ver que es el mismo resultado que obtuvimos con las tablas, no obstante en algunos casos habrá pequeñas diferencias dado que las tablas contiene solo valores de probabilidad de cuadro decimales (es decir diezmilésimas) y en Excel usted puede pedirle que le muestre los decimales que quiera (usando formatos).

EJERCICIOS

E1. Sea X=número de preguntas contestadas correctamente en el test de un total de 10 preguntas. Calcular las probabilidades de contestar:

a) cinco preguntas correctamente
b) uno ó más preguntas correctamente
c) cinco o más preguntas correctamente
d) entre 3 y 6 preguntas correctamente.

Solución:

n=10
p=p(éxito)=p(pregunta contestada correctamente)=0.5, por tanto p permanece constante.
Asumiendo independencia entre las contestaciones de las preguntas, obtenemos que X~ b(10,0.5).

Entonces:

a) $P(x=5)=b(x=5,n=10,p=0.5)$
b) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-b(x=0,n=10,p=0.5)$.
c) $P(X\geq 5)=1-P(X<5)=1-P(X\leq 4)=1-B(x\leq 4,n=10,p=0.5)$.
d) $P(3\leq x\leq 6)= B(x\leq 6;n=10,p=0.5)-B(x\leq 2;n=10,p=0.5)$

Usando las tablas binomiales, obtenemos los resultados siguientes:

a) $b(x=5,n=10,p=0.5)=$ **0.2461**

b) $1-b(x=0,n=10,p=0.5)= 1 – 0.0010=$ **0.9990**

c) $1-B(x\leq 4,n=10,p=0.5)= 1 –[0.0010+0.0098+0.0439+0.1172+0.2051]=1-0.3770=$**0.6230**

d) $B(x\leq 6;n=10,p=0.5)-B(x\leq 2;n=10,p=0.5)=0.2051+0.2461+0.2051+0.1172=$**0.7735**

Usando Excel 10, obtenemos los resultados siguientes:

a) DISTR.BINOM.N(5,10,0.50,FALSO)=**0.2461**

b) **1 -** DISTR.BINOM.N(0,10,0.50,FALSO)=1-0.0010=**0.9990**

c) **1-** DISTR.BINOM.N(4,10,0.50,VERDADERO)=1-0.3770=**0.6230**

d) DISTR.BINOM.N(6,10,0.50,VERDADERO)- DISTR.BINOM.N(2,10,0.50,VERDADERO)=0.8281-0.0547=**0.7734**

E2. Un ingeniero que labora en el departamento de control de calidad de una empresa eléctrica, inspecciona una muestra al azar de 10 alternadores de un lote. Si el 20% de los alternadores del lote están defectuosos. Cuál es la probabilidad de que en la muestra,

a) ninguno esté defectuoso,
b) uno salga defectuoso,
c) al menos dos salgan defectuosos
d) más de tres estén con defectos
e) no más de tres estén con defectos.

Solución usando tablas binomiales:

a) $P(x=0)=b(x=0;n=10,p=0.20)=$ **0.1074**

b) $P(x=1)=b(x=1;n=10,p=0.20)=$ **0.2684**

c) $P(x\geq 2)=1-P(x\leq 1)=1-B(x\leq 1;n=10,p=0.20)=1-[0.1074+0.2684]=1-0.3758=$**0.6242**

d) $P(x\geq 3)=1-P(x\leq 2)= 1-B(x\leq 2;n=10,p=0.20)= 1 - [0.1074+0.2684+0.3020]=1-0.6778=$**0.3222**

e) $P(x\leq 3)= B(x\leq 3;n=10,p=0.20)= 0.1074 + 0.2684 + 0.3020 + 0.2013=$**0.8791**

Solución usando Excel 10, obtenemos los resultados siguientes:

a) DISTR.BINOM.N(0,10,0.20,FALSO)=**0.10737≡ 0.1734**
b) DISTR.BINOM.N(1,10,0.20,FALSO)=0.26844**≡ 0.2684**
c) 1- DISTR.BINOM.N(1,10,0.20,VERDADERO)=1- 0.3758=**0.6242**
d) **1 -** DISTR.BINOM.N(2,10,0.20,VERDADERO)= **1 – 0.6778=0.3222**
e) DISTR.BINOM.N(3,10,0.20,VERDADERO)=**0.8791**

E3. La probabilidad de que un CD de música dure al menos un año sin que falle es de 0.90, calcular la probabilidad de que en una muestra de 15,

a) 12 duren al menos un año,
b) a lo más 5 duren al menos un año,
c) al menos 2 duren al menos un año.

Solución:

a) P(x=12)=b(x=12;n=15,p=0.90)= **= B(n-x;n,1-p) – B(n-x-1;n,1-p)**

b) P(x≤5)=B(x≤5;n=15,p=0.90)= **= 1- B(n-x-1;n,1-p)**

c) P(x≥2)=1-P(x≤1)=1-B(x≤1;n=15,p=0.90)=1-[1-B(n-x-1;n=15,1-p)]=B(n-x-1;n=15,1-p)

Solución usando tablas binomiales:

a) B(3;n=15,0.10) – B(2;n=15,p=0.10)= b(x=3;n=15,0.10)=**0.1285**
b) **1-B(9;n=15,0.10)=1-[0.2059+0.3432+0.2669+0.1285+0.0428+ 0.0105+ 0.0019+ 0.0003+ 0.0000+ 0.0000]=1-1=0**
c) B(15-2-1;15,0.10)=B(12;15;0.10)=0.0.2059+**+0.3432+0.2669+0.1285+0.0428+ 0.0105+ 0.0019+ 0.0003+ 0.0000+ 0.0000+0.0000+0.0000+0.0000=1**

Solución usando Excel 10, obtenemos los resultados siguientes:

a) b(x=12;n=15,p=0.90)=DISTR.BINOM.N(12,15,0.90,FALSO)=0.1285
b) B(x≤5;n=15,p=0.90)=DISTR.BINOM.N(12,15,0.90,VERDADERO)=0.0000002 (casi 0)
c) 1-B(x≤1;n=15,p=0.90)=1- DISTR.BINOM.N(1,15,0.90,VERDADERO)=1-0.000=1

E4. Si 15 de 50 proyectos de viviendas violan el código de construcción, ¿cuál es la probabilidad de que un inspector de viviendas, que selecciona aleatoriamente a cuatro de ellas, descubra que:

a) ninguna de las casas viola el código de construcción
b) una viola el código de construcción
c) dos violan el código de construcción
d) al menos tres violan el código de construcción

Solución:

n= 4
p= 15/50 = 0.30

Solución usando tablas binomiales:

- **a)** P(x=0)= b(x=0;n=4,p=0.3) =**0.2401**
- **b)** P(x=1)=b(x=1;n=4,p=0.3)=**0.4116**
- **c)** P(x=2)=b(x=2;n=4,p=0.3)=**0.2646**
- **d)** P(x≥3)=1-B(x≤2;n=4,p=0.30)=1-[0.2401+0.4116+0.2646]=1-0.9163=**0.0837**

Solución usando Excel 10, obtenemos los resultados siguientes:

- **a)** P(x=0)= b(x=0;n=4,p=0.3) = DISTR.BINOM.N(0,4,0.30,FALSO)=**0.2401**
- **b)** P(x=1)=b(x=1;n=4,p=0.3)= = DISTR.BINOM.N(0,4,0.30,FALSO)=**0.4116**
- **c)** P(x=2)=b(x=2;n=4,p=0.3)= = DISTR.BINOM.N(0,4,0.30,FALSO)=**0.2646**
- **d)** P(x≥3)=1-B(x≤2;n=4,p=0.30)=1- DISTR.BINOM.N(2,4,0.30,VERDADERO)=**0.0837**

¥¥

EJERCICIOS RESUELTOS DE DISTRIBUCIÓN POISSON USANDO TABLAS y EXCEL

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Esta distribución es una de las más importantes distribuciones de variable discreta. Sus principales aplicaciones hacen referencia a la modelización de situaciones en las que nos interesa determinar el número de hechos de cierto tipo que se pueden producir en un intervalo de tiempo o de espacio o de área, bajo supuestos de aleatoriedad y ciertas circunstancias restrictivas. Otro de sus usos frecuentes es la consideración límite de procesos dicotómicos reiterados un gran número de veces si la probabilidad de obtener un éxito es muy pequeña.

Esta distribución se puede hacer derivar de un proceso experimental de observación en el que tengamos las siguientes características

- En este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, espacio, pieza, etc.
- Si n≥20 y p≤0.05; Si n≥100, la aproximación a Poisson es generalmente excelente a condición de que np≤10.
- Número de defectos de una tela por m^2

- Número de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día, hora, minuto, etc, etc.
- Número de bacterias por cm^2 de cultivo
- Número de llamadas telefónicas a un conmutador por hora, minuto, etc.
- Número de llegadas de embarcaciones a un puerto por día, mes, etc.

Función de Poisson:

Para determinar la probabilidad de que ocurran x éxitos por unidad de tiempo, área, o producto, la fórmula a utilizar sería:

$$P(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{para } x=0,1,2,3,\ldots$$

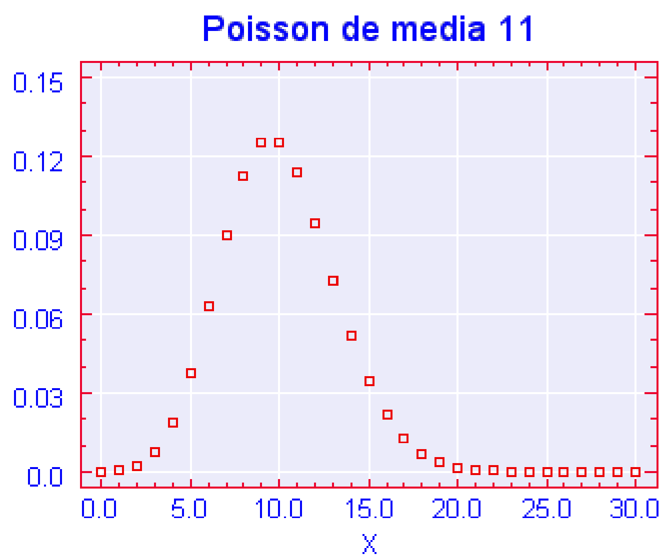
donde:

p(*x*,λ) = probabilidad de que ocurran x éxitos, cuando el número promedio de ocurrencia de ellos es λ

λ (lambda)= media o promedio de éxitos por unidad de tiempo, área o producto (λ=np)

e = 2.718

x = variable que nos denota el número de éxitos que se desea que ocurra



La representación gráfica para un modelo de media 11 sería la adjunta . Obsérvense los valores próximos en la media y su forma parecida a la campana de Gauss , en definitiva , a la distribución normal.

La **función de distribución** vendrá dada por :

$$P(X;\lambda) = \sum_{x=0}^{X} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Los ejercicios de Probabilidad de Poisson, los resolveremos primeramente con tablas estadísticas y posteriormente con la hoja de cálculo **Excel** de **Microsoft Office 10.**

- **Es importante aclarar que las tablas de Poisson tienen una estructura como se muestra:**

Tabla 2 (Continuación). Probabilidades de la distribución de Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

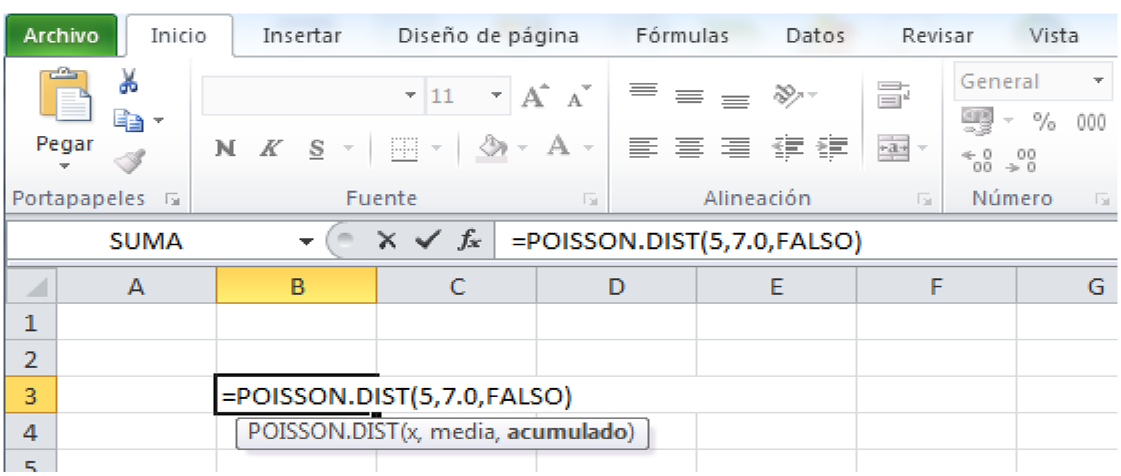
x	$\lambda = 5{,}5$	$\lambda = 6{,}0$	$\lambda = 6{,}5$	$\lambda = 7{,}0$	$\lambda = 7{,}5$	$\lambda = 8{,}0$	$\lambda = 8{,}5$	$\lambda = 9{,}0$	$\lambda = 9{,}5$	$\lambda = 10{,}0$
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027	0,0017	0,0011	0,0007	0,0005
2	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107	0,0074	0,0050	0,0034	0,0023
3	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286	0,0208	0,0150	0,0107	0,0076
4	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573	0,0443	0,0337	0,0254	0,0189
5	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916	0,0752	0,0607	0,0483	0,0378
6	0,1571	0,1606	0,1575	0,1490	0,1367	0,1221	0,1066	0,0911	0,0764	0,0631
7	0,1234	0,1377	0,1462	0,1490	0,1465	0,1396	0,1294	0,1171	0,1037	0,0901
8	0,0849	0,1033	0,1188	0,1304	0,1373	0,1396	0,1375	0,1318	0,1232	0,1126

Puede apreciarse que en la primera columna aparece los valores de x, en las columnas restantes los valores λ (lambda) correspondiendo una probabilidad **P(x;λ)** para cada x con su respectivo λ.

Por ejemplo si estamos interesado en encontrar la probabilidad Poisson de x=5, para (lambda) λ=7.0 obtendríamos una probabilidad de p(x=5;λ=7.0)=0.1277.

- **Usando Excel 10 de Microsoft Office**

La hoja de cálculo Excel versión 10 de Microsoft Office tiene función estadística Poisson.



Se ubica en una celda vacía y escribe =POISSON.DIST el software le mostrará las distribuciones existentes mientras usted está escribiendo. Puede ver que entre paréntesis aparecen tres parámetros:

- ✓ **x**: aquí debe escribir el número de éxitos que se desea obtener.
- ✓ **media**: es el valor de lamda (λ)
- ✓ **acumulado**: verdadero o falso. (si escribe verdadero: la distribución calcula la distribución binomial acumulada desde x hasta cero; si escribe falso: la distribución Poisson solo calcula el valor puntal x).

POISSON.DIST(5,7.0,FALSO) = **0.1277**1667

Puede ver que es el mismo resultado que obtuvimos con las tablas, no obstante en algunos casos habrá pequeñas diferencias dado que las tablas contiene solo valores de probabilidad de cuadro decimales (es decir diezmilésimas) y en Excel usted puede pedirle que le muestre los decimales que quiera (usando formatos).

E1. Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho,

1. ¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?
2. ¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?
3. ¿cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

Solución:

- **Usando las tablas estadística de Poisson**

Sea la variable aleatoria X , con distribución de Poisson con parámetro $\lambda = [X] = 8$, que determina el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento.

1. Considerando que se cumplen ciertas condiciones de regularidad, podemos asumir que una variable Z que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir 25 horas de funcionamiento sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_Z = 2$. Por lo tanto, la probabilidad deseada es la siguiente:

   $P(Z=1;\lambda=2)= 0.2707$

2. Análogamente, definimos una variable aleatoria *U* con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_U = 4$, que mide el número de componentes que fallan antes de cumplir las 50 horas de funcionamiento. Se tiene entonces que:

   $P(U\leq 2;\lambda=4)=0.0183 + 0.0733 + 0.1465 = \mathbf{0.2381}$

3. De la misma forma, definiendo una variable aleatoria V con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_V=10$ se obtiene:

$P(V \geq 10;\lambda=10)=1 - P(V<10;\ \lambda=10)=1 - [0.0000+ 0.0005 + 0.0023 + 0.0076 + 0.0189 + 0.0378 + 0.0631+ 0.0901 + 0.1126 + 0.1251]=1-0.4580=$**0.5420**

- **Solución usando Excel 10,** obtenemos los resultados siguientes:
  1. $P(Z=1;\lambda=2)$= POISSON.DIST(1,2,FALSO)=0.2707
  2. $P(U \leq 2;\lambda=4)$= POISSON.DIST(2,4,VERDADERO)=**0.2381**
  3. $P(V \geq 10;\lambda=10)=1 - P(V<10;\ \lambda=10)=1-$ POISSON.DIST(9,10,VERDADERO)=**0.54207**

E2. Supongamos que el número de imperfecciones en un alambre delgado de cobre sigue una distribución Poisson con una media de 2.4 imperfecciones por milímetro.

(a) Determine la probabilidad de 2 imperfecciones en un milímetro de alambre.
(b) Determine la probabilidad de 10 imperfecciones en 5 milímetros de alambre.
(c) Determine la probabilidad de al menos una imperfección en 2 mm de alambre

Solución:

- **Usando las tablas estadística de Poisson**
  (a) $P(x=2;\lambda=2.4)$= **0.2613**
  (b) Sea que X denote el número de imperfecciones en 5 milímetro de alambre. Entonces, X tiene una distribución Poisson con λ=5mmx2.4 imperfecciones/mm λ = 12.0 imperfecciones. Entonces $P(x=10;\lambda=12.0)$=**0.1048.**
  (c) Sea que x denote el número de imperfecciones en 2 milímetros de alambra. Entonces, X tiene una distribución de Poisson con λ=2mmx2.4 imperfecciones xmm =λ=4.8 imperfecciones. Entonces $P(x \geq 1;\lambda=4.8)=1-P(x<1;\lambda=4.8)=1-0.0082=$**0.9918.**
- **Solución usando Excel 10,** obtenemos los resultados siguientes:
  (a) $P(x=2;\lambda=2.4)$= POISSON.DIST(2,2.4,FALSO)=**0.2613**
  (b) $P(x=10;\lambda=12.0)$= POISSON.DIST(10,12,FALSO)=**0.1048.**
  (c) $P(x \geq 1;\lambda=4.8)=1-P(x<1;\lambda=4.8)=1-$ POISSON.DIST(0,4.8,VERDADERO)=**0.9918**

E3. La contaminación constituye un problema en la fabricación de discos de almacenamiento óptico. El número de partículas de contaminación que ocurren en un disco óptico tiene una distribución de Poisson y el número promedio de partículas por centímetro cuadrado de superficie del disco es 0.1. El área de un disco bajo estudio es 100 centímetros cuadrados.

(a) Encuentre la probabilidad de que ocurran 12 partículas en el área del disco bajo estudio.
(b) La probabilidad de que ocurran cero partículas en el área del disco bajo estudio
(c) Determine la probabilidad de que 12 o menos partículas ocurran en el área del disco bajo estudio.

Solución:

λ =np = 100 cm^2 (0.1) partículas/cm^2 =10 partículas

- **Usando las tablas estadística de Poisson**
  - **(a)** $P(x=12;\lambda=10)=$ **0.0948**
  - **(b)** $P(x=0;\lambda=10)=$ **0.0000**
  - **(c)** **$P(x\leq 12;$** $\lambda=10)=0.0000+0.0005+ \ldots + 0.0948=$ **0.7916**
- **Solución usando Excel 10,** obtenemos los resultados siguientes:
  - (a) $P(x=12;\lambda=10)$=POISSON.DIST(12,10,FALSO)= **0.0948**
  - **(d)** $P(x=0;\lambda=10)$= POISSON.DIST(12,10,FALSO)= **0.000045**
  - (b) **$P(x\leq 12;$** $\lambda=10)$= POISSON.DIST(12,10,VERDADERO)=**0.7916**