

## PROBLEMAS RESUELTOS DE TEORÍA DE COLAS.

### (M/M/1: Un servidor con llegadas de Poisson y tiempos de servicio Exponenciales)

Prof.: MSc. Julio Rito Vargas A.

1. Suponga que en una estación con un solo servidor llegan en promedio 45 clientes por hora, Se tiene capacidad para atender en promedio a 60 clientes por hora. Se sabe que los clientes esperan en promedio 3 minutos en la cola.  
Se solicita: a) Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema. b) Número promedio de clientes en la cola. c) Número promedio de clientes en el Sistema en un momento dado.

**Solución:** Se conoce la siguiente información:

$\lambda = 45$  clientes/hora (media de llegada de los clientes) =  $45/60$  clientes/minutos

$\mu = 60$  clientes/hora (media de servicio a los clientes) =  $60/60$  clientes/minutos =

$W_q = 3$  minutos (tiempo promedio de espera de un cliente en la cola)

- a) Para calcular el tiempo promedio que un cliente pasa en el Sistema ( $W_s$ ). Lo podemos calcular a partir de  $W_q$  y  $\mu$ .

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 3 \text{ minutos} + \frac{1}{1} = 3 + 1 = 4 \text{ minutos}$$

Es decir en promedio un cliente pasa 4 minutos en el Sistema: distribuidos así 3 minutos pasa esperando en la cola + 1 minutos en servicio.

- b) Para calcular el número de clientes en la cola ( $L_q$ ), usaremos la fórmula siguiente:  
 $L_q = \lambda W_q$ .

$$L_q = \lambda * W_q = 0.75 \frac{\text{clientes}}{\text{minutos}} * 3 \text{ minutos} = 2.25 \text{ clientes.}$$

Es decir los cálculos nos muestran que en la cola puede haber más de dos clientes en la cola.

- c) Para calcular cual es el número de clientes en la cola ( $L_s$ ). Lo podemos hacer con la fórmula:  $L_s = \lambda W_s$ .

$$L_s = \lambda * W_s = 0.75 \frac{\text{cliente}}{\text{minutos}} * 4 \text{ minutos} = 3 \text{ clientes}$$

Es decir en promedio hay tres clientes en el sistema, como se nos ha dicho que solo hay un servidor, sabemos que solo un cliente puede estar en servicio, por lo que los demás deben estar en la cola. Esto indica que hay dos clientes en espera.

2. Suponga un restaurante de comidas rápidas al cual llegan en promedio 100 clientes por hora. Se tiene capacidad para atender en promedio a 150 clientes por hora. Se sabe que los clientes esperan en promedio 2 minutos en la cola. Calcule las medidas de desempeño del sistema
- ¿Cuál es la probabilidad que el sistema este ocioso?
  - ¿Cuál es la probabilidad que un cliente llegue y tenga que esperar, porque el sistema está ocupado?
  - ¿Cuál es el número promedio de clientes en la cola?
  - ¿Cuál es la probabilidad que hayan 10 clientes en la cola?

**Solución:** Se conoce la siguiente información:

$\lambda = 100$  clientes/hora (media de llegada de los clientes) =  $100/60$  clientes/minutos  
 $\mu = 150$  clientes/hora (media de servicio a los clientes) =  $150/60$  clientes/minutos =  
 $W_q = 2$  minutos (tiempo promedio de espera de un cliente en la cola)

- a) Para conocer cuál es la probabilidad de que el sistema este ocioso, primero conoceremos, cual es la probabilidad que esté ocupado o factor de utilización del sistema.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100 \text{ cliente/hora}}{150 \text{ cliente/hora}} = 0.66 = 66.7\%$$

este porcentaje representa tiempo que el sistema está ocupado. Es decir  $(1 - \rho)$  representa el tiempo ocioso del sistema, es decir  $1 - 0.667 = 0.333 = 33.3\%$  el sistema permanece ocioso.

- b) La probabilidad que un cliente llegue y tenga que esperar es suponer que estará como primer cliente en la cola. Usaremos la fórmula:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Para nuestro caso  $n=1$  y la formula se convierte en:

$$P_1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 = \left(1 - \frac{100}{150}\right) \left(\frac{100}{150}\right)^1 = (1 - 0.667)(0.667) = 0.222 = 22.2\%$$

Es decir existe un 22.2% de posibilidad que haya un cliente en la cola esperando ser atendido.

- c) Ahora requerimos calcular el número de clientes en la línea de espera.

$$L_q = \lambda * W_q = 1.667 \frac{\text{clientes}}{\text{minutos}} * 2 \text{ minutos} = 3.334 \text{ clientes} \approx 4 \text{ clientes en la cola.}$$

Es decir existe la posibilidad de llegar a tener un promedio de 4 clientes en la línea de espera.

- d) La probabilidad de que hayan 10 clientes en la cola, como hemos visto existe un promedio de tener hasta 4 clientes en la cola que hayan más de 4 las probabilidades serán muy pequeñas, para ese cálculo haremos uso de la fórmula que usamos en el inciso b de este mismo ejemplo.

$$P_{10} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} = \left(1 - \frac{100}{150}\right) \left(\frac{100}{150}\right)^{10} = (1 - 0.667)(0.667)^{10} = 0.0058 = 0.58\% \text{ (lo cual es casi cero). Es decir es muy remoto o poco probable que pueda haber 10 clientes en la línea de espera.}$$

3. Un lava carro puede atender un auto cada 5 minutos y la tasa media de llegadas es de 9 autos por hora. Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/M/1. Además la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema, la probabilidad de tener una cola de más de 3 clientes y la probabilidad de esperar más de 30 minutos en la cola y en el sistema

**Solución:** Se conoce la siguiente información:

**$\lambda = 9$  clientes/hora (media de servicio a los clientes) = 0.15 clientes/minutos**

**$\mu = 0.2$  clientes/minutos (media de llegada de los clientes)**

- a) Vamos calcular el factor de desempeño del sistema calculando  $\rho$ .

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.15 \text{ cliente/minutos}}{0.20 \text{ cliente/minutos}} = 0.75 = 75\%$ . El sistema está ocupado el 75% del tiempo. O sea pasa un 25% ocioso. Es decir la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema es cuando el sistema está vacío y eso puede ocurrir con una probabilidad del 25%. Su cálculo puede hacerse directamente con la fórmula:

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 = \left(1 - \frac{0.15}{0.2}\right) = 0.25 = 25\%$$

- b) La probabilidad de tener una cola de más de 3 clientes

$$P^0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 = (0.25)(0.75)^2 = 0.25$$

$$P^1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 = (0.25)(0.75)^1 = 0.1875$$

$$P^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = (0.25)(0.75)^2 = 0.1406$$

$$P^3 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 = (0.25)(0.75)^3 = 0.1055$$

La probabilidad que haya más de tres clientes en el Sistema, implica que debemos conocer la Probabilidad que haya cero, uno, dos y tres clientes. La diferencia con 1. Será la probabilidad que hayan más de tres.

$$P(L_s > 3) = 1 - (P^0 + P^1 + P^2 + P^3) = 1 - (0.25 + 0.1875 + 0.1406 + 0.1055) = 1 - 0.6836 = \mathbf{0.3164}$$

c) La probabilidad de esperar más de 30 minutos en la cola.

Primero calcularemos el tiempo promedio que un cliente espera en la cola.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0.15}{0.2(0.2 - 0.15)} = \frac{0.15}{0.01} = 15 \text{ minutos (es el tiempo promedio que un cliente tiene que esperar en la cola)}$$

Ahora vamos a calcular tiempo (t) de espera sea mayor de 30 minutos.

$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$  Vamos aplicar esta ecuación para calcular dicha probabilidad.

$$P(W_q > 30) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = (0.75) e^{-0.2(1-0.75)30} = (0.75)e^{-1.5} = (0.75)(0.2231) = 0.167 = 16.7\% \text{ (COMO PUEDE VER LA PROBABILIDAD ES BAJA)}$$

d) La probabilidad de esperar más de 30 minutos en el Sistema.

$P(W_s > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}$  Vamos aplicar esta ecuación para calcular dicha probabilidad.

$$P(W_s > 30) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-0.2(1-0.75)30} = e^{-1.5} = 0.2231 = 22.3\% \text{ (COMO PUEDE VER LA PROBABILIDAD ES BAJA, pero es más alta que la probabilidad de que el tiempo promedio que un cliente espere más de 30 minutos en la cola).}$$

4. Un promedio de 10 automóviles por hora llegan a un cajero con un solo servidor que proporciona servicio sin que uno descienda del automóvil. Suponga que el tiempo de servicio promedio por cada cliente es 4 minutos, y que tanto los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicios son exponenciales. Conteste las preguntas siguientes:

- ¿Cuál es la probabilidad que el cajero esté ocioso?
- ¿Cuál es el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero? (se considera que un automóvil que está siendo atendido no está en la cola esperando)
- ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco, (incluyendo el tiempo de servicio)?
- ¿Cuántos clientes atenderá en promedio el cajero por hora?

**Solución:** Se conoce la siguiente información:

$$\lambda = 10 \text{ clientes/hora (media de llegada de los clientes)} = 1/6 \text{ clientes/minutos}$$

$\mu = 1 \text{ cliente}/4 \text{ minutos}$  (media de servicio de los clientes) =  $1/4$  cliente/minuto

- a) Por tanto  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3} = 66.67\%$  factor de utilización del sistema. Es decir que el sistema permanece ocioso el 33.33%.

- b) ¿Cuál es el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero?

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1/6}{1/4(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})} = \frac{4}{3} = 1.333 \text{ Puede haber 2 autos en la cola.}$$

- c) ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco (incluyendo el tiempo de servicio)?

Nos preguntan por el tiempo promedio que el cliente pasa en el sistema.  $W_s$ .

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{1/12} = 12 \text{ minutos pasa el cliente en el sistema.}$$

- d) ¿Cuántos clientes atenderá en promedio el cajero por hora?

Si el cajero siempre estuviera ocupado, atendería un promedio de  $\mu = 15$  clientes por hora. Según la solución encontrada en el inciso a ( $1/4 * 60 = 15$ ), el cajero está ocupado  $2/3$  del tiempo. Por tanto dentro de cada hora, el cajero atenderá un promedio de  $(2/3)(15) = 10$  clientes. Esto es  $\rho * \mu = 2/3 * 15 = 10$  clientes.

5. En el departamento de emergencia de un hospital los pacientes llegan con una distribución de probabilidad Poisson a una media de 3 clientes por hora. El médico que está en dicho departamento los atiende con una frecuencia de servicio exponencial a una tasa media de 4 clientes por hora. ¿Contrataría o no a un segundo médico?

Determine:

- Razón de utilización del sistema ( $\rho$ ).
- Probabilidad de que no se encuentren pacientes en el sistema.
- Probabilidad de que existan 3 pacientes en el sistema ( $P_3$ ).
- Tiempo total del cliente en el sistema ( $W_s$ ).
- Tiempo total de espera por en la cola ( $W_q$ ).
- El número de pacientes en el sistema en un momento dado ( $L_s$ ).
- El número de pacientes en el sistema esperando por servicio ( $L_q$ ).
- Probabilidad de que el cliente se espere más de 1 hora en el sistema [ $W_s > 1$ ]

### SOLUCION:

Población = infinita

Línea de espera = infinita

Tasa de llegadas =  $\lambda = 3$  pacientes/hora

Tasa de servicio=  $\mu = 4$  pacientes/hora

- a.  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$  utilización del sistema
  - b.  $1 - \rho = 1 - 0.75 = 0.25 = 25\%$  probabilidad que el sistema este ocioso o ningún paciente en el sistema.
  - c.  $P_3 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^3 = (0.25)(0.421875) = 0.105$  probabilidad que hayan 3 clientes en el sistema.
  - d.  $W_s = \lambda W_q = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4 - 3} = 1$  hora.
  - e.  $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4(4 - 3)} = 0.75$  hora (45 minutos) tiempo promedio de espera.
  - f.  $L_s = \lambda W_s = 3 \frac{\text{pacientes}}{\text{hora}} \times 1 \text{ hora} = 3$  pacientes en el sistema
  - g.  $L_q = \lambda W_q = 3 \frac{\text{pacientes}}{\text{hora}} \times 0.75 \text{ hora} = 2.25$  pacientes en la cola
  - h.  $P(W_s > 1 \text{ hora}) = e^{-\mu(1 - \rho)t} = e^{-4(1 - 0.75)(1)} = 0.3678$
6. Durante un período de 8 horas, llegaron 96 carros a la estación de servicio de Joe. Suponiendo que el tiempo entre llegadas tiene una distribución exponencial, use los datos proporcionados para estimar:
- a) El valor de la frecuencia de llegadas.
  - b) El tiempo medio entre llegadas.
  - c) La razón media de llegadas

**Solución:**

Población = infinita  
Línea de espera = infinita  
Tasa de llegadas constante =  $\lambda$   
Tasa de servicio constante =  $\mu$

- a. Sabemos que 96 carros llegan en 8 horas, necesitamos saber cuántos carros llegan en una hora. Para obtener la tasa de llegada por hora.

$$\lambda = \frac{96 \text{ carros}}{8 \text{ horas}} = 12 \text{ carros/hora}$$

- b. Tiempo medio entre llegadas.

**Esto se saca haciendo: la inversa de la tasa de llegada.**

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{12} = 0.0833 \text{ horas}$$

- c. La razón media de llegada

$$\lambda n = \lambda = 12 \frac{\text{carros}}{\text{hora}}$$

7. Una computadora procesa los trabajos que se le asignan sobre la base "primero en llegar primero ser atendido (FIFO=PEPS). Los trabajos llegan con una distribución Poisson con promedio de tiempo entre llegadas de cinco minutos. En el procesamiento de los trabajos consiste en que ningún trabajo pase más de seis minutos promedio en el sistema. ¿Qué tan rápido debe de trabajar el procesador para cumplir con este objetivo?

**Solución:**

**Datos:**

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5} \text{ min} \left( 60 \frac{\text{min}}{\text{hora}} \right) = \frac{60}{5}$$

**Entonces:  $\lambda = 12$  trabajos/hora**

$W_s$  : tiempo promedio que tardan los trabajos en el sistema.

$W_s = 6 \text{ min} = 6/60 = 0.1 \text{ hora}$

**Nos piden el tiempo del servicio  $\mu$ ?**

Población = infinita

Línea de espera = infinita

Tasa de llegadas constante =  $\lambda$

Tasa de servicio constante =  $\mu$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_s(\mu - \lambda) = 1$$

$$\mu - \lambda = \frac{1}{W_s}$$

$$\mu = \frac{1}{W_s} + \lambda$$

$$\mu = \frac{1}{0.1} + 12$$

$$\mu = 10 + 12$$

**$\mu = 22$  trabajos/hora; el procesador debe sacar 22 trabajos por hora. Para que los trabajos tarden en promedio 6 minutos en el sistema.**

8. Actualmente una gasolinera tiene 2 bombas y está considerando agregar una tercera. Los vehículos llegan al sistema con un promedio de 1 cada 10 minutos, cada vehículo requiere de un promedio de 5 minutos para ser atendido. Supóngase que los vehículos llegan de acuerdo con una distribución Poisson y que el tiempo necesario para prestar el servicio se distribuye en forma exponencial.
- Determine la razón de utilización del sistema. ( $\rho$ )
  - ¿Cuál sería el efecto sobre la línea de espera si se agrega una tercera bomba?

c) ¿Cómo se evaluarían los costos en esta situación?

**Solución:**

Población = infinita  
Línea de espera = infinita  
Tasa de llegadas constante =  $\lambda$   
Tasa de servicio constante =  $\mu$

**Datos:**

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} \times 60 \frac{\text{min}}{\text{hora}} \rightarrow \lambda = 6 \text{ cliente/hora}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{5} \text{min} \times 60 \rightarrow \mu = 12 \text{ clientes/hora}$$

En este problema hay que notar que son dos servidores ( $s=2$ ) que están atendiendo por lo que la fórmula para calcular la utilización del sistema será:

- a)  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{6}{2 \times 12} = 0.25 = 25\%$  El sistema está utilizado solo en un 25% o sea pasa ocioso el 75% del tiempo.
- b) ¿Cuál sería el efecto sobre la línea de espera si se agrega una tercera bomba?  
Calcularemos  $L_q$  para conocer el número de clientes en la cola.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{6}{12(12 - 6)} = \frac{6}{12(6)} = 0.0833 \text{ horas} = 5 \text{ min (tiempo de espera en la cola)}$$
$$L_q = \lambda W_q = 6 \times 0.0833 = 0.5 \text{ cliente.}$$

En relación a la pregunta c) no se justifica la instalación de nueva bomba, dado que el sistema está subutilizado, lo podemos ver en el tiempo de espera y el número de cliente en el sistema en un momento dado.

En promedio un cliente espera 5 minutos en la cola y nunca hay más de un cliente en la cola.

9. Considere una oficina de inmigración. Suponiendo que el modelo básico es una aproximación razonable de la operación, recuerde que si la agente estuviese ocupada todo el tiempo procesaría 120 ingresos durante su turno de 8 horas. Si a su oficina llega un promedio de un ingreso cada 6 minutos, encuentre:
- a) El número esperado en el sistema
  - b) El número esperado en la fila
  - c) El tiempo previsto de línea de espera
  - d) El tiempo previsto de espera
  - e) La probabilidad de que el sistema este vacío

**Solución:**

Población = infinita  
Línea de espera = infinita  
Tasa de llegadas constante =  $\lambda$   
Tasa de servicio constante =  $\mu$



**Datos:**

$$1/\lambda = 6 \text{ minutos} / 60 \text{ hora}$$

$$\lambda = 10 \text{ /hora}$$

$$\mu = 120/8 = 15 \text{ clientes/hora}$$

- a)  $L_s = \lambda W_s = 10 * 0.2 \text{ horas/personas} = 2 \text{ personas}$
- b)  $L_q = \lambda W_q = 10 * 0.1333 \text{ horas/personas} = 1.33 \text{ personas}$
- c)  $W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15 - 10} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ horas/persona}$
- d)  $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10}{15(15 - 10)} = \frac{1}{75} = 0.1333 \text{ horas/personas}$

10. Suponga que todos los dueños de automóvil acuden a la gasolinera cuando sus tanques están a la mitad. En el momento actual llega un promedio de 7.5 clientes por hora a una gasolinera que tiene una sola bomba. Se requiere un promedio de 4 minutos para servir a un automóvil. Suponga que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicios son exponenciales.

- a) Calcule  $L_s$  y  $W_s$  para los tiempos actuales.
- b) Suponga que hay un déficit de gasolina y que hay compras de pánico. Para modelar este fenómeno, suponga que todos los dueños de automóviles compran ahora gasolina cuando sus tanques tienen  $\frac{3}{4}$  de combustible. Como cada dueño pone ahora menos gasolina en el tanque cada vez que acude a la gasolinera, supongamos que el tiempo de servicio promedio se reduce a 3 minutos y un tercio. Qué tanto afectan a  $L$  y  $W$  las compras de pánico?

**Solución:**

- Tenemos un sistema M/M/1 con  $\lambda = 7.5$  automóviles por hora y  $\mu = 15$  (60/4) automóviles por hora. Por lo tanto

$$\rho = \frac{7.5}{15} = 0.50 = 50\% \quad \text{Tiempo que la bomba pasa ocupada.}$$

$$L_s = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0.50}{1 - 0.50} = 1 \quad \text{Promedio de clientes presentes en el sistema}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{7.5} = 0.13 \text{ horas}$$

(Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola).

Por tanto bajo estas circunstancias todo está bajo control.

$\lambda = 2(7.5) = 15$  automóviles por hora (esto se infiere porque cada dueño llenará su tanque dos veces). Ahora

$$\mu = \frac{60}{3.333} \approx 18$$

Automóviles por hora.  $\rho = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} = 0.83333 = 83.3\%$  Entonces.

$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5/6}{1-5/6} = 5$  Automóviles estarán como máximo en el sistema en un momento dado

$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ hora} = 20 \text{ min}$  Esto es el tiempo que los clientes tardan en el sistema.