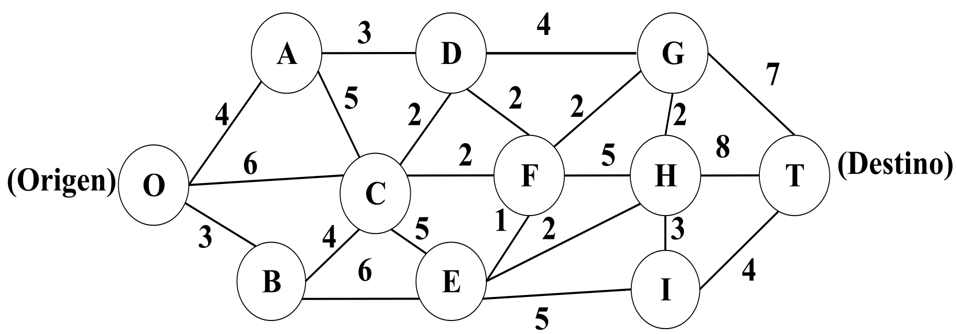
<u>**PROBLEMAS RESUELTOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES**</u>

<u>**Enero 2013**</u>

TEMA 1: REDES

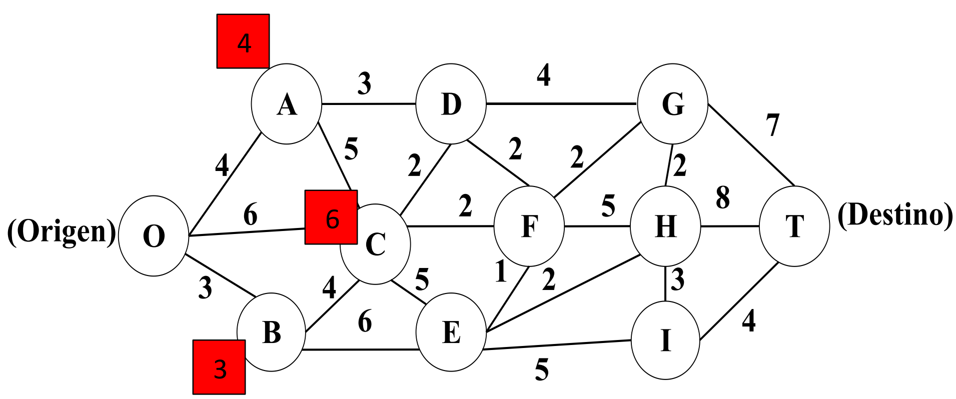
1. Encuentre la ruta más corta de la siguiente red. Los números representan las distancias correspondientes reales entre los nodos.



Solución: Para resolver problemas de ruta más corta se debe proceder con el criterio del Algortimo de Dijktra. Esto es demos partir del origen (O) y debemos llegar al Destino (T) y lo debemos hacer por el camino o ruta más corta. Es decir tenemos que optimizar, minimizando costos de envío del nodo Origen al Nodo destino.

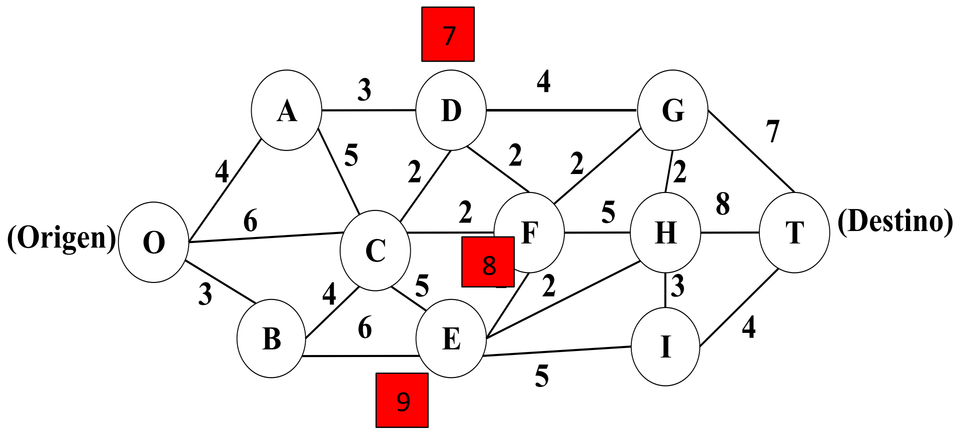
Vea la red tenemos tiene 11 nodos:

- Al salir del Nodo O se puede llegar a los Nodos A,B y C. pero fíjese que se puede hacer a distintos costos 4,3 y 6. Respectivamente. Lo cual mostramos con cuadrados rojos sobre los nodos alcanzados o conocidos. **OA**=4, **OB**=3,**OC**=6

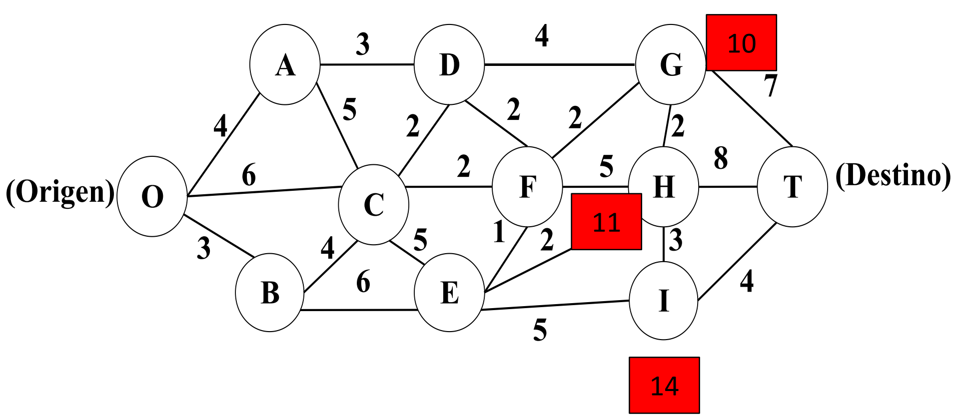


- Ahora vamos a llegar al Nodo D; puede ver que los nodos conocidos más cercanos son A y C. por lo tanto se puede llegar a D desde A con 4+3=7; pero se puede llegar a D dese C con 6+2=8, como nos interesa el camino más corto elegimos **AD** para un costo de 7.
- Ahora vamos a llegar a E; puede ver que los nodos conocidos más cercanos son B y C. por tanto se puede llegar a E desde B con 3+6= 9; pero se puede llegar a E desde C con 6+5=11 como nos interesa el camino más corto elegimos **BE** con un costo de 9.

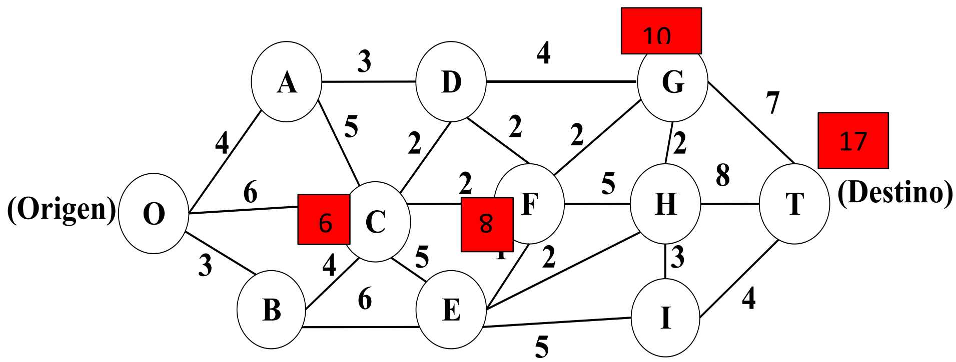
- Ahora vamos a llegar a F; puede verse que los nodos conocidos más cercanos son C,D y E, por tanto se puede llegar a F desde C con 6 + 2= 8; pero se puede llegar a F desde D con 7+2=9; pero también se puede llegar a F desde E con 9+1=10; puede verse que el más corto de los tres es 8 por lo que elegimos **CF.**



- Ahora podemos alcanzar G desde los nodos conocidos más cercanos D y F. por tanto se puede llegar a G desde D con 7+4=11; pero se puede llegar a G desde F con 8+2=10; puede verse que es menos costoso llegar desde F por lo que elegimos **FD**.
- Ahora podemos alcanzar H desde los nodos conocidos más cercanos E,F y G. Por tanto se puede llegar H desde E con 9+2= 11; pero se puede llegar a H desde F con 8+5=13; pero se puede llegar a H desde G 10+2=12; puede verse que el menos costoso es de **EH con 11.**
- Ahora podemos alcanzar I desde los nodos conocidos más cercanos E y H. Por lo tanto se puede llegar a I desde E con 9 + 5=14; pero puedo llegar I desde H con 11+3=14; vemos que los costos son iguales desde E o desde H, por lo que hay dos opciones posibles. **HI** y **EI**



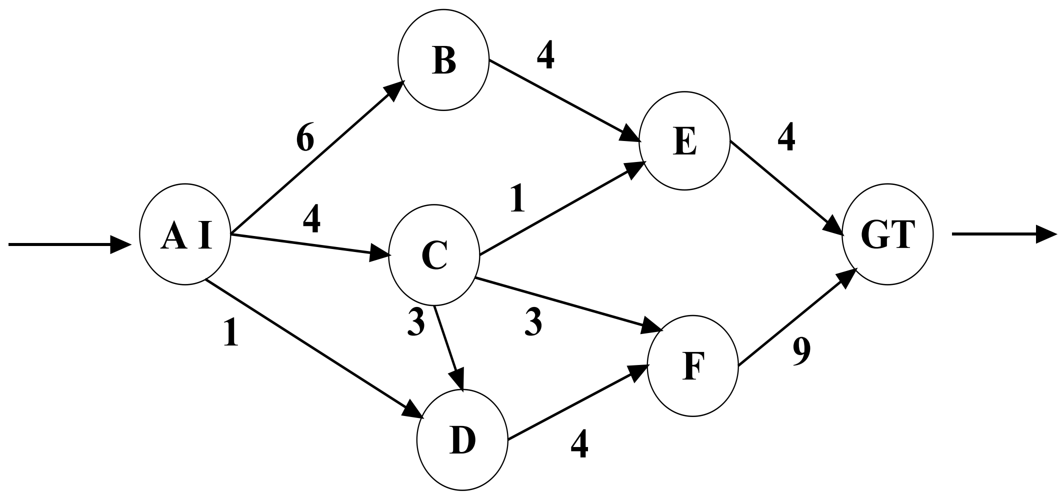
- Ahora podemos alcanzar el nodo destino T desde los nodos conocidos más cercanos G,H e I. Por tanto puedo alcanzar T desde G con 10+7=17; pero puedo alcanzar T desde H con 11+8=29 o puede alcanzar T desde I con 14+4=18, puede verse que de los tres el menos costoso es 17 desde **GT**



Resultando la ruta óptima: **OC-CF-FG-GT o lo que es lo mismo O-C-F-G-T = 17**

N	**Nodos resueltos, conectados directamente a nodos no resueltos**	**Nodos no resueltos más cercanos conectados**	**Distancia total involucrada**	**N-ésimo nodo más cercano**	**Distancia mínima**	**Última conexión**
1	O	A	4	A	4	OA
2	O	B	3	B	3	OB
3	O A B	C C C	6 4+5 3+6	C C C	6	OC
4	A C	D D	4+3 6+5	D D	7 11	AD
5	B C	E E	3+6 6+5	E	9	BE
6	C D E	F F F	6+2 7+2 9+1	F	8	CF
7	D F	G G	7+4 8+2	 G	 10	 FG
8	E F G	H H H	9+2 8+5 10+2	H	11	EH
9	E H	I I	9+5 11+3	I I	14	EI HI
10	G H I	T T T	10+7 11+8 14+4	17	T	GT

2. Encuentre el flujo máximo de la red que se le muestra a continuación, donde el nodo inicial es (AI) y el terminal es (GT).



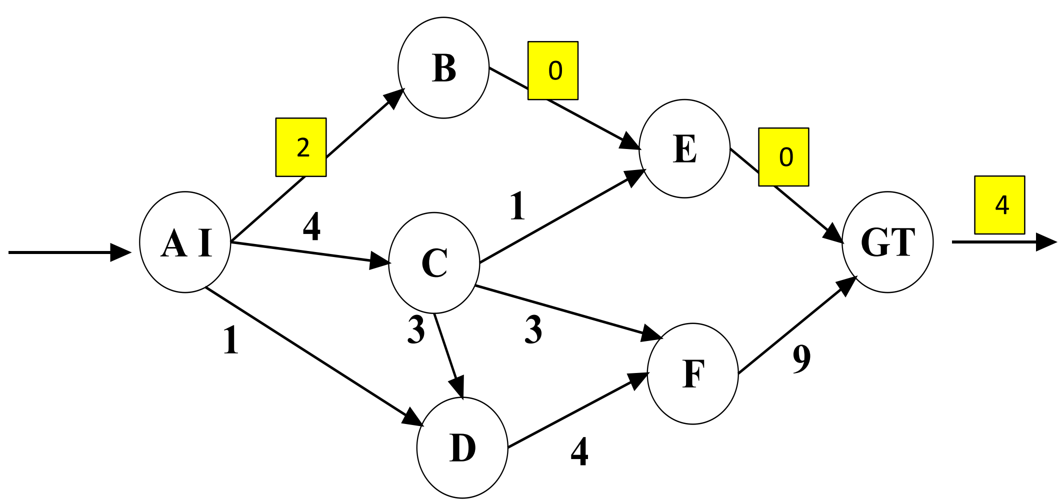
Solución: Los problemas de flujos máximos consisten en tratar de llevar desde el Nodo AI la mayor cantidad flujo posible al Nodo destino GT. Tomando en cuenta que los arcos o aristas tienen capacidades diferentes. Ejemplo BE tiene capacidad de 4; CE tiene capacidad de 1; etc.

Este problema se resuelve por pasos o Iteraciones:

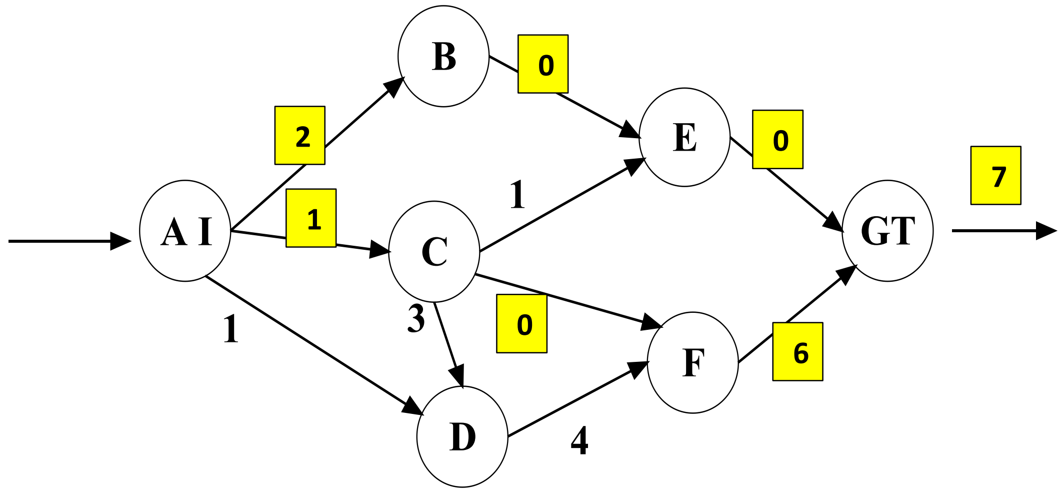
En cada paso o iteración elegimos un camino cualquiera y enviamos la cantidad que permite el arco con menor capacidad de ese camino y vamos reduciendo la capacidad de cada arco restando lo enviado.

Iteración 1: elegimos el camino **AI – B – E-GT,** en este camino encontramos los arcos AIB, BE, EGT ahora encontramos el mínimo de la capacidad de los arcos: min {6,4,4} = 4

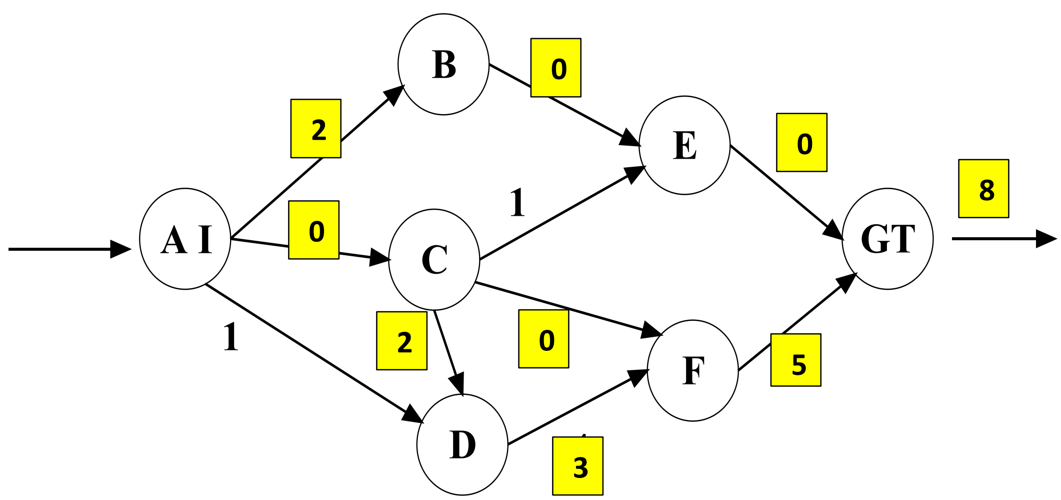
Puede ver que el mínimo es 4. Puede ver que la red ha a reducido su capacidad en los arcos que hemos utilizado.



Iteración 2: elegimos un nuevo camino **AI-C-F-GT** , en este camino encontramos los arcos AIC, CF y FGT, obtenemos el mínimo de la capacidad de los arcos: min {4,3,9}=3

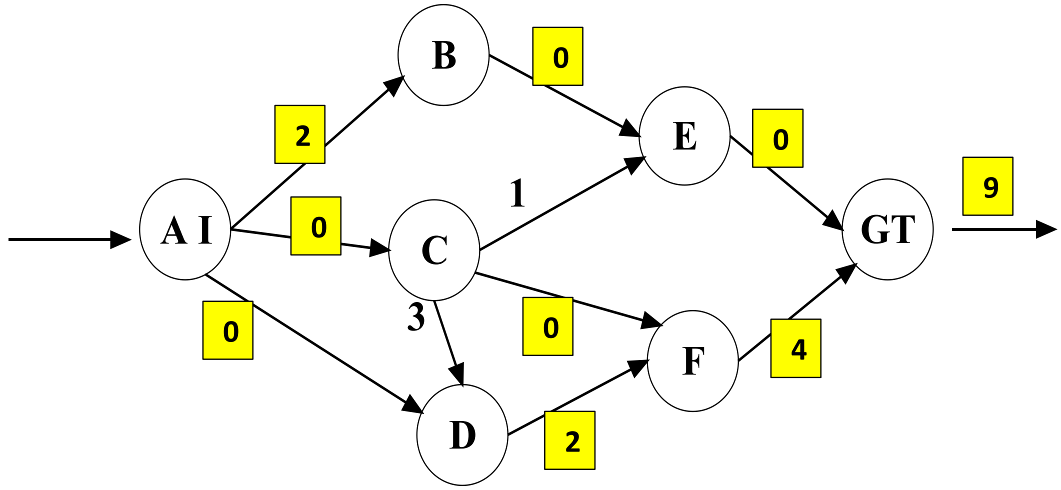


Iteración 3: Puede verse que después de dos iteraciones, hay arcos cuyas capacidades ya no permite enviar por esas vías, es decir se han agotados; BE=0; EGT=0; CF=0, pero todavía hay caminos para enviar de AI a GT. Uno es AI-C-D-F-GT, en este camino encontramos los arcos: AIC, CD, DF,FGT, obtenemos el mínimo de la capacidad de los arcos: min {1,3,4,6}=1



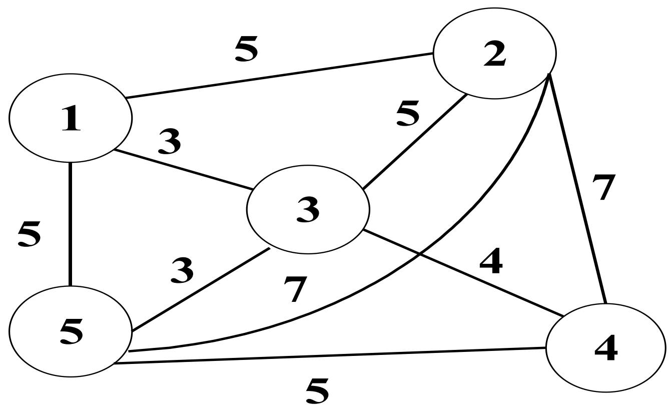
Iteración 4: Puede ver cómo han quedado las capacidades se van reduciendo con cuatro arcos con capacidad cero.

Pero aún hay un camino AI-D-F-GT con capacidad de enviar: min {1,3,5}



Puede ver que solo logramos enviar 9 unidades al nodo destino GT a pesar que en AI tengo 2 unidades en el arco AIB pero como el arco BE no tiene capacidad (BE=0) se quedan sin enviarse. Por lo tanto hemos llegado al flujo máximo de la red con capacidad de 9.

3. Una ciudad tiene cinco subdivisiones. El alcalde desea instalar líneas telefónicas, para asegurar la comunicación entre todas las subdivisiones. En la figura se dan las distancias entre las subdivisiones. ¿Cuál es la longitud mínima necesaria de la línea telefónica?



Solución:

Las cinco subdivisiones son los nodos 1, 2, 3, 4,5 encerrados en círculo. Las distancias entre las subdivisiones están dadas en kilómetros, puede ver que el nodo uno pude conectar a la subdivisión 2, 3 y 5.

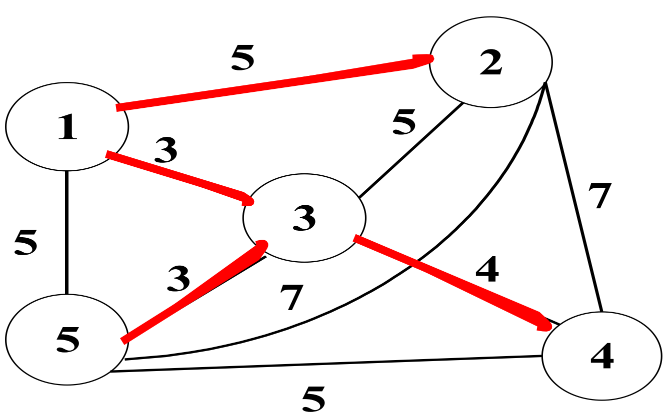
Este problema es del tipo de árbol de expansión mínima; para su solución elegimos la conexión más pequeña o más corta entre dos subdivisiones de la ciudad. Puede ver que hay dos posibles: Conectar el Nodo 3 con el Nodo 1 ó el Nodo 3 con el Nodo 5 por resulta más económico, menos cableado y menos postes. Pues conectamos:

- El Nodo 3 con el Nodo 1. Con una distancia de 3 Km
- El Nodo 3 con el Nodo 5. Con una distancia de 3 Km.
- El Nodo 3 con el Nodo 4. Con una distancia de 4 Km.
- El Nodo 1 con el Nodo 2. Con una distancia de 5Km.

Para un total de 15 Km de cableado y tendido de poste y está sería la decisión óptima.

Es bueno que sepa que la última conexión pudo hacerse del Nodo 3 al nodo 3 por que también tiene 5 Km.

Las instalaciones se deberán hacer en los arcos pintados de rojo.



Tema 2: Teoría de Decisiones.
Los problemas de Teoría de decisiones está orientado minimizar el riesgo en una decisión de inversión cuando se presentan varias alternativas, al menos dos. Regularmente se usa el criterio de Valor Monetario esperado VME.
Revisemos tres ejemplos:

1. Un empresario desea invertir U$ 10,000.00 en el mercado de valores comprando acciones de una de dos compañías: A y B. Las acciones de la compañía A representan un riesgo, pero podrían dar un rendimiento del 50% sobre la inversión durante el siguiente año. Si las condiciones de la bolsa no son favorables (es decir, mercado "a la baja"), las acciones pueden perder el 20% de su valor. La compañía B proporciona inversiones seguras con 15% de rendimiento en un mercado "a la alza" y sólo 5% en un mercado "a la baja" Dónde debe el empresario invertir su dinero?. Construya la matriz de resultados y el VME.

Solución:

Decisión	**Estados de la naturaleza**	
	Mercado a la alza	Mercado a la baja
A1: Invertir en Cía. "A"	10,000*0.50=5,000	10,000*(-0.20)=-2,000
A2: Invertir en Cía. "B"	10,000*0.15=1,500	10,000*(0.05)=500

Como no tenemos información de las probabilidades de los estados de la naturaleza, suponemos la máxima incertidumbre; 50% para cada estado.

A1: Alternativa 1 A2: Alternativa 2

Estados de la naturaleza: Son las dos posibles situaciones que pueden ocurrir (Mercado a la alza o Mercado a la Baja) como ambos cosas se pueden dar con la misma probabilidad les asignamos 0.50 a cada una.

VME(A1)=5,000*0.50 + (-2000)*0.50= 2,500-1,000=1,500

VME(A2)=1,500*0.50 + 500*0.50= 750+ 250=1,000

La mejor decisión de inversión basado en el VME es la Cía. "A" o sea la Alternativa 1; porque nos da el mayor valor monetario esperado.

2. La compañía Rodney Sportswear ha diseñado dos nuevos estilos de pantalonetas de tenis para el año próximo, “Wimbledon” y “Forest Hill”. La compañía puede producir cualquiera de las dos o ninguna de las dos. Así, ellos deben seleccionar una de las cuatro acciones disponibles; solamente Wimbledon, solamente Forest Hill, ambas o ninguna. El costo de producción, con todo el cual debe cargarse por adelantado, si el modelo diseñado es producido, es $50,000 para cualquiera de los dos modelos; pero es $125,000 para ambos debido al esfuerzo en la capacidad involucrada en la producción de los estilos. La ganancia, incluyendo todos los ingresos y costos excepto los de producción, es $100,000 por estilo si el estilo es satisfactorio y cero si el estilo es un fracaso. ¿Cuál es el mejor curso de acción?

Solución:

Consideramos la siguiente tabla o matriz:

Producir	Satisfactorio	Fracaso
A1: Wimbledon	100,000-50,000=50,000	-50,000
A2: Forest Hill	100,000-50,000=50,000	-50,000
A3: Producir ambos	200,000-125,000=75,000	-125,000
A4: Ninguno	0	0

Calculamos el valor esperado de cada alternativa, como no hay estudio de mercado previo que el modelo sea satisfactorio o fracase tendrán probabilidades igual 0.50 c/u.

VME(A1)= 50,000*0.5 + (-50,000)*.5= 0

VME(A2)= 50,000*0.5 + (-50,000)*.5= 0

VME(A3)= 75,000*0.5 + (-125,000)*0.5= -25,000

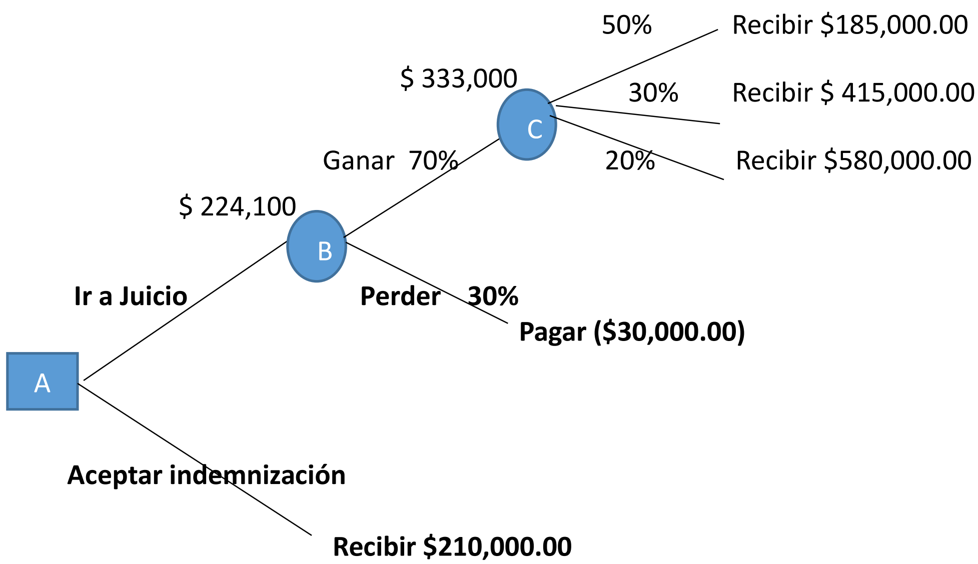
VME(A4)= 0

Las condiciones son muy arriesgadas para tomar una decisión de producción sin información de mercado. Lo recomendable es no producir bajo estas condiciones.

3. Una compañía de seguros le ofrece una indemnización por accidente de $210,000; Si no acepta la oferta y decide ir a juicio, puede obtener $185,000, $415,000 o $580,000 dependiendo de las alegaciones que el juez considere aceptable. Si pierde el juicio debe pagar los costos que ascienden a $30,000.
Se sabe que el 70% de los juicios se ganan y de éstos en el 50% se obtiene la menor indemnización, en el 30% la intermedia y en el 20% la más alta. Determinar la decisión más acertada.

Solución:

Este problema lo resolveremos por Árbol de decisión (es más fácil) verlo gráficamente.



El árbol lo leemos así: La persona tiene dos alternativas en su decisión: A1: aceptar lo que le ofrece amigablemente la compañía de seguro $210,000.00 ó A2: Ir a juicio.

Si la persona decide ir a juicio tiene dos posibilidades que no dependen de él Ganar el juicio con 70% de posibilidades o perder el juicio con 30% de posibilidades.

Si gana el juicio hay tres posibilidades que le ocurran 1: Que gana la menor indemnización con un 50% de posibilidades para un monto de $185,000.00; 2: que gane la segunda indemnización con 30% de posibilidades con un monto de $415,000.00 y 3; que gane la máxima indemnización con 20% de posibilidades para un monto de $580,000.00

Si pierde tiene que pagar todos los gastos que son $30,000. (su peor situación, de llegar a ocurrir)

Para lo cual Calculamos el VME en el nodo C.

VME(C)= 185,000*0.50 + 415,000*0.30 + 580,000*0.20 = 92,500 + 124,500 + 116,000 = 333,000

Pero eso solo puede ser cierto con una probabilidad del 70% de las veces.

Por lo cual necesitamos hallar el VME en el Nodo B.

VME(B) = 333,000*0.70 -30,000*0.30= 233,100 – 9,000= **$224,100**

Los cálculos del árbol nos indican que el valor monetario esperado si se va a juicio es de $224,00

Lo cual no es seguro es una posibilidad promedio. En cambio si acepta la oferta de la compañía es de $210,000.

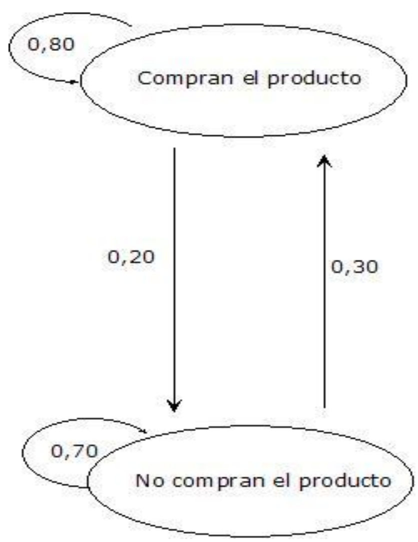
Pareciera prudente valorar ambas decisiones con mucho cuidado, porque en la primera hay varios riegos mientras que en la segunda ninguno.

TEMA 3: CADENAS DE MARKOV

1. El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?
   Solución:

Para resolver este tipo de problemas, lo primero es hacer un esquema.

A la vista del esquema podemos pasar a construir la matriz de probabilidades de transición:



Del 100% de clientes que compra en un mes un producto el 20% no compra el mes siguiente, o sea el 80% lo sigue comprando el siguiente mes.

Del 100% de clientes que quienes no lo compran en un mes, solo el 30% lo adquieren el mes siguiente. O sea el 70% no lo compran el siguiente mes.

Calculo: con esa información construiimos la matriz 2x2. $P^{(0)}$ representa la situación inicial.

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

El primer mes comprarán C=350 y no comprarán N=650

$$(C,\ \mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 100 & 900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (350{,}650)$$

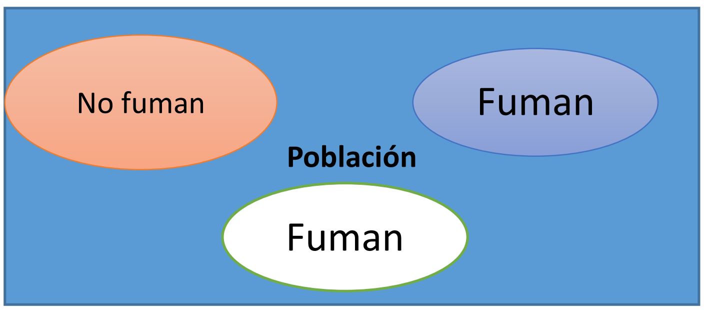
$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$$

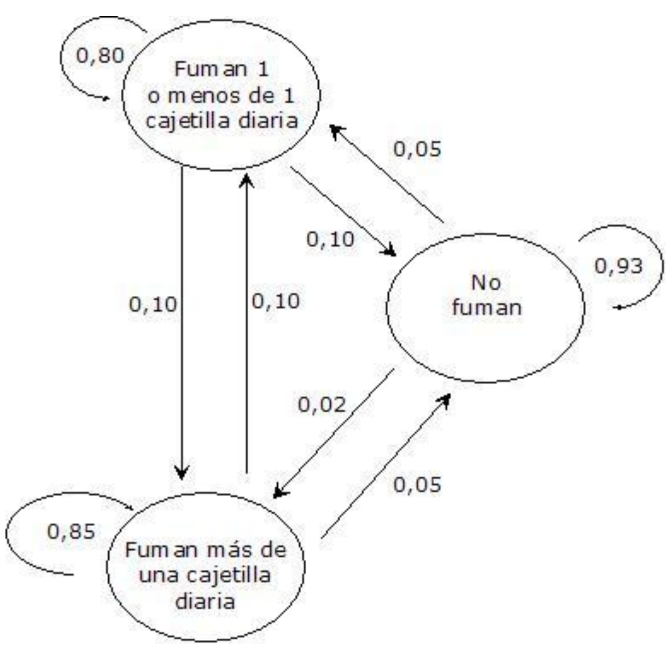
$$(C,\ \mathrm{N}) = \begin{pmatrix} 100 & 900 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} = (475{,}525)$$

El segundo mes comprarán 475 y no comprarán 525

2. En una población de 10,000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5% de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario, o menos, y un 2% de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete, o menos, hay un 10% de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10% de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5% de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10% de que pasen a fumar un paquete, o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?

Solución:





$P^{(1)} =$

	0	**1**	**2**
0	0.93	0.05	0.02
1	0.10	0.80	0.10
2	0.05	0.10	0.85

NF= No fuman
FC= fuman uno o menos de un paquete diarios
FCC= fuman más de un paquete diario.

$$(NF, FC, \mathrm{FCC}) = \begin{pmatrix} 5000 & 2500 & 2500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.93 & 0.05 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} = (5025, 2500, 2475)$$

Después de un mes habrán NF=5025, FC=2500, FCC=2475