

BLOQUE DE PROBLEMAS DE ANALISIS DE MARKOV

Prof.: MSc. Julio Rito Vargas Avilés

1. Cada familia nicaragüense se clasifica según donde vive como urbana, rural o suburbana. Durante un año específico, 15% de las familias urbanas se mudaron a una ubicación suburbana, y 5% a un área rural; también 6% de las familias suburbanas se trasladaron a un área urbana y 4% se pasaron a una ubicación rural; por último 4% de las familias rurales se ubicaron en un área urbana y 6% se cambiaron a un lugar suburbano.
 - a. Si una familia vive ahora en un lugar urbano, cual es la probabilidad de que viva en un área urbana dentro de dos años a partir de ahora? Un área suburbana? Un área rural?
 - b. Suponga que en el presente el 40% de las familias viven en el área urbana, 35% viven en un área suburbana y 25% viven en un área rural. Dos años a partir de ahora ¿Qué porcentaje de familias nicaragüenses vivirán en un área urbana?

2. Suponga que cada estadounidense en cada uno de los tres grupos: niños, adultos que trabajan y adultos retirados. Durante un periodo de un año, 0.959 de los niños seguirán siendo niños, 0.04 de los niños se convertirán en adultos, y 0.001 de los niños mueren. En cualquier año 0.96 de los adultos que trabajan permanecen trabajando y 0.3 de las personas que trabajan se volverán personas retiradas, y 0.1 de los adultos que trabajan morirán, También 0.95 de las personas retiradas permanecerán así, y 0.05 de las personas retiradas morirán.

Determine la matriz estacionaria o estable

3. La ciudad de Nueva York produce 1000 toneladas de aire contaminado por día, la ciudad de Jersey 100 toneladas y Newark 50 toneladas. Todos los días, los vientos arrastran $\frac{1}{3}$ de la contaminación de Nueva York a Newark, $\frac{1}{3}$ se disipa y el otro tercio permanece en Nueva York. Cada día el viento se lleva a Nueva York $\frac{1}{3}$ de la contaminación de la ciudad de Jersey, $\frac{1}{3}$ se queda en Jersey y $\frac{1}{3}$ se va Newark. Todos los días, $\frac{1}{3}$ de la contaminación de Newark permanece allí y el resto se va con el viento a la ciudad de Jersey. ¿En un día representativo cual ciudad será la más contaminada?

4. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n -ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten de la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja. Se pide:
 - a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena

- b) Dibujar el diagrama de transición de estado
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos. (matriz estacionaria)
5. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.
- Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?
 - ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?
6. Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90% de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80% de que repita la vez siguiente. Se pide:
- Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy?
 - Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?
 - Supongamos que el 60% de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40% Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola.
Determinar la matriz de Markov estable
7. Hallar, si existe, la distribución estacionaria para esta CM con $S=\{1, 2, 3\}$:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

8. Central State University administra exámenes de competencias en computación cada año. Los exámenes permiten a los estudiantes “exentar” de la clase introducción a la computación que imparte la universidad. Los resultados de los exámenes se pueden clasificar en uno de los siguientes cuatro estados:
Estado 1: aprobar todos los exámenes de computación y exentar el curso
Estado 2: no aprobar todos los exámenes de computación en el tercer intento y tener que tomar el curso
Estado 3: reprobado los exámenes de computación en el primer intento
Estado 4: reprobado los exámenes de computación en el segundo intento
El coordinador de los exámenes del curso observó la siguiente matriz de probabilidades de transición:
Actualmente, hay 200 estudiantes que no aprobaron todos los exámenes en el primer intento. Además, hay 50 estudiantes que no aprobaron en el segundo intento. A largo plazo, ¿cuántos estudiantes estarán exentos del curso por aprobar los exámenes? ¿Cuántos de los 250 estudiantes requerirán tomar el curso de computación?
9. Ray Cahnman es el orgulloso propietario de un automóvil deportivo 1955. En un día dado, Ray no sabe si su auto va a arrancar. Arranca el 90% de las veces si arrancó la mañana anterior, y el 70% de las veces no arranca si no arrancó la mañana anterior.
a) Construya la matriz de probabilidades de transición.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que arranque mañana si arrancó hoy?
c) ¿Cuál es la probabilidad de arranque mañana si *no* arrancó hoy?
10. En un mes dado, Dress-Rite pierde 10% de sus clientes que cambian a Fashion, Inc. y 20% de su mercado cambia a Luxury Living; pero Fashion, Inc., pierde 5% de su mercado que cambia a Dress-Rite y 10% que cambia a Luxury Living cada mes; luego, Luxury Living pierde 5% de su mercado que cambia a Fashion, Inc., y 5% de su mercado que cambia a Dress-Rite. En este momento, cada una de las tiendas de ropa tiene una participación igual en el mercado. ¿Cuáles cree que serán las participaciones en el mercado el próximo mes? ¿Cuáles serán dentro de tres meses?
11. La compañía Goodeating Dog Chow elabora diferentes marcas de alimento para perros. Uno de sus mejores productos es la bolsa de 50 libras de Goodeating Dog Chow. George Hamilton, presidente de Goodeating, utiliza una máquina muy antigua para empacar automáticamente las 50 libras de Goodeating Chow en una bolsa. Por desgracia, como la máquina es antigua, en ocasiones llena las bolsas con más o con menos producto. Cuando el llenado es correcto y coloca 50 libras de comida en cada bolsa, existe una probabilidad de 10% de que la máquina ponga solo 49 libras en cada bolsa el siguiente día, y una probabilidad de 0.20 de que coloque 51 libras en cada bolsa el siguiente día. Si la máquina está colocando 49 libras en cada bolsa, hay una probabilidad de 0.30 de que mañana ponga 50 libras y una probabilidad de 0.20 de que ponga 51 libras en cada bolsa. Además, si la máquina está colocando 51 libras en cada bolsa hoy, existe una probabilidad de 0.40 de que coloque 50 libras en cada bolsa mañana y una probabilidad de 0.10 de que coloque 49 libras mañana.
a) Si la máquina está cargando 50 libras en cada bolsa hoy, ¿cuál es la probabilidad de que coloque 50 libras en cada bolsa mañana?

- b) Resuelva el inciso a) cuando la máquina está colocando solo 49 libras en cada bolsa hoy.
- c) Resuelva el inciso a) cuando la máquina está colocando 51 libras hoy.

12. La universidad de South Wisconsin ha tenido una inscripción estable los últimos cinco años. La escuela tiene su propia librería, University Bookstore, pero también hay tres librerías privadas en la ciudad: Bill's Book Store, College Bookstore y Battle's Book Store. La universidad está preocupada por el gran número de estudiantes que están comprando en una de las librerías privadas. Como resultado, el presidente de South Wisconsin, Andy Lange, decidió dar a un estudiante tres horas de crédito universitario para que estudie el problema. Se obtuvo la siguiente matriz de probabilidades de transición:

	UNIVERSITY	BILL'S	COLLEGE	BATTLE'S
UNIVERSITY	0.6	0.2	0.1	0.1
BILL'S	0	0.7	0.2	0.1
COLLEGE	0.1	0.1	0.8	0
BATTLE'S	0.05	0.05	0.1	0.8

En la actualidad, cada una de las cuatro librerías tiene una participación igual en el mercado. ¿Cuáles serán las participaciones en el mercado para el siguiente periodo?

13. El profesor Green da cursos de programación de computadoras de dos meses durante el verano. Los estudiantes presentan varios exámenes para aprobar el curso y cada estudiante tiene tres oportunidades de tomar los exámenes. Los siguientes estados describen las situaciones posibles que pueden ocurrir:

1. Estado 1: pasar todos los exámenes y aprobar el curso
2. Estado 2: no pasar todos los exámenes en el tercer intento y reprobar el curso.
3. Estado 3: reprobar un examen en el primer intento
4. Estado 4: reprobar un examen en el segundo intento

Después de observar varios grupos, el profesor Green obtuvo la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Actualmente hay 50 estudiantes que no aprobaron todos los exámenes en el primer intento y 30 estudiantes que no aprobaron todos los exámenes en el segundo intento. ¿Cuántos estudiantes de estos dos grupos pasarán el curso y cuántos lo reprobarán?

14. Establezca un vector de probabilidades de estado y una matriz de probabilidades de transición dada la siguiente información: Hoy, la tienda 1 tiene 40% del mercado; la tienda 2 tiene 60% del mercado. En cada periodo, los clientes de la tienda 1 tienen 80% de probabilidad de regresar, y 20% de cambiar a la tienda 2. En cada periodo, los clientes de la tienda 2 tienen 90% de posibilidades de regresar, y 10% de cambiar a la tienda 1.

15. Dadas las siguientes matrices de transición (de un paso) de una cadena de Markov, determine las clases de las cadenas de Markov y si son recurrentes o no

$$a) \mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

16. Un proceso de producción incluye una máquina que se deteriora con rapidez tanto en la calidad como en la cantidad de producción con el trabajo pesado, por lo que se inspecciona al final de cada día. Después de la inspección se clasifica la condición de la máquina en uno de cuatro estados posibles:

Estado	Condición
0	Tan buena como nueva
1	Operable: deterioro mínimo
2	Operable: deterioro mayor
3	Inoperable y reemplazada por una tan buena como nueva

El proceso se puede modelar como una cadena de Markov con matriz de transición (de un paso) P dada por

Estado	0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	0	0

- a) Encuentre las probabilidades de estado estable.
- b) Si los costos respectivos por estar en los estados 0, 1, 2, 3 son 0, 1 000, 3 000 y 6 000 dólares, ¿cuál es el costo diario esperado a largo plazo?
- c) Encuentre el tiempo de recurrencia esperado del estado 0 (esto es, el tiempo esperado que una máquina se puede usar antes de tener que reemplazarla).
17. Un fabricante de videograbadoras está tan seguro de su calidad que ofrece garantía de reposición total si un aparato falla dentro de los dos primeros años. Con base en datos compilados, la compañía ha notado que sólo 1% de sus grabadoras fallan durante el primer año, mientras que 5% de ellas sobreviven el primer año pero fallan durante el segundo. La garantía no cubre grabadoras ya reemplazadas.
- a) Formule la evolución del estado de una grabadora como una cadena de Markov cuyos estados incluyen dos estados absorbentes que representan la necesidad de cubrir la garantía o el hecho de que una grabadora sobreviva el periodo de garantía. Después construya la matriz de transición (de un paso).
18. Jim debe avanzar cinco años para completar su doctorado en la Universidad ABC. Sin embargo le agrada la vida de estudiante y no tiene prisa para obtener su grado. En cualquier año académico, hay 50% de probabilidades de que pueda tomarse un año sabático y 50% de probabilidad de dedicarle tiempo completo a su doctorado. Después de completar tres años académicos, hay 30% de probabilidades de que Jim pueda dar "marcha atrás" y simplemente obtenga una maestría, 20% de probabilidades de que se tome libre el siguiente año pero continuando con el programa de doctorado, y 50% de probabilidades de que asista a la escuela a tiempo completo en busca de su doctorado.
- (a) Exprese la situación de Jim como una cadena de Markov.
- (b) Determine el número esperado de años académicos antes de que la vida de estudiante de Jim termine.
- (c) Determine la probabilidad de que Jim termine su ciclo académico con sólo una maestría.
- (d) Si la beca de Jim desembolsa \$15,000 anuales (pero sólo cuando asiste a la escuela), ¿cuánto deberá pagar antes de que obtenga un grado?

19. Una máquina NC está diseñada para que funcione adecuadamente con voltajes de 108 a 112 volts. Si el voltaje se sale de este intervalo, la máquina se detiene. El regulador de voltaje de la máquina puede detectar variaciones en incrementos de un volt. La experiencia muestra que el voltaje cambia cada 15 minutos. Dentro del intervalo permisible (118 a 112 volts) el voltaje puede subir 1 volt, permanecer igual, o bajar un volt, todos con iguales probabilidades.
- (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
 - (b) Determine la probabilidad de que la máquina se detenga a causa de un voltaje bajo. De un voltaje alto.
 - (c) ¿Cuál sería el voltaje ideal que haría que la máquina trabaje durante más tiempo?
20. Un profesor de ingeniería adquiere una computadora nueva cada dos años. El profesor puede elegir de entre tres modelos: M1, M2 y M3. Si el modelo actual es M1, la siguiente computadora puede ser M2 con probabilidad .2, o M3 con probabilidad .15. Si el modelo actual es M2, las probabilidades de cambiar a M1 y M3 son .6 y .25, respectivamente. Pero si el modelo actual es M3, entonces las probabilidades de comprar los modelos M1 y M2 son .5 y .1, respectivamente. Represente la situación como una Matriz (cadena) de Markov y construya el diagrama de transición de estado.