CONFERENCIA

TEMA: CADENAS DE MARKOV

Prof.: **MSc. Julio Rito Vargas Avilés**

Agenda:

- Proceso estocástico
- Concepto de Cadena de Markov
- Clasificación de estados de una CM y ejemplos
- Distribución estacionaria
- Ejemplos de aplicación.

- **Def.: Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo.**

- **Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias definida sobre un espacio de probabilidad. Es decir:**

$$\{X_t : \Omega \to \Re, \quad t \in T\}$$

Necesitamos una herramienta que modele procesos aleatorios en el tiempo, y para ello usaremos los *procesos estocásticos.*

$$\omega \to X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

- **Tendremos que *X* es una función de dos argumentos. Fijado $\omega = \omega_0$, obtenemos una función determinista (no aleatoria):**

$$X(\cdot, \omega_0) : T \to \Re$$

$$t \to X(t, \omega_0)$$

$$X(t_0, \cdot) : \Omega \to \Re$$

$$\omega \to X(t_0, \omega)$$

- **Asimismo, fijado $t=t_0$, obtenemos una de las variables aleatorias de la familia:**

- **El espacio de estados S de un proceso estocástico es el conjunto de todos los**

$$S = \{X_t(\omega) \mid t \in T \wedge \omega \in \Omega\}$$

posibles valores que puede tomar dicho proceso:

Ejemplo de proceso estocástico discreto:

- Lanzamos una moneda al aire 6 veces. El jugador gana \$1 cada vez que sale cara (C), y pierde \$1 cada vez que sale cruz (F).
- X_i = estado de cuentas del jugador después de la *i*- ésima jugada
- La familia de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ constituye un proceso estocástico

Solución:

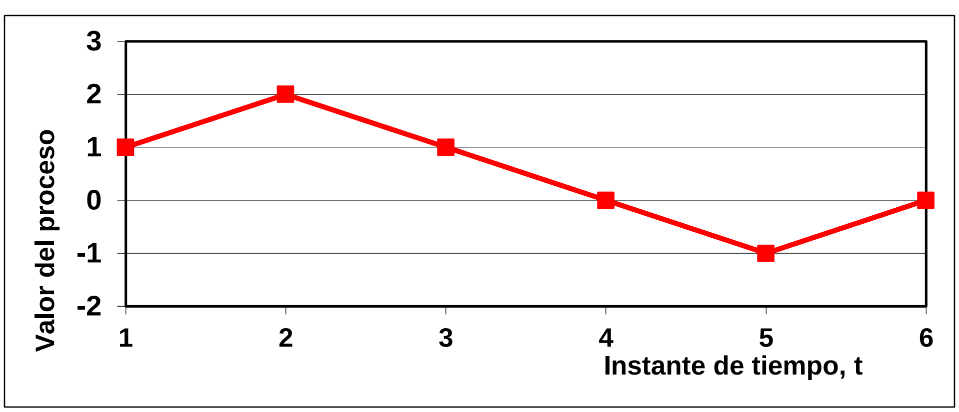
- Ω={CCCCCC,CCCCCF,…,FFFFFF} conjunto de sucesos posibles
- cardinal(Ω) = 2^6 = 64 Total de sucesos
- ω suceso del conjunto Ω
- P(ω)=1/64 $\forall\ \omega\in\Omega$ La probabilidad de que ocurra cada suceso
- T={1, 2, 3, 4, 5, 6} Conjuntos de Tiempos t
- S={–6, –5, …, –1, 0, 1, 2, …, 5, 6} Espacio de probabilidad
- $X_1(\Omega)$={–1, 1} Valores posible de la Variable Aleatoria X_1
- $X_2(\Omega)$={–2, 0, 2} Valores posible de la Variable Aleatoria X_2
- $X_3(\Omega)$={–3,-1, 1,3} Valores posible de la Variable Aleatoria X_3
- $X_4(\Omega)$={–4,-2, 0,2,4} Valores posible de la Variable Aleatoria X_4
- $X_5(\Omega)$={–5,-3-1, 1,3,5} Valores posible de la Variable Aleatoria X_5
- $X_6(\Omega)$={–6,-4,-2,0, 2,4,6} Valores posible de la Variable Aleatoria X_6

Si fijo ω, por ejemplo ω_0=CCFFFC (un suceso particular), obtengo una secuencia de valores completamente determinista:

$X_1(\omega_0)=1$ $X_2(\omega_0)=2$ $X_3(\omega_0)=1$

$X_4(\omega_0)=0$ $X_5(\omega_0)=-1$ $X_6(\omega_0)=0$

- Puedo dibujar con estos valores la *trayectoria del proceso*:



$X_3 : \Omega \to \Re \qquad\qquad \omega \to X_3(\omega)$

Si fijo t, por ejemplo $t_0=3$, obtengo una de las variables aleatorias del proceso:

Los posibles valores que puede tomar el proceso en $t_0=3$ son: $X_3(\Omega)=\{-3, -1, 1, 3\}$

Podemos hallar la probabilidad de que el proceso tome uno de estos valores:

$$P[X_3(\omega)=1]=P[CFC]+P[CCF]+P[FCC]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=3]=P[CCC]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-1]=P[FCF]+P[FFC]+P[CFF]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-3]=P[FFF]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Def.: Cadena de Markov

Las cadenas de Markov a tiempo discreto son modelos probabilísticos (estocásticos) que se usan para predecir la evolución y el comportamiento a corto y a largo plazo de determinados sistemas.

Ejemplos: reparto del mercado entre marcas; dinámica de las averías de máquinas para decidir política de mantenimiento; evolución de una enfermedad,…

- Una Cadena de Markov (CM) es:
    - Un proceso estocástico
    - Con un número finito de estados (M)
    - Con probabilidades de transición estacionarias
    - Que tiene la propiedad Markoviana

Propiedad Markoviano:

- Conocido el estado del proceso en un momento dado, su comportamiento futuro no depende del pasado. Dicho de otro modo, "dado el presente, el futuro es independiente del pasado"
- Sólo estudiaremos las cadenas de Markov, con lo cual tendremos espacios de estados S discretos y conjuntos de instantes de tiempo T también discretos, $T=\{t_0, t_1, t_2,\ldots\}$

- Las CM están completamente caracterizadas por las probabilidades de transición en una etapa.

$$P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t = i\right], \quad i, j \in S, t \in T$$

$$\forall i, j \in S \ \forall t \in T, P\left[X_{t+1} = j \big/ X_t = i\right] = q_{ij}$$

- Sólo trabajaremos con CM homogéneas en el tiempo, que son aquellas en las que

  donde q_{ij} se llama probabilidad de transición en una etapa desde el estado i hasta el estado j

Matriz de transición: Los q_{ij} se agrupan en la denominada matriz de transición de la CM:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \left(q_{ij}\right)_{i, j \in S}$$

Propiedades de la matriz de transición:

1. Por ser los q_{ij} probabilidades

   $$\forall i, j \in S, \quad q_{ij} \in [0,1]$$

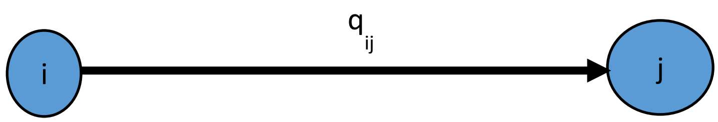
2. Por ser 1 la probabilidad del suceso seguro, cada fila ha de sumar 1, es decir,

   $$\forall i \in S, \quad \sum_{j \in S} q_{ij} = 1$$

3. Una matriz que cumpla estas dos propiedades se llama matriz estocástica

Diagrama de transición de estados (DTE)

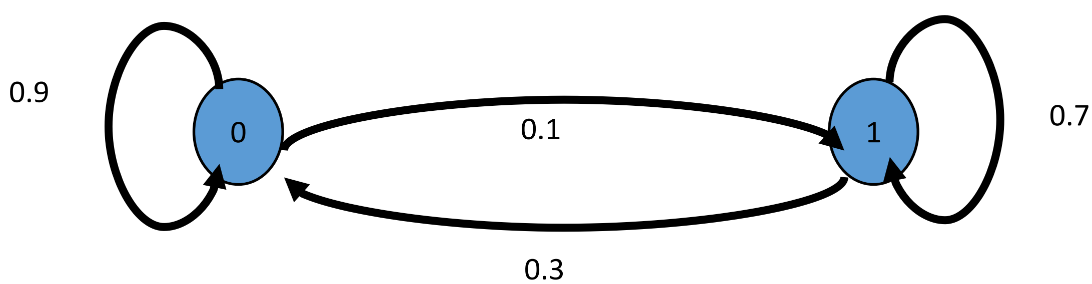
El diagrama de transición de estados (DTE) de una CM es un grafo dirigido cuyos nodos son los estados de la CM y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es nula, no se pone arco.



Ejemplo: línea telefónica:

Sea una línea telefónica de estados ocupado=1 y desocupado=0. Si en el instante t+1 está ocupada, en el instante t+1 estará ocupada con probabilidad 0.7 y desocupada con probabilidad 0.3. Si en el instante t está desocupada con probabilidad 0.9, en el t+1 estará ocupada con probabilidad 0.1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \\ Q = & \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array}$$

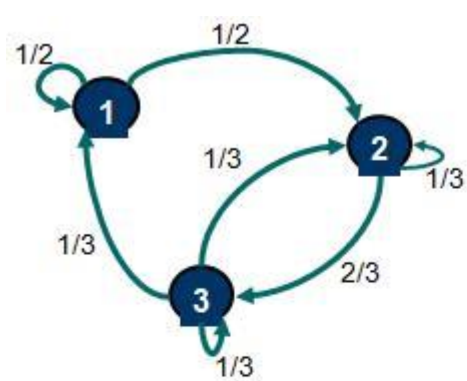


Tipos de estados y Cadenas de Markov

Podemos considerar $f_{ij}^{(n)}$ para (n=1,2,..) como la función de probabilidad de la variable aleatoria tiempo de primera pasada

Para la clasificación de estados de una Cadena de Markov en tiempo discreto utilizaremos 2 ejemplos:

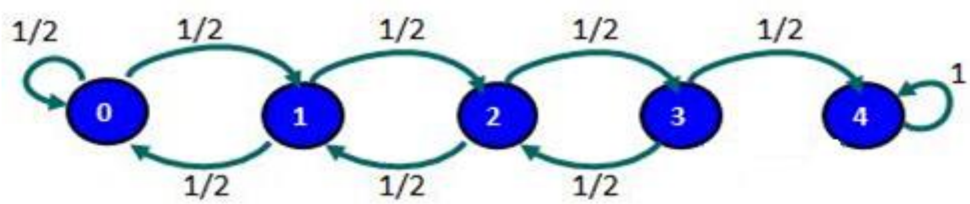
Ejemplo 1:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1/2	1/2	0	0	0
1	1/2	0	1/2	0	0
2	0	1/2	0	1/2	0
3	0	0	1/2	0	1/2
4	0	0	0	0	1

Ejemplo 2:



Si existe una probabilidad no nula que comenzando en un estado i se pueda llegar a un estado j al cabo de un cierto número de etapas (digamos n) se afirma que el estado j es **accesible** desde el estado i. Si consideramos el ejemplo 1 podemos afirmar que el estado 3 es accesible desde el estado 1. Aun cuando en una etapa no podemos llegar desde el estado 1 al estado 3, si podemos hacerlo al cabo de 2, 3, ..., n etapas. Cabe destacar en este punto que es relevante que exista una probabilidad no nula que comenzando en 1 se pueda llegar a 3 al cabo de un cierto número de etapas no importando el valor exacto de esta probabilidad para un n cualquiera. En cuanto al ejemplo 2, se puede verificar que el estado 2 es accesible desde el estado 3, sin embargo, el estado 2 no es accesible desde el estado 4 (esto porque una vez que se llega al estado 4 no se sale de ese estado). Finalmente, **dos estados que son accesibles y viceversa se dice que se comunican y que pertenecen a una misma clase de estados**.

Una Cadena de Markov donde todos sus estados son accesibles entre sí y por tanto se comunican se dice que es **irreducible**, es decir, que existe una **única clase de estados**. Este es el caso del ejemplo 1.

En cambio sí al menos existen 2 clases de estados la cadena ya no es irreducible. Si tenemos **2 estados que no se comunican** (esto porque no son accesibles y viceversa) estos estados **pertenecerán a distintas clases de estados**. En el ejemplo 2 existen dos clases de estados {0,1,2,3}, {4} (en consecuencia no es una cadena irreducible). En cuanto al estado 0,1,2 y 3 son **transitorios** y en el caso del estado 4, es **absorbentes** debido a que una vez que se accede a él la probabilidad de seguir en ese estado es de un 100%. Un estado absorbente define una clase de estados por sí mismo.

Una definición adicional es la periodicidad de un estado. Un estado se dice que tiene periodo d, para el mayor valor entero de d que cumpla:

$$p_{ii}^{(n)} = \mathrm{IP}(X_n = i / X_0 = i) > 0$$

Sólo para valores de n pertenecientes al conjunto {d, 2d, 3d, ...}. Si d=1 decimos que el estado es **aperiódico**. En otras palabras, un estado es **periódico** si, partiendo de ese estado, sólo es posible volver a él en un número de etapas que sea múltiplo de un cierto número entero mayor que uno

En el ejemplo 1 todos los estados son aperiódicos. En el ejemplo 2 los estados 1, 2 y 3 son periódicos con periodo d=2, es decir, que comenzando, por ejemplo, en el estado 1, la probabilidad de volver al mismo estado es sólo no nula para una cierta cantidad de pasos o etapas múltiplo de 2.

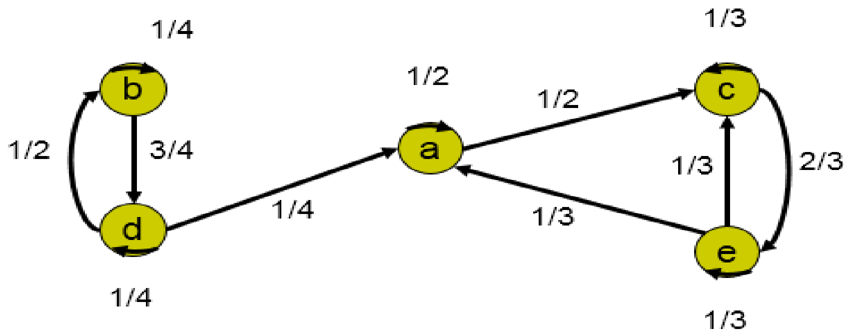
Un estado es **recurrente** en la medida que comenzando en él se tenga la certeza de volver en algún momento del tiempo (una determinada cantidad de etapas) sobre sí mismo. Alternativamente, un estado es **transitorio** si no se tiene la certeza de volver sobre sí mismo. En el ejemplo 1 todos los estados son recurrentes. En el ejemplo 2 los estados 0,1, 2 y 3 son transitorios debido a que si se comienza en cualquiera de ellos no se puede asegurar con certeza que se volverá al mismo estado en algún momento (esto debido a que existe una probabilidad no nula de acceder a un estado absorbente: 4. Los estados absorbentes por definición son estados recurrentes.

Si tenemos una Cadena de Markov que tiene una cantidad finita de estados e identificamos un estado recurrente, este será **recurrente positivo**. Si la cantidad de estados es infinito entonces un estado recurrente será **recurrente nulo**.

- Sea X una CM finita. Diremos que X es Ergódica si es irreducible, recurrente y aperiódica.
- **Ejemplo:** Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e}:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ Q = & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 1º Dibujar el DTE:

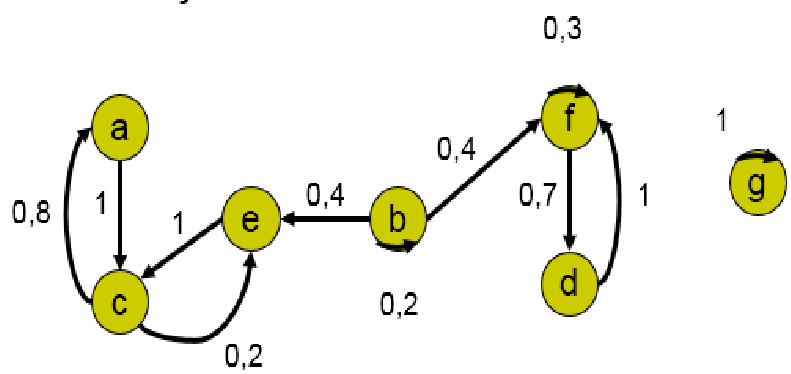


- 2º Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, e
  - Transitorios: b, d
  - Periódicos: ninguno
  - Absorbentes: ninguno

Ejemplo: Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e, f, g}:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\
Q = & \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 \\
0,8 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 1º Dibujar el DTE:



Recurrentes: **a, c, e , d, f**

Transitorios: b

Absorbente: g

Ejemplo
La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 0 y 4 son absorbentes, y por lo tanto son recurrentes. Veamos que los otros estados, 1, 2 y 3, son transitorios.

Si estamos en 1 y la cadena pasa a 0, nunca regresará a 1, de modo que la probabilidad de nunca regresar a 1 es

---

Ejemplo
Determine cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios para la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

La siguiente gráfica presenta las transiciones posibles (en un paso) entre estados diferentes para esta cadena

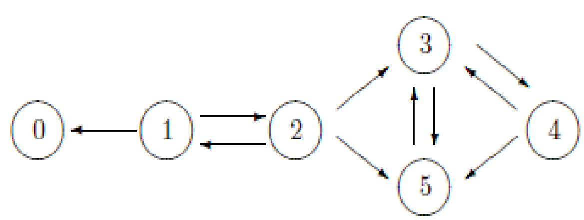


Figura 2.2

Vemos que hay tres clases de equivalencia $\{0\}$; $\{1,2\}$ y $\{3,4,5\}$. La primera clase es recurrente porque 0 es un estado absorbente. La clase $\{1,2\}$ es transitoria porque es posible salir de ella y no regresar nunca, por ejemplo, pasando de 1 a 0. Finalmente, la tercera clase es recurrente. ▲