Unidad IV
Cadenas de Markov

Maestro

Ing. Julio Rito Vargas Avilés.

III cuatrimestre 2014

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Introducción a las cadenas de Markov de primer orden

1. Definición de cadenas de Markov
2. Tipos de estados y de cadenas de Markov. Propiedades
3. Comportamiento a largo plazo de cadenas de Markov. Aplicaciones
4. Comportamiento a corto plazo de cadenas de Markov. Tiempos y probabilidades del primer paso
5. El caso particular de las cadenas absorbentes. Aplicaciones
6. Estudio de casos reales de aplicación. Los procesos de markov en los análisis coste-efectividad

Introducción

Las cadenas de Markov son modelos probabilísticos que se usan para predecir la evolución y el comportamiento a corto y a largo plazo de determinados sistemas.

Ejemplos: reparto del mercado entre marcas; dinámica de las averías de máquinas; para decidir política de mantenimiento; evolución de una enfermedad, etc…

Andrei Andreyevich Markov, matemático ruso

1. Definición de Cadena de Markov

- Una Cadena de Markov (CM) es:
  - Un proceso estocástico(aleatorio)
  - Con un número finito de estados (M)
  - Con probabilidades de transición estacionarias
  - Que tiene la propiedad Markoviana

Proceso estocástico:

- Es un conjunto o sucesión de variables aleatorias: $X(t)$ definidas en un mismo espacio de probabilidad.
- Normalmente el índice t representa un tiempo y $X(t)$ el estado del proceso estocástico en el instante t.
- El proceso puede ser de tiempo discreto o continuo
- Si el proceso es de tiempo discreto, usamos enteros para representar el índice: $\{X1, X2, ...\}$

Ejemplos de procesos estocásticos:

1. Resultado mensual de ventas de un producto
2. Estado de una máquina al final de cada semana (funciona/averiada)
3. Nº de clientes esperando en una cola cada 5 minutos
4. Marca del detergente que compra un consumidor cada vez que hace la compra. sabiendo que existen 8 marcas diferentes
5. Nº de unidades en almacén al finalizar la semana

ELEMENTOS DE UNA CADENA DE MARKOV

* Un conjunto finito de ***M estados***, exhaustivos y mutuamente excluyentes (ejemplo: estados de la enfermedad)
* ***Ciclo de markov ("paso")*** : periodo de tiempo que sirve de base para examinar las transiciones entre estados (ejemplo, un mes)
* ***Probabilidades de transición*** entre estados, en un ciclo (matriz P)
* ***Distribución inicial*** del sistema entre los M estados posibles

PROPIEDAD MARKOVIANA

Un proceso estocástico tiene la propiedad markoviana si las probabilidades de transición en un paso sólo dependen del estado del sistema en el período anterior (memoria limitada)

3. Cumple la propiedad markoviana:

$$P(x_{t+1} = j / x_t = i) = P_{ij}$$

4. Las probabilidades son estacionarias:

$$P(x_{t+1} = j / x_t = i) = P(x_1 = j / x_0 = i) = P_{ij}$$

$$P(x_{t+n} = j / x_t = i) = P(x_n = j / x_0 = i) = P_{ij}^{(n)}$$

5. Existe un conjunto de probabilidades iniciales

$$P\{x_0 = i\}$$

$$V^0 = \text{Vector de probabilidades del estado inicial}$$

PROPIEDAD MARKOVIANA

- **Probabilidades de Transición** $P_{ij}^{(n)}$

  Probabilidad de que partiendo del estado i llegue al estado j en n períodos

$$P_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad ; \quad \sum_{j=0}^{m} P_{ij}^{(n)} = 1$$

- **Calculo de probabilidades de Transición en n pasos**

$$\overline{P}^2 = \overline{P}\,\overline{P}$$

$$\overline{P}^3 = \overline{P}\,\overline{P}\,\overline{P} = \overline{P}^2\,\overline{P}$$

$$\overline{P}^{(n)} = \overline{P}^{(n-1)}\,\overline{P}$$

$\overline{P}^{(n)}$ es la matriz de transición en n pasos, de orden (M+1)x(M+1)

Matriz de transición

Los q_{ij} se agrupan en la denominada matriz de transición de la CM:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \left(q_{ij}\right)_{i,j \in S}$$

Propiedades de la matriz de transición

- Por ser los q_{ij} probabilidades,

$$\forall i, j \in S, \quad q_{ij} \in [0,1]$$

- **Por ser 1 la probabilidad del suceso seguro, cada fila ha de sumar 1, es decir,**

$$\forall i \in S, \quad \sum_{j \in S} q_{ij} = 1$$

- **Una matriz que cumpla estas dos propiedades se llama matriz estocástica**

Diagrama de transición de estados

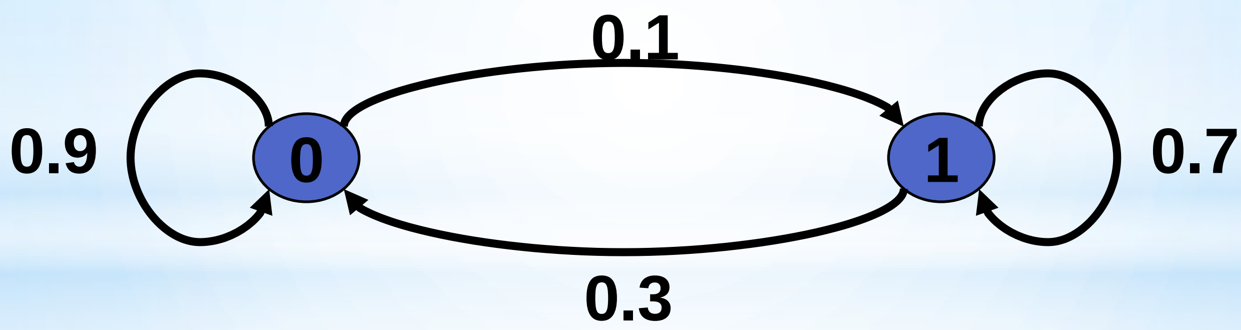
El diagrama de transición de estados (DTE) de una CM es un grafo dirigido cuyos nodos son los estados de la CM y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es nula, no se pone arco.

Ejemplo: línea telefónica

Sea una línea telefónica de estados ocupado=1 y desocupado=0. Si en el instante t está desocupada, en el instante t+1 estará ocupada con probabilidad 0.7 y desocupada con probabilidad 0,3. Si en el instante t está desocupada, en el t+1 estará ocupada con probabilidad 0.1 y desocupada con probabilidad 0.9.

Ejemplo: línea telefónica

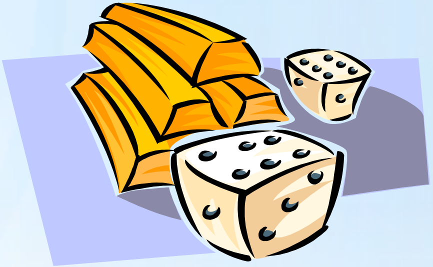
$$Q = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$



PROPIEDAD MARKOVIANA

Ejemplos:

Comportamiento (sube/baja) del precio de las acciones hoy, depende de lo ocurrido ayer



Problema de la ruina de un jugador de casino

Elección de marca: Con qué línea aérea volar a EUA?

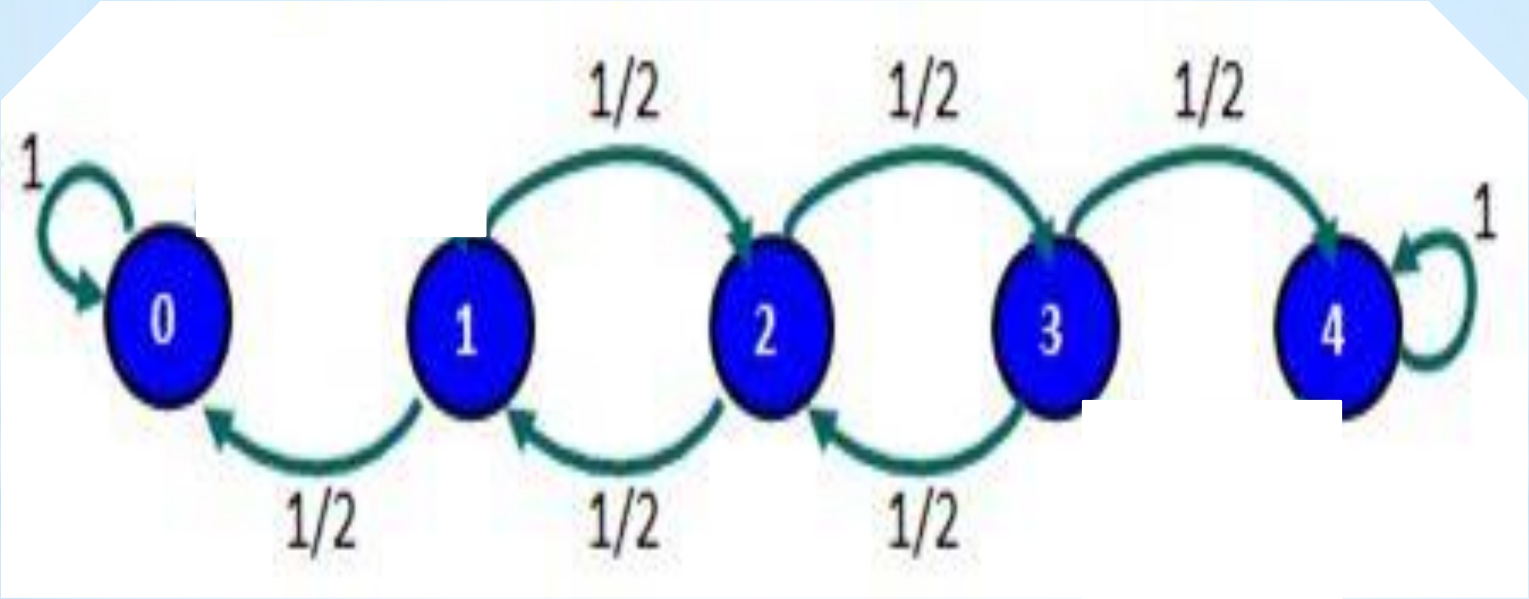
Ejemplo: **Suponga que en un juego existen 2 jugadores, cada uno de los cuales dispone inicialmente de 2 monedas. En cada jugada se gana una moneda con probabilidad ½ o se pierde una moneda con probabilidad ½. El juego termina cuando un jugador tiene 4 monedas o se queda con ninguna. Modele como una Cadena de Markov la situación descrita.**

Desarrollo: El primer caso consiste en identificar la variable aleatoria la cuál debe representar el problema planteado, en este caso la evolución del juego al cabo de cada etapa o jugada. Se define la variable aleatoria en tiempo discreto X_n : Cantidad de monedas que tiene uno de los jugadores (digamos el jugador A) al cabo de la enésima jugada.

Luego se debe identificar los posibles valores o estados que puede tomar esta variable aleatoria para una etapa n cualquiera. Sabemos que el jugador A comienza el juego con 2 monedas y el juego termina cuando pierde todo (y por tanto el jugador B gana) o cuando gana todo el jugador A (y por tanto el jugador B pierde). En consecuencia, los valores posibles para Xn son {0,1,2,3,4}.

A continuación se debe determinar las probabilidades de transición (en una etapa). Por ejemplo, si actualmente el jugador A tiene 2 monedas, la probabilidad que tenga 3 monedas al cabo de una jugada es ½ (probabilidad de ganar) y la probabilidad de que tenga 1 moneda es ½ (probabilidad de perder). De esta forma se identifican las distintas combinaciones o probabilidades de que comenzando en un estado "i" se pueda pasar a un estado "j" al cabo de una etapa.

Las probabilidades de transición en una etapa se pueden representar haciendo uso de un grafo o en forma resumida a través de la matriz de transición de probabilidades.



Matriz de transición de estados.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ P = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Cabe destacar que la suma de las probabilidades para cada fila en la matriz de transición P es de un 100%.

- Los estados 0 y 4: Son estados absorbentes
- Los estados 1,2,3: Son estados transitorios

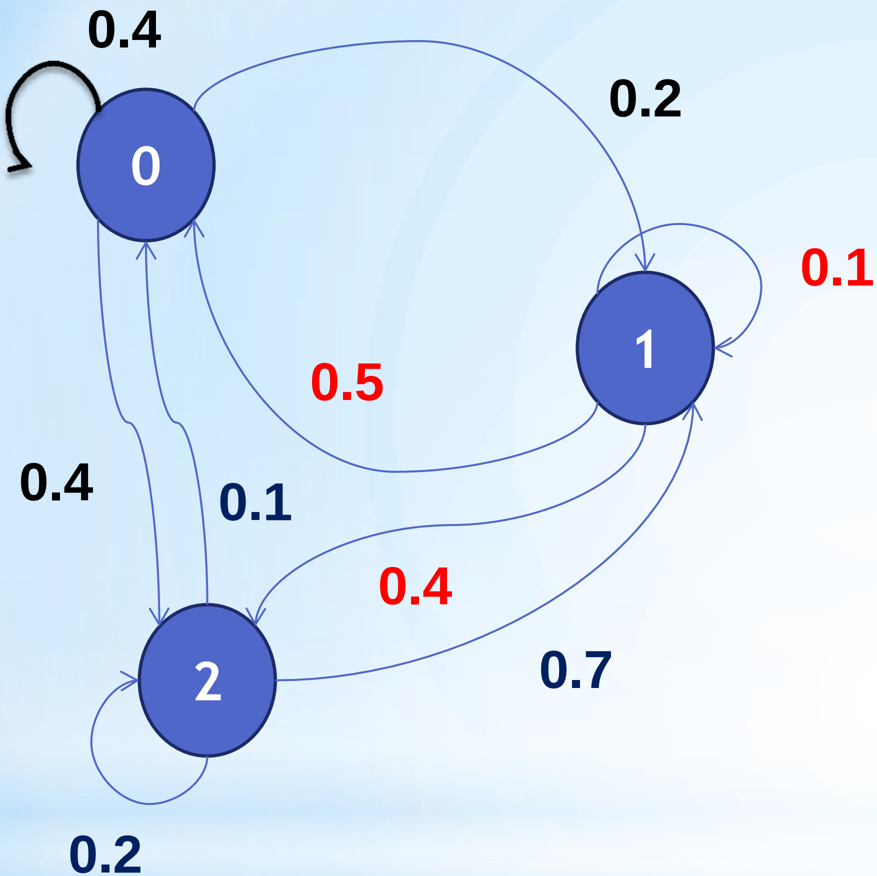
.

Ejercicio 1: Tres agencias de viaje disponen de información respecto de los desplazamientos en vacaciones de semana santa.

	No viajar	V. entre islas	V. fuera
No viajar	40%	20%	40%
V. entre islas	50%	10%	40%
V. fuera	10%	70%	20%

a) Supuestos necesarios para considerar esta situación como cadena de Markov de primer orden

b) Calcular la probabilidad de que los clientes que no han viajado estas vacaciones lo hagan fuera de las islas dentro de 2 años.



0:No viajar

1: viajar entre islas

2: viajar fuera

Diagrama de Transición de Estado del ejercicio 1.

Puede observar que se cumplen las dos propiedades básicas para considerar la matriz del ejercicio 1 como una cadena de Markov. Todos los valores son probabilidades y la suma de cada fila es exactamente 1.

Para resolver la pregunta (b) del ejercicio ; debemos multiplicar la matriz de primer orden por ella misma:

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} .4 & .2 & .4 \\ .5 & .1 & .4 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} .4 & .2 & .4 \\ .5 & .1 & .4 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .30 & .38 & .32 \\ .29 & .39 & .32 \\ .41 & .23 & .36 \end{pmatrix}$$

Esto es: dentro de dos años, del grupo que no viajan; estarán viajando fuera de las islas el 32%.

File Edit View Module Format Tools Window Help

Edit Data

Number of transitions 2

Instruction
There are more results available in additional windows. These may be op

Solución con POM-QM

Markov Analysis Resu

(untitled) 2 step tra

	No viajar	Viajar entre islas	Viajar fueras
No viajar	.3	.38	.32
Viajar entre islas	.29	.39	.32
Viajar fueras	.41	.23	.36
Ending number (given initial)	0	0	0
Steady State probability	.3333	.3333	.3333

EJEMPLO 1: EL REPARTO DEL MERCADO A LARGO PLAZO EN UN OLIGOPOLIO

Tres laboratorios farmacéuticos (A,B y C) que compiten en un principio activo (mismo conjunto homogéneo en la orden de precios de referencia). Hoy sus cuotas de mercado son 30%, 20% y 50% respectivamente

Las filas suman 1

Matriz de transición en un paso (ciclo)

	A	B	C
A	0.8	0.1	0.1
B	0.15	0.82	0.03
C	0.13	0.12	0.75

Ciclo: Mes

¿Cómo se repartirán el mercado dentro de 1 mes, 6 meses, 1 año?, ¿A largo plazo?

EJEMPLO 1: EL REPARTO DEL MERCADO A LARGO PLAZO EN UN OLIGOPOLIO

Este es un ejemplo de cadena de Markov **irreductible y ergódica.** Todos los estados son **recurrentes** y están comunicados entre sí, formando una sola clase. Hay **solución de estado estable** (reparto del mercado a largo plazo, independiente de la situación inicial)

Reparto del mercado después de n ciclos = P0*P^n

1 mes.....P1= [0.3350 0.2540 0.4110]

2 meses ....p2 =[0.3595 0.2911 0.3494]

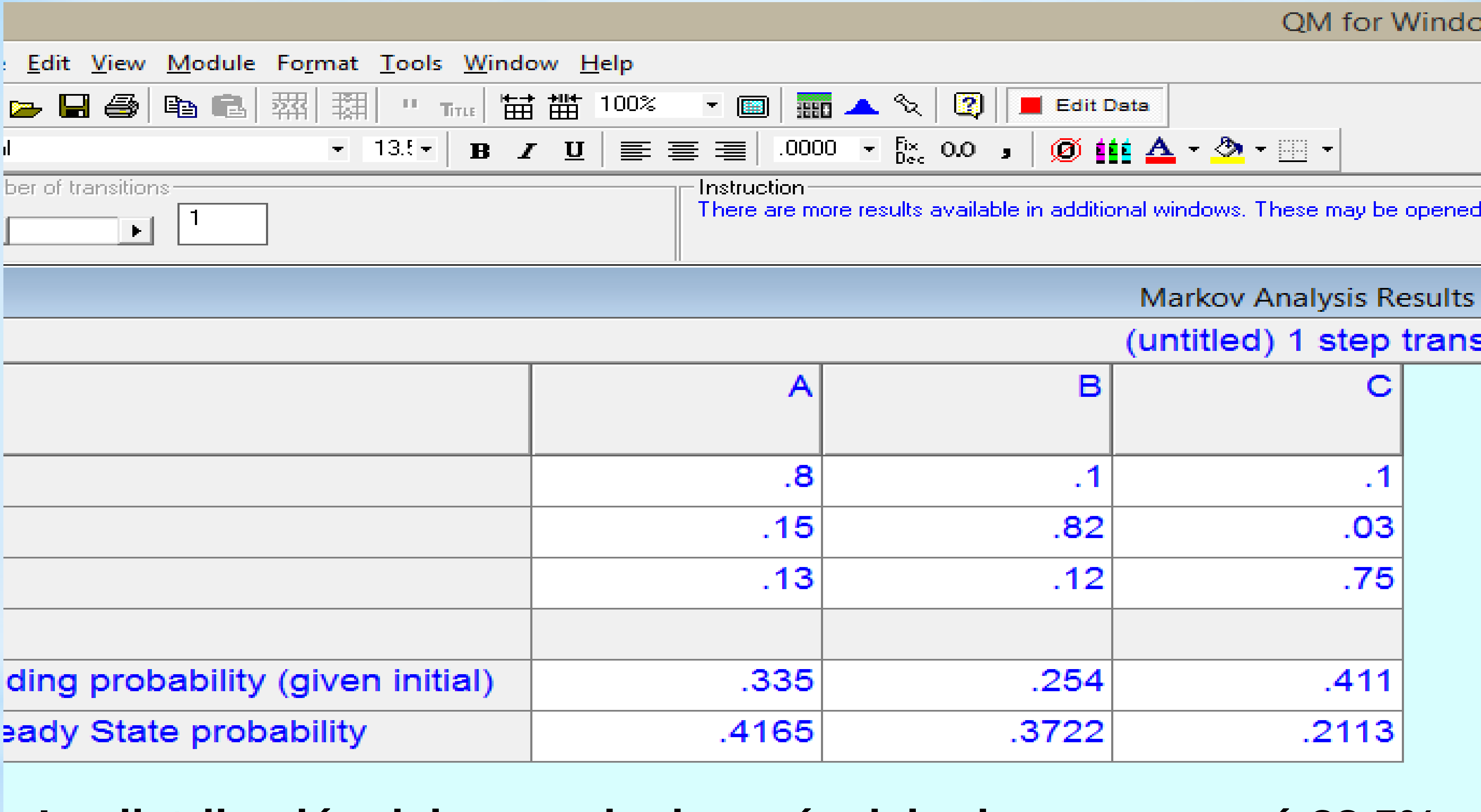
6 meses ...... p6 =[0.4030 0.3543 0.2427]

1 año .... p12 = [0.4150 0.3704 0.2146]

2 años ...... p24 =[0.4165 0.3722 0.2113]

Solución de estado estable

3 años .... p36 =[0.4165 0.3722 0.21131]



	A	B	C
	.8	.1	.1
	.15	.82	.03
	.13	.12	.75
ding probability (given initial)	.335	.254	.411
eady State probability	.4165	.3722	.2113

La distribución del mercado después del primer mes, será:33.5% para A; 25.4% para B; 41.1% para C.

(untitled) 2 step tra

	A	B	C
A	.668	.174	.158
B	.2469	.691	.0621
C	.2195	.2014	.5791
Ending probability (given initial)	.3595	.2911	.3494
Steady State probability	.4165	.3722	.2113

La distribución del mercado después del segundo mes, será:66.8% para A; 17.4% para B; 15.8% para C.

$$P^{(6)} = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & .4618 & .3184 & .2198 \\ B & .3907 & .4528 & .1565 \\ C & .3726 & .3365 & .2909 \end{array}$$

Ending probability .403 .3543 .2427

Steady State probability .4165 .3722 .2113

La distribución del mercado después del sexto mes, será:40.3% para A; 35.43% para B; 24.27% para C.

$$P^{(12)} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} .4196 & .3652 & .2153 \\ .4157 & .3821 & .2023 \\ .4119 & .3689 & .2192 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ending probability .415 .3704 .2146

Steady State probability .4165 .3722 .2113

La distribución del mercado después del primer año, será:41.5% para A; 37.04% para B; 21.46% para C.

$$P^{(24)} = \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ A & \multicolumn{3}{c}{} \\ B & \\ C & \end{array}$$

$$P^{(24)} = \begin{array}{c|ccc|} & A & B & C \\ A & .4165 & .3721 & .2114 \\ B & .4165 & .3724 & .2111 \\ C & .4165 & .3722 & .2113 \end{array}$$

Ending probability	.4165	.3722	.2113
Steady State probability	.4165	.3722	.2113

La distribución del mercado después del segundo año, será:41.65% para A; 37.22% para B; 21.13% para C.

$$P^{(36)} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \end{array}$$

$$P^{(36)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} .4165 & .3722 & .2113 \\ .4165 & .3722 & .2113 \\ .4165 & .3722 & .2113 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ending probability	**.4165**	**.3722**	**.2113**
Steady State probability	**.4165**	**.3722**	**.2113**

La distribución del mercado después del tercer año, será:41.65% para A; 37.22% para B; 21.13% para C. Puede verse que los valores de cada columna son iguales. Entonces hemos llegado al estado estable.

EJEMPLO

A Joe le encanta salir a comer a los restaurantes del área. Sus comidas favoritas son la mexicana, la italiana, la china y la tailandesa. En promedio, Joe paga $10,00 por una comida mexicana, $15.00 por una comida italiana, $9.00 por una comida china, y $11.00 por una comida tailandesa. Los hábitos alimenticios de Joe son predecibles: Hay 70% de probabilidad de que la comida de hoy sea una repetición de la de ayer y probabilidades iguales de que cambie a una de las tres restantes.

(a) ¿Cuánto paga Joe en promedio por su comida diaria?

(b) ¿Con qué frecuencia consume Joe comida mexicana?

$$P^{(1)} = \begin{array}{c|ccccc} & \text{Initial} & \text{MEX} & \text{ITAL} & \text{CHI} & \text{THAI} \\ \hline \text{MEX} & \$10 & .7 & .1 & .1 & .1 \\ \text{ITAL} & \$15 & .1 & .7 & .1 & .1 \\ \text{CHI} & \$9 & .1 & .1 & .7 & .1 \\ \text{THAI} & \$11 & .1 & .1 & .1 & .7 \end{array}$$

La dinámica de la población se ve afectada por el continuo movimiento de personas que busca una mejor calidad de vida o un mejor empleo. La ciudad de Mobile tiene una población citadina interna, una población suburbana y una población rural circundante. El censo levantado a intervalos de 10 años muestra que 10% de la población rural se traslada a los suburbanos y 5% al interior de la ciudad. En cuanto a la población suburbana, 30% se traslada a las áreas rurales y 15% al interior de la ciudad. La población del interior de la ciudad no se cambiaría a los suburbanos, pero 20% sí se cambiaría a la quieta vida rural.

(a) Exprese la dinámica de la población como una cadena de Markov.

(b) Si el área metropolitana de Mobile en la actualidad incluye 20,000 residentes rurales, 100,000 suburbanos, y 30,000 habitantes citadinos, ¿cuál será la distribución de la población en 10 años? ¿En 20 años?

(c) Determine el panorama de la población de Mobile a largo plazo.

Un proceso de producción incluye una máquina que se deteriora con rapidez tanto en la calidad como en la cantidad de producción con el trabajo pesado, por lo que se inspecciona al final de cada día. Después de la inspección se clasifica la condición de la máquina en uno de cuatro estados posibles:

Estado	**Condición**
0	Tan buena como nueva
1	Operable: deterioro mínimo
2	Operable: deterioro mayor
3	Inoperable y reemplazada por una tan buena como nueva

El proceso se puede modelar como una cadena de Markov con matriz de transición (de un paso) **P** dada por

Estado	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	0	0

C *a*) Encuentre las probabilidades de estado estable.

b) Si los costos respectivos por estar en los estados 0, 1, 2, 3 son 0, 1 000, 3 000 y 6 000 dólares, ¿cuál es el costo diario esperado a largo plazo?

c) Encuentre el *tiempo de recurrencia esperado* del estado 0 (esto es, el tiempo esperado que una máquina se puede usar antes de tener que reemplazarla).

$$P^{(10)} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & .1538 & .5385 & .1538 & .1538 \\ 1 & .1538 & .5385 & .1538 & .1538 \\ 2 & .1538 & .5385 & .1538 & .1538 \\ 3 & .1538 & .5385 & .1538 & .1538 \end{array}$$

Ending number	**1538.462**	**5384.615**	**1538.462**	**1538.462**
Steady State probability	**.1538**	**.5385**	**.1538**	**.1538**

EJEMPLO 2: LA EVOLUCIÓN CLÍNICA DE LOS PACIENTES CON VÁLVULA CARDIACA SOMETIDOS A TRATAMIENTO ANTICOAGULANTE

BIEN

CON SECUELAS

MUERTO

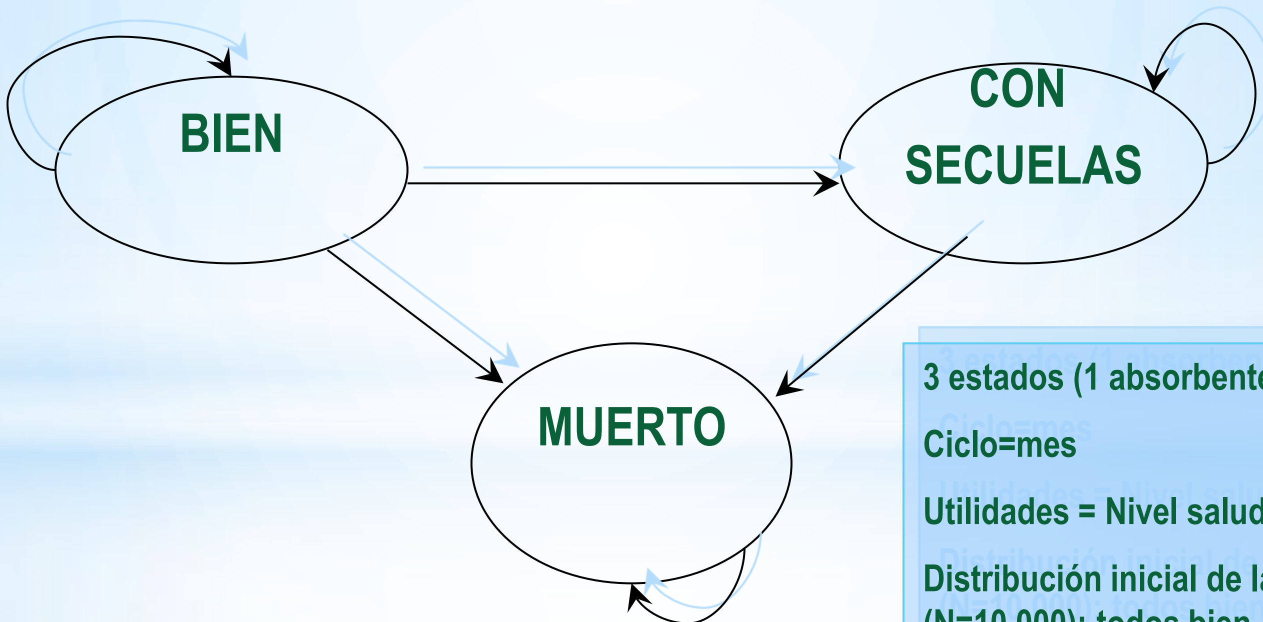
3 estados (1 absorbente, 2 transitorios)

Ciclo=mes

Utilidades = Nivel salud

Distribución inicial de la cohorte (N=10.000): todos bien

EJEMPLO 2: LA EVOLUCIÓN CLÍNICA DE LOS PACIENTES CON VÁLVULA CARDIACA SOMETIDOS A TRATAMIENTO ANTICOAGULANTE



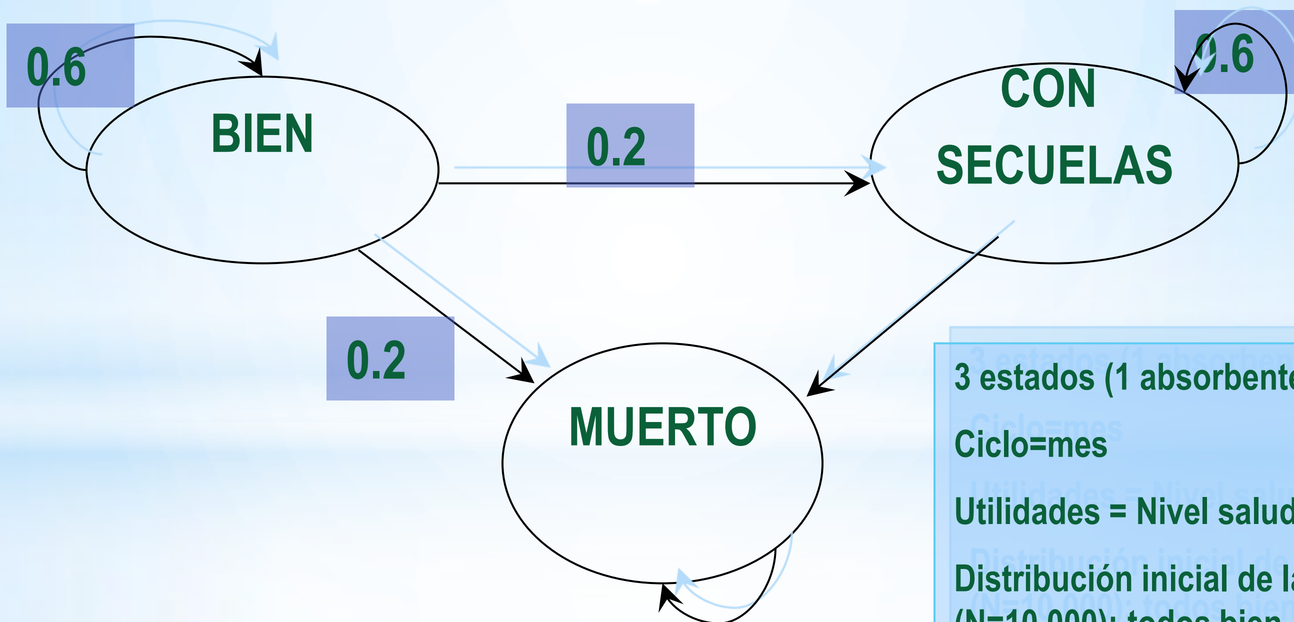
3 estados (1 absorbente, 2 transitorios)

Ciclo=mes

Utilidades = Nivel salud

Distribución inicial de la cohorte (N=10.000): todos bien

EJEMPLO 2: LA EVOLUCIÓN CLÍNICA DE LOS PACIENTES CON VÁLVULA CARDIACA SOMETIDOS A TRATAMIENTO ANTICOAGULANTE



3 estados (1 absorbente, 2 transitorios)

Ciclo=mes

Utilidades = Nivel salud

Distribución inicial de la cohorte (N=10.000): todos bien

EJEMPLO 3: EL HÁBITO TABÁQUICO DE LOS JÓVENES

	Nunca lo ha probado	Lo ha probado, pero ahora no fuma	Fuma menos de una vez por semana	Fuma los fines de semana	Fuma diariamente	**Total**
Nunca lo ha probado	77.7%	17.2%	3.2%	0.9%	1.0%	100.0%
Lo ha probado, pero ahora no fuma	0.0%	75.0%	12.2%	4.7%	8.1%	100.0%
Fuma menos de una vez por semana	0.0%	34.0%	22.0%	12.0%	32.0%	100.0%
Fuma los fines de semana	0.0%	26.5%	17.6%	26.5%	29.4%	100.0%
Fuma diariamente	0.0%	6.3%	8.3%	0.0%	85.4%	100.0%
Total	50.4%	31.8%	6.7%	3.0%	8.1%	100.0%

5 estados (1 transitorio, 4 recurrentes)

Ciclo= un año

Distribución inicial de la cohorte (N=1.340): (0.58 0.28 0.05 0.03 0.06)

Tipos de estados y Cadenas de Markov

Podemos considerar $f_{ij}^{(n)}$ para (n=1,2,..) como la función de probabilidad de la variable aleatoria tiempo de primera pasada

Sea f_{ii} la probabilidad de que el proceso dado que comienza en en el estado i regrese al estado i

El estado i es <u>Recurrente</u> si $\sum f_{ii}^{(n)} = 1$

Un estado es <u>Absorbente</u> si $P_{ii}=1$

Una vez que el proceso se encuentra en el estado i no lo abandona

El estado i es <u>Transitorio</u> si $\sum f_{ii}^{(n)} < 1$

Una vez que el proceso se encuentra en el estado i existe una prob.>0 de no regresar

Si el estado es recurrente entonces el número esperado de veces que el proceso está en el estado i es infinito

Ejercicio: Identifica los distintos estados en la siguiente matriz de transición.

	Estados	0	1	2	3	4
P	0	0.25	0.75	0	0	0
	1	0.5	0.5	0	0	0
	2	0	0	1	0	0
	3	0	0	0.33333333	0.66666667	0
	4	1	0	0	0	0

Tipos de estados y Cadenas de Markov

Si el estado es transitorio cumple la propiedad:
El nº esperado de veces que el proceso está en el estado i es finito e igual a:

$$\frac{1}{1-f_{ii}}$$

¿Cuál es el número esperado de veces que el proceso se encuentra en el estado i dado que el estado inicial era i (x_0=i)?

$$B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{x}_\mathrm{n} = i \\ 0 & \text{si } \mathrm{x}_\mathrm{n} \neq i \end{cases}$$

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n / x_0 = i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

Tipos de estados y Cadenas de Markov

Un estado es recurrente si y solo si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$

- ✓ **Cadenas de Markov periódicas y aperiódicas**
- ✓ **Un estado recurrente i es recurrente positivo si el tiempo esperado de que regrese al estado i es positivo y recurrente nulo en caso contrario**
- ✓ **En una cadena de Markov de estado finito, todos los estados recurrentes son estados recurrentes positivos.**
- ✓ **Los estados recurrentes positivos que son aperiódicos se denominan <u>ERGÓDICOS</u>**

Tipos de estados y Cadenas de Markov.

- **Clasificación de Estados de una cadena de Markov**

El estado j es <u>accesible</u> desde el estado i si:

$$P_{ij}^{(n)} > 0, \quad \text{para algún n} \geq 0$$

Si el estado j es accesible desde el estado i, y además, el estado i es accesible desde el estado j, los estados i y j se <u>Comunican</u>

Los estados que se comunican se dice que pertenecen a una misma <u>Clase</u>

Si existe una sola clase todos los estados se comunican, se dice que la cadena de Markov es <u>Irreductible</u>

Tipos de estados y Cadenas de Markov.

- ✓ **Un estado recurrente i es recurrente positivo si el tiempo esperado de que regrese al estado i es positivo y recurrente nulo en caso contrario**

- ✓ **En una cadena de Markov de estado finito, todos los estados recurrentes son estados recurrentes positivos.**

- ✓ **Los estados recurrentes positivos que son aperiódicos se denominan <u>ERGÓDICOS</u>**